

# 一种 GNSS 卫星轨道高精度实时插值方法\*

仝海波, 沙海, 张国柱, 欧钢

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**针对 GNSS 导航信号模拟源中多星座轨道计算实时性问题,从计算效率、精度等角度分析和对比了牛顿多项式和埃尔米特多项式插值算法的性能,通过对牛顿插值的加“窗”改进,使得卫星位置、速度的插值精度显著提高。算例结果表明,该方法能够在等间距时间点上多个卫星位置已知、速度未知的条件下,高精度实时地内插出卫星的位置和速度,其中卫星位置插值精度为 mm 级,速度插值精度小于  $1e-5m/s$ ,计算量为广播星历直接计算的  $1/7$ ,位置和速度的拟合精度均优于三阶埃尔米特插值结果。

**关键词:**卫星导航;GNSS 信号源;轨道插值;计算实时性

**中图分类号:** TN228.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2012)02-0059-05

## A high-precision and real-time interpolation method for satellite orbit in GNSS

TONG Haibo, SHA Hai, ZHANG Guozhu, OU Gang

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Aiming at solving the real-time computation of the satellite orbit in GNSS (Global Navigation Satellite System) emulator with multiple constellations, the Newton and Hermite polynomial interpolation algorithms were analyzed and compared by computing efficiency and accuracy. The precision of the satellite position and velocity (PV) performed better by adding “window” in the Newton algorithm. The computation examples show that the real-time and high-precision computation of the satellite PV is achieved with position at the equation interval epoch known and velocity unknown. The results also show that the new method speeds up the computation seven times faster than the direct ephemeris calculation, and yields better performance in orbit precision than the 3-order Hermite Interpolation, for the position error is less than millimeter and the velocity error  $1e-5$  m/s.

**Key words:** satellite navigation; GNSS emulator; orbit interpolation; real-time computation

随着 GPS、GLONASS、Galileo 以及我国的北斗二代卫星导航系统建设,GNSS 信号模拟源需具备同时提供多个系统信号的功能,其中,伪距以及伪距变化率的实时生成是导航信号模拟源研制的关键技术之一。伪距以及伪距变化率反推中轨道计算量最大,其包含大量的浮点乘法、迭代以及三角函数运算<sup>[1]</sup>。同时,导航星座的多样性要求实时计算模拟 100 颗以上卫星的轨道,对信号源硬件的实时计算能力提出了很大的挑战。此外,GNSS 精密数据处理、多模接收机等实际应用中,对实时、高效的星历插值亦有很大的需求。

目前国内外星历的插值与拟合研究主要以 IGS(The International GNSS Service)精密星历和 GPS 广播星历为参考,插值或拟合出区间内任意时刻卫星的位置,分析比较的算法包括拉格朗日、

牛顿、尼维勒多项式插值,三角函数插值以及切比雪夫多项式拟合方法。文献[2]最早比较了不同阶数和不同节点间距的情况下埃尔米特插值和样条插值对卫星位置和速度的影响。文献[3-6]分析了不同多项式插值后卫星位置精度随阶数的变化情况,并指出节点间距与阶数相等的条件下,多项式插值与拟合的精度相同,但牛顿插值在计算效率上优于拉格朗日和尼维勒插值。由于切比雪夫多项式拟合涉及矩阵求逆等运算,多个星历拟合的实时计算会导致过长的初始化时间。采用相同阶数对卫星轨道进行插值时,三角函数比多项式表现出更高的插值精度,但其频率分量依赖于 IERS 组织的发布<sup>[7-8]</sup>。为克服高阶多项式插值的龙格现象,文献[9-10]引入了加“窗”的概念,加窗处理后的误差特性有待进一步研究。

\* 收稿日期:2011-05-20

基金项目:国家部委资助项目

作者简介:仝海波(1984—),男,河南焦作人,博士研究生,E-mail:hbo.tong@gmail.com;

欧钢(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:ougangcs@gmail.com

### 1 常用轨道插值方法比较

下文中定义阶数为多项式的最高次数。

假设  $f(t)$  为卫星在地心地固系 (ECEF) 下的位置函数,  $t$  为时间, 显然  $f(t)$  在  $t$  上均有定义, 那么  $n$  次拉格朗日插值多项式为

$$f_{Ln}(t) = \sum_{k=0}^n f(t_k) \cdot l_k(t) \quad (1)$$

式中  $t_0, t_1, \dots, t_n$  以及对应的  $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)$  称为插值节点,  $|t_{k+1} - t_k|$  定义为节点间距,  $l_k(t)$  为插值基函数且满足

$$l_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \left( \frac{t - t_i}{t_k - t_i} \right), (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

由式(1)和(2)可知, 拉格朗日多项式是唯一的, 虽然可以有不同的表示方法和计算方法, 但计算过程需要大量反复的乘法运算, 而且计算新的插值点或为减小误差而添加新的节点时, 插值基函数都要重新计算。尼维勒插值算法用逐次线性插值可以提高计算效率, 尤其是在添加新节点时可充分利用已有的计算结果。

设  $p_{m_1 m_2 \dots m_k}$  表示节点  $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_k}$  所确定的拉格朗日插值多项式, 设  $t_i$  和  $t_j$  是节点  $t_0, t_1, \dots, t_n$  中的两个不同节点, 则式(1)可改写为

$$f_{Ln}(t) = p_{0i2\dots n}(t) = \frac{(t - t_j)p_{01\dots j-1 j+1\dots n}(t)}{t_i - t_j} - \frac{(t - t_i)p_{01\dots i-1 i+1\dots n}(t)}{t_i - t_j} \quad (3)$$

对给定的  $t$ , 由式(3)的计算逐行地生成表 1。

表 1 尼维勒插值表

Tab. 1 Neville interpolation

$t_0$	$Q_{00} = p_0(t)$
$t_1$	$Q_{10} = p_1(t) \quad Q_{11} = p_{01}(t)$
$t_2$	$Q_{20} = p_2(t) \quad Q_{21} = p_{12}(t) \quad Q_{22} = p_{012}(t)$
$t_3$	$Q_{30} = p_3(t) \quad Q_{31} = p_{23}(t) \quad Q_{32} = p_{123}(t) \quad Q_{33} = p_{0123}(t)$
	⋮

表中  $p_k(t) = f(t_k), Q_{ij} = p_{k-j \dots k-1 k}(t)$ , 可以看出  $Q_{kk}$  就等于拉格朗日多项式的逐次估计值。当有新的节点添加时, 逐行生成表 1, 直到误差  $|Q_{kk} - Q_{k-1k-1}|$  小于指定的门限时为止, 即尼维勒插值方法。该插值计算过程中, 新的节点添加不会引起多项式全部重新计算, 减小了运算量。但是插值点变化时, 各项需要重新计算, 无论  $t$  的变化范围是大还是小。

容易扩展插值多项式的阶数是牛顿插值的一个优点。以  $n$  阶多项式牛顿插值为例, 其表达

式为:

$$f_{Nn}(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1] \cdot (t - t_0) + \dots + f[t_0, t_1, \dots, t_n] \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) \quad (4)$$

式中,  $f[t_0, t_1, \dots, t_n]$  为  $f(t)$  的  $n$  阶差商且  $f[t_0] = f(t_0)$ , 差商计算公式如下:

$$f[t_0, t_1, \dots, t_k] = \frac{f[t_0, \dots, t_{k-2}, t_k] - f[t_0, t_1, \dots, t_{k-1}]}{t_k - t_{k-1}} \quad (5)$$

由式(4)和(5)可知,  $n$  阶牛顿插值多项式可以通过向  $n - 1$  阶多项式添加一个更高次项获得, 而且插值点  $t$  在  $t_0, t_1, \dots, t_n$  节点间变化时, 差商不需要重新计算。

在导航信号源的卫星轨道插值中, 不仅要求卫星的位置与被插值函数  $f(t)$  保持高精度 ( $< 0.01\text{m}$ ), 而且卫星速度与  $f'(t)$  精度要求保持更高的精度 ( $< 0.001\text{m/s}$ )。而埃尔米特插值不仅可以保证插值节点位置和速度与被插值函数以及一阶导数一致, 而且每个节点的一阶导数连续。以两节点三阶埃尔米特插值为例, 若  $f(t)$  在插值节点  $t_i$  和  $t_{i+1}$  处的值和一阶导数均已知, 那么插值多项式如下:

$$f_{H3}(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3 \quad (6)$$

其中,  $a_i = f(t_i), b_i = f'(t_i)$

$$c_i = \frac{3f[t_i, t_{i+1}] - 2f'(t_i) - f'(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i}$$

$$d_i = \frac{f'(t_i) - 2f[t_i, t_{i+1}] + f'(t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2}$$

式中  $f[\cdot]$  的计算见式(5)。

三阶埃尔米特插值充分利用插值节点处一阶导数值, 使得插值函数的一阶导数在节点处保持连续, 避免了一阶导数的跳变(在轨道插值中表现为卫星速度的跳变)。在轨道插值中, 若两节点的间距较大, 则高阶分量的误差会逐渐增大。由于阶数的限制, 两节点三阶埃尔米特插值在实践应用中需要进行分段计算。

通过对常见四种插值方法的讨论和比较可知, 拉格朗日插值的计算效率最低, 无论是引入新节点, 还是待插值点变化, 都需要重新计算; 尼维勒插值虽有改进, 但是在待插值点变化时仍需重新计算。牛顿插值和埃尔米特插值均能克服上述缺点, 且埃尔米特插值函数的一阶导数与节点处一致(假设节点处一阶导数已知)。由于导航信号源中要求对轨道进行长时间的不断插值, 因此

节点数会随着时间逐渐增多。为避免多项式阶数的不断增高,通常采用分段插值的方法。牛顿插值在轨道插值应用中是否能进一步改善以及与埃尔米特插值的性能比较,这些都需在具体的轨道插值计算中进行定量的评估。

## 2 改进后的牛顿插值方法

### 2.1 等距插值

精密卫星星历数据通常是等间距的或者容易计算得到等间距的。等距节点牛顿插值是牛顿多项式插值的一个特例,通过以差分形式表达的插值公式代替差商形式表达的插值公式可以简化计算过程并且不影响计算精度。假设  $h = |t_n - t_{n-1}| = \dots = |t_1 - t_0|$ , 式(4)中的差商可通过前向差分计算,即

$$f[t_0, t_1, \dots, t_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} \quad (7)$$

其中  $\Delta$  为向前差分算子,  $\Delta^k f_0$  满足

$$\begin{cases} \Delta f_i = f(t_i + h) - f(t_i) \\ \Delta^k f_0 = \Delta^{k-1} f_1 - \Delta^{k-1} f_0 \end{cases} \quad (8)$$

令  $t = t_0 + \lambda h$ , 并将式(8)代入式(4)得

$$f_{Nh}(\lambda) = f(t_0) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\Delta^k f_0}{k!} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (\lambda - i) \right) \quad (9)$$

其插值余项为

$$R_n(\lambda) = h^{n+1} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (10)$$

且  $x_0 < \xi < x_0 + nh$ 。

由此可见,等距插值式(9)比式(4)具有更简洁的表达式,提高了插值速度。对于长周期的卫星轨道插值,分段多项式插值是一种实用的解决方案。为保证多星座轨道插值的实时性,可将各区段插值系数的计算在初始化过程中完成,通过快速搜索插值点所在的区段,直接调用对应的系数进行插值。在分段的过程中,需要考虑节点的间距和区段内节点的数量,节点过多,相邻节点间距过小,就会出现龙格现象,影响插值精度和效率。通过合理的滑动窗选取可有效避免上述现象的发生。

### 2.2 滑动窗的选取

由牛顿插值多项式的余项式(10)知,采用高阶多项式插值时,插值误差在靠近两端节点的区域内将迅速增大,出现了插值区间内逼近很差的现象即龙格现象。卫星  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴的插值结果都会出现龙格现象,限于篇幅,图1仅给出了  $Y$  轴的

插值误差。一种有效的方法是通过加“窗”处理,使插值点始终处于插值区间的中部。例如,图1中已知等间距的10个节点上的数据,被插值点始终在节点4到节点5之间(节点从0开始编号),如果被插值点超出“窗口”的范围,则相应地向前或者向后移动“窗”,同时向前或向后补充相应的已知节点数据。从图1中也可看出,“窗口”的大小影响精度。为保证插值后的精度,采用相邻两个节点之间的间距为“窗口”尺寸。

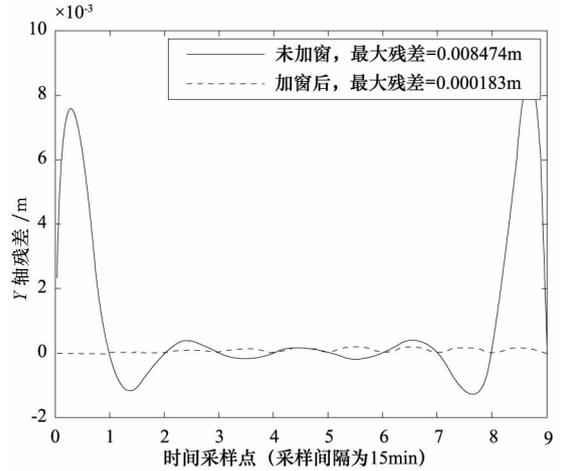


图1 龙格现象以及加窗处理

Fig. 1 Runge's phenomenon and adding window

这种滑动窗式的牛顿插值算法避免了龙格现象的发生,提高了插值精度。为此需要待插值区间的两端有冗余的已知节点,这在星历插值中是很容易计算得到的。

目前有关星历插值的文献多是关注的卫星位置的插值计算,较少关注卫星速度的插值计算。由图1可以看出,加窗后卫星位置插值误差呈缓慢变化的特点,结合速度定义

$$v(t) = f'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t + \frac{s}{2}) - f(t - \frac{s}{2})}{s} \quad (11)$$

考虑到GNSS卫星位置、速度的数量级,经过多次计算结果对比后得到  $s = 0.001$ 。若  $s$  取得过大,则卫星轨道不能近似为线性变化;反之,由于有效位数的影响,放大了舍入误差,影响速度的精度。采用此方法的代价是每次插值完位置后,需要另外计算其前后的位置。

### 2.3 改进后的卫星位置和速度计算流程

导航信号模拟源中轨道计算常以星历参数参考,星历参数包括星历参考时刻、半长轴、偏心率、倾角、升交点经度、近地点幅角、平近点角、倾角的变化率、升交点经度的变化率和开普勒根数的7个校正值。结合改进后的轨道插值算法,完整的

卫星位置和速度插值计算流程如图 2 所示,分为以下步骤:

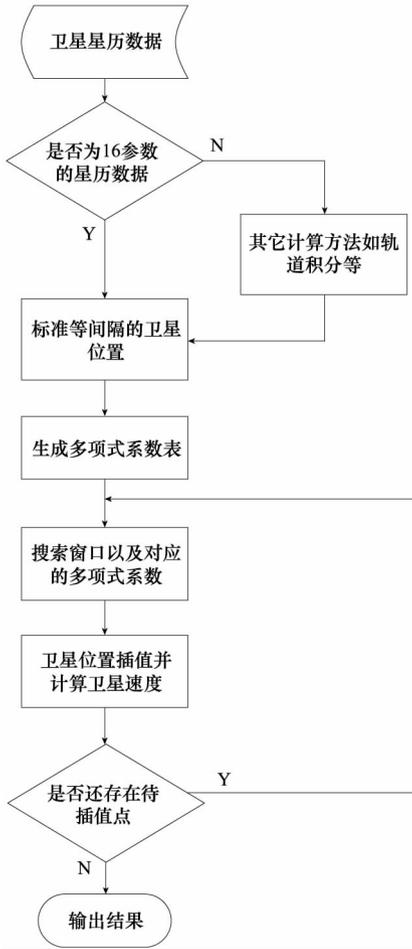


图 2 卫星位置和速度插值计算流程

Fig. 2 Flow of the satellite position and velocity interpolating

(1) 节点数据准备: 根据提供的星历, 计算出标准等间隔的卫星位置(埃尔米特插值需已知速度初值), GPS、Galileo 和北斗二代导航系统可采用星历文件直接计算, GLONASS 系统需采用轨道积分的方法得到节点的卫星位置。

(2) 生成多项式插值系数表: 根据等间隔的卫星位置, 分别计算各窗口的插值系数, 将系数与窗口对应起来生成系数表, 每一组系数对应唯一的窗口。为加快计算速度, 以上步骤可在初始化过程中完成。

(3) 搜索窗口编号: 根据待插值点搜索窗口编号以及对应的系数。

(4) 计算卫星位置和速度: 用同样的多项式系数计算待插值点以及前后临近时间的卫星位置坐标, 以中心差分代替解析式求导, 根据式(5)求出卫星的速度。

(5) 判断是否还有待计算的插值点, 若有, 转到步骤(3)继续计算, 否则输出结果。

### 3 数值算例结果分析

评估星历插值算法的性能主要包括: 连续性、位置和速度的精度、计算量、节点间距。信号源伪距生成与卫星的位置密切相关, 位置的不连续变化会引起伪距的跳变, 从而引起信号失真。精度主要是衡量多项式插值后与星历的逼近程度。减小计算量是采用插值的主要原因, 计算量的降低才能保证多星座下卫星位置和速度计算的实时性。节点间距也是必须考虑因素之一, 间距太小造成系数表的存储以及搜索负担加重, 间距太大时需要提高阶数才能满足精度, 计算量就会增大。

采用 PRN 编号为 2 的 GPS 卫星 2008 年 10 月 22 日 14 时的广播星历数据, 将其计算出来的 10ms 间隔的卫星位置和速度作为真值, 分别抽取 12h 段内多组等间隔的节点数据进行滑动式牛顿和埃尔米特插值, 通过多项式插值计算得到 10ms 间隔的卫星位置和速度。采用 C 语言实现有利于比较各算法的计算耗时, 具体计算流程见 2.3 节。为了全面地比较各种插值算法之间性能, 节点间距分别取 60s、180s、300s、420s、540s、660s、780s、900s; 由于高阶的运算量过大, 牛顿插值多项式仅取 5 阶、7 阶、9 阶; 埃尔米特插值多项式为 3 阶。不同插值方法、不同节点间距的插值结果如图 3、图 4 所示。

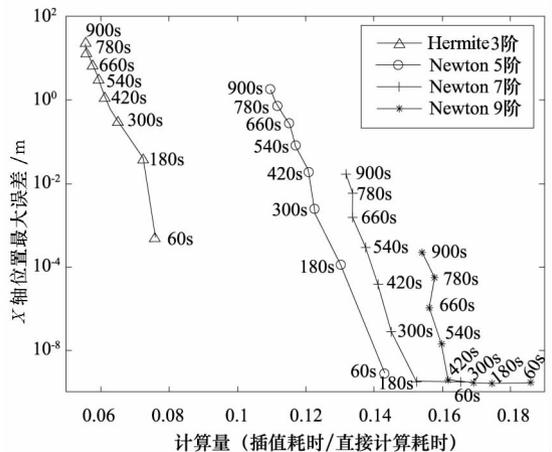


图 3 卫星位置插值结果

Fig. 3 Interpolated results of the satellite position

由于插值后卫星 X 轴和 Y 轴的位置误差相当, 均略大于 Z 轴, 速度误差也有同样的特点。限于篇幅, 本文仅给出 X 轴的插值结果。图 3 中的计算量定义为多项式插值计算所耗时间与星历直接计算所耗时间之比, 图中圆圈或三角符号旁边标签为相邻节点的时间间距。从图 3 中可以看出, 在相同时间间距的条件下, 埃尔米特三阶插值计算速度最快、精度却最差; 牛顿 9 阶多项式的插

值精度最高,计算量最大。牛顿插值的计算量大于埃尔米特的原因除了多项式阶数高以外,牛顿插值需要进行额外的插值以备计算速度。各插值多项式的总体线条斜率反映了搜索窗口编号的计算量比重,倾斜度越大,搜索计算量的比重越大。随着插值区间的减小,计算速度会明显降低,但9阶的牛顿插值精度受插值区间变化的影响较小,甚至出现了小幅抖动。

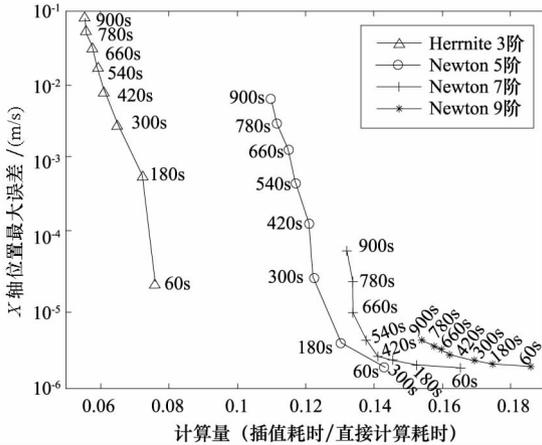


图4 卫星速度插值结果

Fig. 4 Interpolated results of the satellite velocity

当位置最大偏差小于等于 mm 级时,埃尔米特3阶和牛顿5、7、9阶的可用最大节点间距分别为60s、300s、660s、900s。兼顾运算量和节点间距,牛顿7阶、节点间距为500~600s时,插值计算速度为星历直接计算的7倍,可满足多星座的卫星星历插值实时计算要求。此外,随着节点间距的减小,牛顿高阶插值的精度不会小于 $1e-7m$ 。这是由于计算机字长有限引起的舍入误差,而不是龙格现象引起的。

从图4中可以看出,卫星的速度插值误差随节点间距的变化趋势与位置误差相同,速度的插值误差比位置误差小。对比图3和图4,节点间距为900s时,埃尔米特插值和牛顿插值的速度误差约为位置误差的1/200,这也证实了卫星速度计算方法的有效性。当采用540~660s的间距数据进行牛顿7阶插值时,速度的最大误差小于 $1e-5m/s$ ,相对于卫星的运动速度,该误差量级引起的速度跳变影响可忽略不计。类似地对于900s间距的数据采用牛顿9阶插值计算得到的速度可近似为连续的,计算量较前者有所增大。

## 4 结论

(1)从算法的精度、节点间距来看,加窗处理后牛顿插值的阶数不少于7阶,节点间距应小于900s,这样插值得到的卫星位置误差可达 mm 级,

速度误差达 $1e-5m/s$ 级,计算量为星历直接计算的1/7。

(2)从计算效率和插值结果的连续性上看,由于埃尔米特插值要求已知各节点处的位置和速度,因此在各插值节点卫星位置和速度都保持连续。分段埃尔米特三阶插值阶数低、运算量小,算法效率高,但是节点间距增大后,精度急剧下降。长周期的轨道插值时搜索窗口将会消耗更多的时间,从而降低整个算法的效率。

(3)随着节点间距的减小,多项式插值的精度提高。当间距小于900s,9阶以上加窗处理后的牛顿插值精度受节点间距变化的影响较小。

## 参考文献 (References)

- [1] 范国清,王威,郝晓宁. 高精度 GPS 观测数据的实时仿真研究[J]. 国防科技大学学报, 2009, 31(3): 60-64.  
FAN Guoqing, WANG wei, XI Xiaoning. High precision real-time simulation of GPS measurement[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2009, 31(3): 60-64. (in Chinese)
- [2] Korvenoja P. Efficient satellite orbit approximation[C]// Proc of ION GPS, Salt Lake, 2000: 1930-1937.
- [3] 魏二虎,柴华. GPS 精密星历插值方法的比较研究[J]. 全球定位系统, 2006, 31(5): 13-15.  
WEI Erhu, CHAI Hua. The comparison research on GPS precise ephemeris interpolation methods[J]. GNSS World of China, 2006, 31(5): 13-15. (in Chinese)
- [4] 丁文武,刘万科,李征航. 基于广播星历的 GPS 卫星坐标的多项式拟合法[J]. 海洋测绘, 2007, 27(6): 4-9.  
DING Wenwu, LIU Wanke, LI Zhenghang. Polynomial fitting of GPS satellite coordinates based on broadcast ephemeris[J]. Hydrographic Surveying and Charting, 2007, 27(6): 4-9. (in Chinese)
- [5] 李明峰,江国焰,张凯. IGS 精密星历内插与拟合法精度的比较[J]. 大地测量与地球动力学, 2008, 28(2): 77-80.  
LI Mingfeng, JIANG Guoyan, ZHANG Kai. Comparison of interpolating and fitting IGS precise ephemeris[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2008, 28(2): 77-80. (in Chinese)
- [6] 宫厚诚,李全海. 基于 IGS 精密星历的卫星坐标和钟差插值[J]. 全球定位系统, 2009, 34(5): 24-27.  
GONG Houcheng, LI Quanhai. The interpolation methods for satellite coordinate and clock offset based on IGS precise ephemeris[J]. GNSS World of China, 2009, 34(5): 24-27. (in Chinese)
- [7] Schenewerk M. A brief review of basic GPS orbit interpolation strategies[J]. GPS Solution, 2003, 6(4): 265-267.
- [8] 张守建,李建成,邢乐林等. 两种 IGS 精密星历插值方法的比较分析[J]. 大地测量与地球动力学, 2007, 27(2): 80-83.  
ZHANG Shoujian, LI Jiancheng, XING Lelin, et al. Comparative analysis on two methods for IGS precise ephemeris interpolation[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2007, 27(2): 80-83. (in Chinese)
- [9] Horemuz M, Andersson J V. Polynomial interpolation of GPS satellite coordinates[J]. GPS Solution, 2006, 10(1): 67-72.
- [10] 洪樱,欧吉坤,彭碧波. GPS 卫星精密星历和钟差三种内插方法的比较[J]. 武汉大学学报信息科学版, 2006, 31(6): 516-518.  
HONG Ying, OU Jikun, PENG Bibo. Three interpolation methods for precise ephemeris and clock offset of GPS satellite[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2006, 31(6): 516-518. (in Chinese)