

线粘弹性材料中三维裂纹问题的加料有限元法*

段静波, 雷勇军

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 将加料有限元法扩展应用于线粘弹性材料三维断裂问题。为了反映裂纹尖端的奇异性, 在裂尖附近的奇异区采用若干八节点六面体加料单元和过渡单元, 非奇异区采用常规八节点六面体单元。三种单元分区混合使用形成求解域网格划分。基于 Boltzmann 叠加原理, 推导了粘弹性材料的增量型本构关系, 进而获得了增量加料有限元列式, 并通过附加自由度计算粘弹性介质中裂纹应变能量释放率。数值算例验证了方法的正确性和有效性。

关键词: 线粘弹性体; 三维断裂问题; 六面体加料单元; 六面体过渡单元; 应变能量释放率
中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2012)03-0006-06

The enriched finite element method for 3-D fracture problems in viscoelastic materials

DUAN Jingbo, LEI Yongjun

(College of Aerospace and Materials Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The enriched finite element method was developed for three-dimensional fracture problems in a linear viscoelastic body. To manifest the singularity at the crack tip, the 8-node hexahedral enriched elements and corresponding transition elements were employed, combined with ordinary elements on the zone far away from the crack tip. Three types of elements were used together to form the whole mesh. Based on the boltzmann superposition principle, the incremental constitutive relation for viscoelastic materials was formulated. Furthermore, the incremental formulations of the enriched FEM were derived. The strain energy release rate in a cracked viscoelastic body was obtained through the enriched degree of freedoms. The numerical results show that the present method is accurate and efficient.

Key words: linear viscoelasticity; three-dimensional fracture problems; hexahedral enriched element; hexahedral transition element; strain energy release rate

“Enriched finite element”在文献[1]中译为“加料单元”,作者沿用其译法。关于这种方法的研究,1974年, Benzley^[2]最早提出采用加料单元和过渡单元解决各向同性线弹性介质中的裂纹问题,他的基本思想是将裂纹尖端渐近位移场作为加料项引入常规单元位移模式,进而构成加料单元的位移模式。这种方法最大的优点是应力强度因子可以直接从附加自由度中获得,不需要利用节点位移或单元应力数据后处理来获得裂纹断裂参量,这在处理复杂三维裂纹问题时,优势十分明显。目前,这种方法已广泛应用于解决弹性介质中的裂纹问题。Biggers、Pageau 和 Joseph^[3-8]将该方法成功应用到各向异性材料中反平面裂纹、三维楔形切口等几何或材料不连续结构中。Nied^[9]还将加料有限元法与罚函数相结合解决基

于接触模型的界面裂纹问题。Ayhan^[10-11]采用三维加料有限元方法求解表面裂纹、角裂纹等复杂的三维裂纹问题。最近, Ayhan^[12-13]又将加料有限元法应用于功能梯度材料中的裂纹问题。

本文在前人研究的基础上,将加料有限元法扩展应用于线粘弹性材料三维断裂问题,推导了三维加料有限元单元计算格式和线粘弹性材料增量本构关系,并完成了程序编制。数值算例验证了本文方法的正确性和有效性。

1 加料单元构造

1.1 三维裂纹尖端渐近位移场

通常粘弹性材料的泊松比可视为常数,在此条件下,根据对应原理可得到线粘弹性材料中平面应变裂纹问题、反平面裂纹问题中裂尖渐近位

* 收稿日期:2011-10-21

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-08-0148); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20069998002); 国家自然科学基金资助项目(11132012); 国防科技大学科研计划资助项目(JC10-01-01)

作者简介: 段静波(1982—),男,山西晋城人,博士研究生, E-mail: duanjingbo@nudt.edu.cn;
雷勇军(通信作者),男,教授,博士,博士生导师, E-mail: leiyj108@nudt.edu.cn

移场

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left((5-3v-8v^2) \cos \frac{\theta}{2} - (1+v) \cos \frac{3\theta}{2} \right) L^{-1} [K_I^*/E_{\sim}^*] \\ \quad + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left((9+v-8v^2) \sin \frac{\theta}{2} + (1+v) \sin \frac{3\theta}{2} \right) L^{-1} [K_{II}^*/E_{\sim}^*] \\ v' = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left((7-v-8v^2) \sin \frac{\theta}{2} - (1+v) \sin \frac{3\theta}{2} \right) L^{-1} [K_I^*/E_{\sim}^*] \\ \quad + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left(-(3-5v-8v^2) \cos \frac{\theta}{2} - (1+v) \cos \frac{3\theta}{2} \right) L^{-1} [K_{II}^*/E_{\sim}^*] \\ w' = 2(1+v) \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} L^{-1} [K_{III}^*/E_{\sim}^*] \end{cases} \quad (1)$$

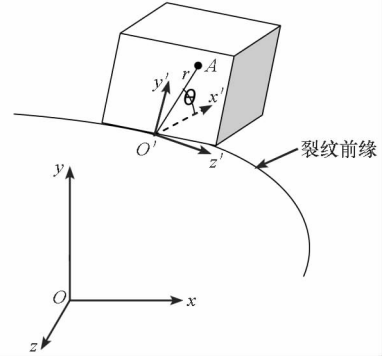


图1 三维裂纹前缘的裂纹单元
Fig. 1 The crack element on the three-dimensional crack front

其中, u', v', w' 分别为沿图1中所示局部直角坐标系坐标轴 x', y', z' 方向的位移, r, θ, z' 为以裂尖 O' 点为原点的局部柱坐标系坐标轴, $K_I^*, K_{II}^*, K_{III}^*$ 为拉普拉斯变换后的 I、II、III型应力强度因子, $E_{\sim}^* = pE^*$, E^* 为拉普拉斯变换后的松弛模量, p 为拉普拉斯变换参数, $L^{-1}[\cdot]$ 为拉普拉斯逆变换, v 为泊松比。

$Q'(r, \theta) =$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \begin{bmatrix} (5-3v-8v^2) \cos \frac{\theta}{2} - (1+v) \cos \frac{3\theta}{2} & (9+v-8v^2) \sin \frac{\theta}{2} + (1+v) \sin \frac{3\theta}{2} & 0 \\ (7-v-8v^2) \sin \frac{\theta}{2} - (1+v) \sin \frac{3\theta}{2} & -(3-5v-8v^2) \cos \frac{\theta}{2} - (1+v) \cos \frac{3\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8(1+v) \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

那么, 裂纹前缘任意一点 O' 处局部渐近位移场在总体直角坐标系下为

$$\{u \ v \ w\}^T = Q(r, \theta) \{L^{-1}[K_I^*/E_{\sim}^*] \ L^{-1}[K_{II}^*/E_{\sim}^*] \ L^{-1}[K_{III}^*/E_{\sim}^*]\}^T \quad (3)$$

其中, u, v, w 分别为沿图1中所示总体直角坐标系坐标轴 x, y, z 方向的位移, $Q(r, \theta) = T^T Q'(r, \theta)$, T 为局部直角坐标系与整体直角坐标系间的转换矩阵。

1.2 单元位移模式

在普通八节点六面体等参单元位移模式基础上, 通过加入表征裂纹尖端奇异特性的(3)式, 可构成加料单元的位移模式

$$u_i = \sum_{m=1}^8 N_m(\xi, \eta, \zeta) \bar{u}_{im} + Z_0(\xi, \eta, \zeta) \sum_{j=1}^3 [Q_{ij}(r, \theta) \psi_j(\Gamma) - \sum_{m=1}^8 N_m \bar{Q}_{ijm}(r, \theta) \bar{\psi}_j(\Gamma)] \quad (4)$$

其中, u_i 为单元内一点在整体坐标系中沿坐标轴

对于各向同性线粘弹性材料中一般的三维裂纹问题, 虽然结构几何尺寸、大小、载荷作用方式、裂纹形状与前缘不尽相同, 但在裂纹前缘任意一点 O' 处(图1所示), 其局部渐近位移场可由平面应变问题的裂尖渐近位移场与反平面问题的裂尖渐近位移场组合而成, 且令

方向的位移, $i = 1, 2, 3, \bar{u}_{im}$ 为单元节点位移, N_m 为单元形函数, $m = 1, 2, \dots, 8, Q_{ij}(r, \theta)$ 为角函数阵 $Q(r, \theta)$ 的分量, $\bar{Q}_{ijm}(r, \theta)$ 为角函数阵分量在 m 节点处的值, ξ, η, ζ 为等参单元局部坐标系, $\bar{\psi}_j(\Gamma)$ 为 $\psi_j(\Gamma)$ 在 m 节点处的值, $\psi_j(\Gamma)$ 可由插值函数 $N_n(\Gamma)$ 得到

$$\psi_j(\Gamma) = \sum_{n=1}^2 N_n(\Gamma) \psi_j^n \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5)$$

其中, Γ 为加料单元位于裂纹前缘线上的边, ψ_j^n 为相应裂纹前缘线上节点的附加自由度, 其值就是未知的 $L^{-1}[K_I^*/E_{\sim}^*], L^{-1}[K_{II}^*/E_{\sim}^*], L^{-1}[K_{III}^*/E_{\sim}^*]$ 。

另外, (3)式中 $Z_0(\xi, \eta, \zeta)$ 为调整函数, 对于裂尖单元而言, $Z_0(\xi, \eta, \zeta) \triangleq 1$, 对于过渡单元, $Z_0(\xi, \eta, \zeta)$ 的表达式取决于过渡单元与裂尖单元相邻的单元面、单元边或单元节点, 例如, 当过渡单元的面 ($\eta = -1$) 与裂尖单元相连时

$$Z_0(\xi, \eta, \zeta) = 0.5(1 - \eta) \quad (6)$$

为了便于理论推导, 将加料单元的位移模式

写成如下的向量形式

$$\mathbf{u} = [N \quad \mathbf{Z}N_e] \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\boldsymbol{\psi}} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中, $\bar{\mathbf{u}}$ 是加料单元的节点位移列向量, N 是常规六面体单元形函数阵, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ 是加料单元的附加自由度, $\mathbf{Z}N_e$ 是加料单元形函数阵附加部分。

1.3 裂尖局部坐标系原点的确定

一般来说,对于三维裂纹问题,虽然裂纹前缘线上任意一点 O' 处渐近位移场已给出,但是单元内各点所对应的裂尖局部坐标系并不处处相同。因此,推导单元刚度矩阵前的一个关键问题就是必须首先建立单元内部任意一点 $A(\xi_A, \eta_A, \zeta_A)$ 所对应的局部坐标系 $O' - x'y'z'$, 也就是确定其对应裂尖局部坐标系原点 O' 在裂纹前缘线上的位置。

根据裂尖渐近位移场特性可知,裂尖前缘曲线在裂尖局部坐标系原点 O' 处的切向量,记为 \mathbf{T} , 必须垂直于向量 \mathbf{AO}' , 即

$$\mathbf{AO}' \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (8)$$

利用此几何关系就可确定 O' 点在总体坐标系下的坐标值。

2 线粘弹性增量型本构关系

根据 Boltzmann 叠加原理^[14],粘弹性材料的当前应力张量取决于过去历程,其积分型本构关系可写为

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{D} E(0) \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{D} \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}(t-s) \frac{dE(s)}{ds} ds \quad (9)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 分别为 t 时刻的应力向量、应变向量, \mathbf{D} 为材料矩阵, $E(t)$ 为松弛模量,一般情况下可以表示成 Prony 级数形式

$$E(t) = E_\infty + \sum_{n=1}^N E_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \quad (10)$$

为了解决积分函数只能在全历程积分才能求解的困难,有限元分析中通常采用增量型的本构关系,将式(9)的本构方程在时域中离散。在时间 $[0, t]$ 内划分 M 步,步长为 h ,在 $[t_m, t_{m+1}]$ 时间段内, t_{m+1} 时刻的应力应变可以由 t_m 时刻的应力应变来计算,即

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\sigma}(t_{m+1}) = \boldsymbol{\sigma}(t_{m+1}) - \boldsymbol{\sigma}(t_m) \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_{m+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_{m+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(t_m) \end{cases} \quad (11)$$

假设在 $[t_m, t_{m+1}]$ 内,应变是线性增加的,即

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_m) + \frac{t - t_m}{t_{m+1} - t_m} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_{m+1}) \quad (12)$$

于是,联立(9)式、(10)式、(11)式与(12)式,可得增量型本构方程

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}(t_{m+1}) = \hat{\mathbf{D}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_{m+1}) - \sum_{n=1}^N \alpha_n(h) \boldsymbol{\sigma}^n(t_m) \quad (13)$$

其中, $\Delta \boldsymbol{\sigma}(t_{m+1})$ 为应力增量, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_{m+1})$ 为应变增量, $\hat{\mathbf{D}} = [E_\infty + \sum_{n=1}^N \beta_n(h) E_n] \mathbf{D}$, $\alpha_n(h) = 1 - e^{-\frac{h}{\tau_n}}$,

$\beta_n(h) = \alpha_n(h) \frac{\tau_n}{h}$, $\boldsymbol{\sigma}^n(t_m)$ 的递推式为 $\boldsymbol{\sigma}^n(t_m) = E_n \beta_n(h) \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_m) - (\alpha_n(h) - 1) \boldsymbol{\sigma}^n(t_{m-1})$, 且 $\boldsymbol{\sigma}^n(t_0) = 0$ 。

3 有限元增量列式

在单元域内,增量形式的虚功原理为

$$\int_{\Omega^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{p} d\Gamma \quad (14)$$

其中, $\delta \mathbf{u}$ 为虚位移, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 为虚应变, $\Delta \mathbf{f}$ 为体力增量, $\Delta \mathbf{p}$ 为面力增量。

将(7)式、(13)式代入(14)式,可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\psi} \\ \mathbf{K}_{\psi u} & \mathbf{K}_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}}(t_{m+1}) \\ \Delta \bar{\boldsymbol{\psi}}(t_{m+1}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_u(t_{m+1}) \\ \Delta \mathbf{F}_\psi(t_{m+1}) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u^0(t_{m+1}) \\ \mathbf{F}_\psi^0(t_{m+1}) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

其中,

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B} d\Omega, \mathbf{K}_{u\psi} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{Z} \mathbf{B}_e d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{\psi u} = \int_{\Omega^e} \mathbf{Z} \mathbf{B}_e^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B} d\Omega, \mathbf{K}_{\psi\psi} = \int_{\Omega^e} \mathbf{Z} \mathbf{B}_e^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{Z} \mathbf{B}_e d\Omega$$

$$\Delta \mathbf{F}_u(t_{m+1}) = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{f}(t_{m+1}) d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{p}(t_{m+1}) d\Gamma$$

$$\Delta \mathbf{F}_\psi(t_{m+1}) = \int_{\Omega^e} \mathbf{Z} \mathbf{N}_e^T \Delta \mathbf{f}(t_{m+1}) d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{Z} \mathbf{N}_e^T \Delta \mathbf{p}(t_{m+1}) d\Gamma$$

$$\mathbf{F}_u^0(t_{m+1}) = - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \sum_{n=1}^N \alpha_n(h) \boldsymbol{\sigma}^n(t_m) d\Omega$$

$$\mathbf{F}_\psi^0(t_{m+1}) = - \int_{\Omega^e} \mathbf{Z} \mathbf{B}_e^T \sum_{n=1}^N \alpha_n(h) \boldsymbol{\sigma}^n(t_m) d\Omega$$

\mathbf{B} 为常规六面体单元应变矩阵, $\mathbf{Z} \mathbf{B}_e$ 为加料单元应变矩阵附加部分。

4 能量释放率

由文献[14]可知,线粘弹性介质中平面裂纹的能量释放率可由(16)式获得

$$\begin{cases} G_I(t) = (1 - \nu^2) K_I(t) L^{-1} [K_I^*/E^*] \\ G_{II}(t) = (1 - \nu^2) K_{II}(t) L^{-1} [K_{II}^*/E^*] \\ G_{III}(t) = (1 + \nu) K_{III}(t) L^{-1} [K_{III}^*/E^*] \end{cases} \quad (16)$$

其中, $G_I(t)$, $G_{II}(t)$, $G_{III}(t)$ 与 $K_I(t)$, $K_{II}(t)$, $K_{III}(t)$ 分别为 I、II、III 型能量释放率与应力强度因子。

由前面推导可知,(16)式中的 $L^{-1} [K_I^*/E^*]$, $L^{-1} [K_{II}^*/E^*]$, $L^{-1} [K_{III}^*/E^*]$ 就是加料单元的附加自由度 $\bar{\boldsymbol{\psi}}$, 从而可以从有限元列式中直接获得。然后,再通过逆卷积可求得 $K_I(t)$, $K_{II}(t)$,

$K_{III}(t)$,进而由(16)式获得裂纹能量释放率。

5 算例分析

为了验证方法的正确性和有效性,以无限长边裂纹板条问题为例,自编程序,研究了高斯积分点、单元网格大小、加料单元数对裂纹尖端位移以及裂纹能量释放率结果精度的影响规律,并与解析解^[14]作了对比。设板条长度 $H = 20a$,宽度 $W = 2a$,裂纹长度 $a = 1$ 。粘弹性材料采用如图2所示的三参量线粘弹性固体,且假设各参数为 $E_{\infty} = 1.0, E_1 = 1.0, \eta_1 = 5.0$,泊松比 $\nu = 0.3$ 。设板端承受均布布拉应力,且 $\sigma_0 = 1$,载荷历程如图3所示,加载时间为200。图4为边裂纹板条的有限元模型,在板条有限元模型的前后面上约束节点面外位移以模拟平面应变状态。数值算例中为了便于分析对比,暂不涉及物理量单位。

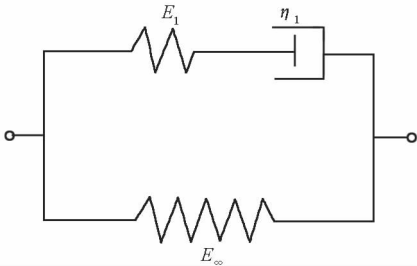


图2 三参量线粘弹性固体

Fig.2 The three-parameter linear viscoelastic solid

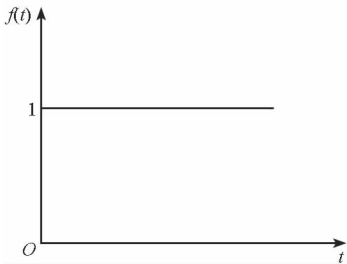
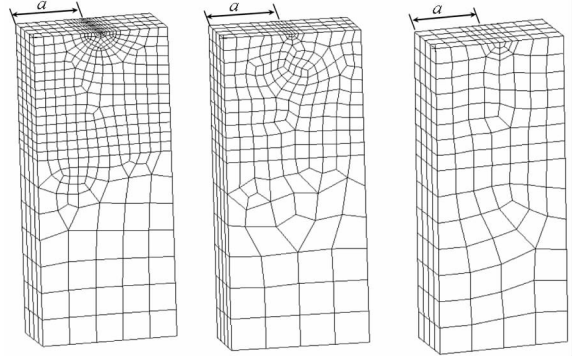


图3 载荷历程

Fig.3 Loading history

(1) 网格密度对位移结果精度的影响

表1中结果主要研究网格密度对位移结果精度的影响。图4(a)~(c)所示的模型分别采用1118单元、680单元、404单元。从表1中可以看出,无论在何种网格密度的情况下,采用本文的加料单元,与常规有限元相比,结果精度都有提高。特别是在较稀疏的图4(c)所示的网格下,精度提高幅度较明显。对比3种不同的网格密度下的位移结果,可以发现,加料有限元与常规有限元类似,增大网格密度可以提高位移精度,但是加料有限元精度变化幅度没有常规有限元那么明显,这就是说,加料有限元对网格不是十分敏感,这是其非常好的一个特性。当加料单元边长达到裂纹长度



(a)单元边长 $0.01a$ (b)单元边长 $0.025a$ (c)单元边长 $0.05a$

图4 不同尺寸裂尖加料单元下的边裂纹板有限元模型

Fig.4 The finite element model for the edge cracked plate with different size of enriched elements

的 $1/50 \sim 1/20$ 时,与解析解相比,误差在5%内,已可满足工程要求,而常规有限元要达到这样的精度,单元边长至少要达到裂纹长度的 $1/100$ ^[15]。

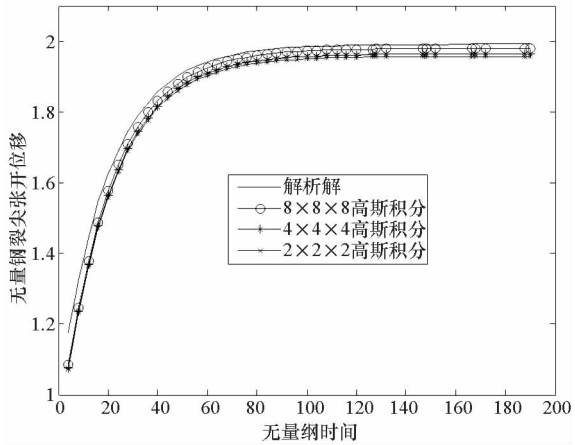


图5 加料单元高斯积分点数对裂尖位移场精度影响

Fig.5 The accuracy comparison for crack opening displacement with different Gauss quadrature points

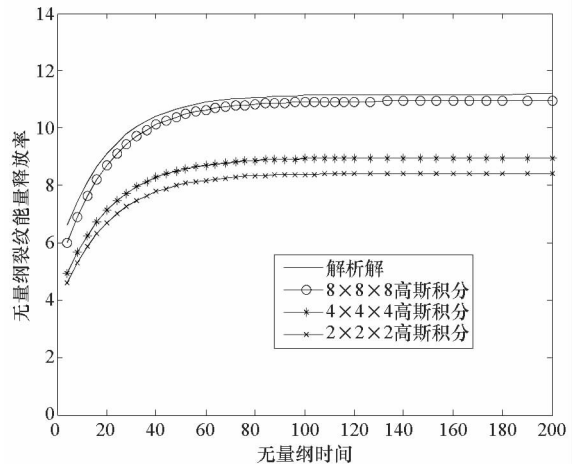


图6 加料单元高斯积分点数对能量释放率精度影响

Fig.6 The accuracy comparison for strain energy release rate with different Gauss quadrature points

表 1 边裂纹板裂尖张开位移 ($r/a=0.15$)

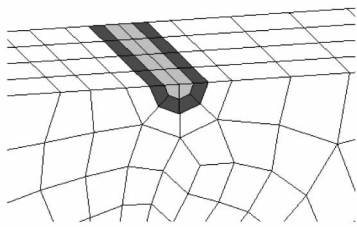
Tab. 1 The crack opening displacement for the edge cracked plate ($r/a=0.15$)

网格	无量纲时间	解析解	本文解	误差	误差	误差
网格一 (单元边长 $0.01a$)	20	1.6248	1.5750	4.98%	1.5612	3.91%
	40	1.8563	1.8289	1.48%	1.8129	2.34%
	80	1.9728	1.9572	0.79%	1.9402	1.65%
	120	1.9885	1.9747	0.69%	1.9575	1.56%
	190	1.9909	1.9766	0.91%	1.9594	1.58%
网格二 (单元边长 $0.025a$)	20	1.6248	1.5410	5.16%	1.4711	9.46%
	40	1.8563	1.7894	3.60%	1.7083	7.97%
	80	1.9728	1.9150	2.93%	1.8282	7.33%
	120	1.9885	1.9321	2.84%	1.8445	7.24%
	190	1.9909	1.9340	2.86%	1.8463	7.26%
网格三 (单元边长 $0.05a$)	20	1.6248	1.5008	7.63%	1.3612	16.22%
	40	1.8563	1.7428	6.11%	1.5806	14.85%
	80	1.9728	1.8651	5.46%	1.6915	14.26%
	120	1.9885	1.8817	5.37%	1.7067	14.17%
	190	1.9909	1.8836	5.39%	1.7083	14.19%

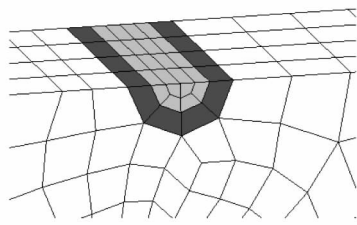
表 2 加料单元数对裂尖位移和能量释放率精度的影响

Tab. 2 The accuracy comparison for crack opening displacement and strain energy release rate

无量纲时间	裂尖张开位移			能量释放率		
	一层 奇异单元	二层 奇异单元	解析解	一层 奇异单元	二层 奇异单元	解析解
20	1.5157	1.5410	1.6248	7.5292	8.7138	9.3067
40	1.7601	1.7894	1.8563	8.7166	10.1178	10.6328
80	1.8836	1.9150	1.9728	9.3208	10.8308	11.3000
120	1.9005	1.9321	1.9885	9.4034	10.9282	11.3903
190	1.9023	1.9340	1.9909	9.4093	10.9351	11.4040



(a) 一层加料单元



(b) 二层加料单元

■ Enriched element · □ Transition element

图 7 有限元模型裂尖局部网格

Fig. 7 The local mesh for crack tip

(2) 高斯积分点数对位移结果精度的影响

采用图 4(b) 所示的模型研究了高斯积分点数对结果影响。图 5 给出的是加料单元采取不同高斯积分点时 $r/a=0.15$ 处裂尖位移结果。由图可知,在加料单元刚度积分采用 $8 \times 8 \times 8$ 的减缩积分时获得的结果精度最高,而且加料单元高斯积分点数对位移结果精度影响比较小。图 6 给出的是加料单元采取不同高斯积分点时的能量释放率结果。可以看出,加料单元采取的高斯积分点对其精度有明显的影响,采取 $8 \times 8 \times 8$ 的高斯积分点时获得的结果最好,当高斯积分点数减少时,能量释放率结果精度迅速下降。

(3) 加料奇异单元数目对结果精度的影响

仍然采用图 4(b) 的模型研究加料单元数目对结果精度的影响。图 7(a) 是裂尖采用一层加料单元的有限元模型,加料单元与常规单元通过过渡单元连接,图 7(b) 是裂尖采用两层奇异单元的有限元模型。表 2 给出相应的计算结果。从表中可以

看出,增加裂纹尖端的加料单元数可以提高裂尖张开位移和能量释放率结果精度,而且对后者精度提高作用更明显一些。

6 结 论

(1) 本文将加料有限元法应用于三维线粘弹性裂纹问题,该方法不仅可以获得裂尖附近位移,而且可以利用附加自由度获得裂纹能量释放率,从而延续了该方法一贯的优势,通过典型裂纹结构算例分析,验证了理论推导的正确性和方法的有效性;

(2) 当加料单元边长达到裂纹长度的 $1/50 \sim 1/20$ 后,加料有限元法计算得到的结果精度明显高于常规有限元法,而且本文方法对网格不敏感;

(3) 高斯积分点数、加料单元数对附加自由度项精度影响十分明显,在使用加料单元时,需要采用 $8 \times 8 \times 8$ 的高斯积分点数以及两层加料单元以保证能量释放率结果精度。

参考文献 (References)

- [1] 蒙上阳. 基于粘弹性有限元方法的固体火箭发动机结构完整性分析[D]. 长沙:国防科学技术大学,2005.
MENG Shangyang. The structure integrity analysis of solid rocket motor based on viscoelastic finite element method [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2005. (in Chinese)
- [2] Benzley S E. Representation of singularities with isoperimetric finite elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1974, 8: 537 - 545.
- [3] Stephane S P, Paul F J, Sherrill B B. A finite element analysis of the singular stress fields in anisotropic materials loaded in antiplane shear [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38: 81 - 97.
- [4] Stephane S P, Sherrill B B. Finite element evaluation of free - edge singular stress fields in anisotropic materials [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38: 2225 - 2239.
- [5] Stephane S P, Paul F J, Sherrill B B. Finite element analysis of singular stress fields in anisotropic materials loaded inplane [J]. International Journal of Solids Structures, 1995, 32: 571 - 591.
- [6] Stephane S P, Sherrill B B. A finite element approach to three-dimensional singular stress states in anisotropic multi-material wedges and junctions [J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33: 33 - 47.
- [7] Stephane S P, Sherrill B B. Enriched finite elements for regions with multiple, interacting singular fields [J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal (AIAA Journal), 1996, 34(9): 1927 - 1933.
- [8] Stephane S P, Sherrill B B. Enrichment of finite elements with numerical solutions for singular stress fields [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40: 2693 - 2713.
- [9] Bayram Y B, Nied H F. Enriched finite element-penalty function method for modeling interface cracks with contact [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2000, 65: 541 - 557.
- [10] Ayhan A O, Nied H F. Stress intensity factors for three-dimensional surface cracks using enriched finite elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54: 899 - 921.
- [11] Ayhan A O. Mixed mode stress intensity factors for deflected and inclined corner cracks in finite-thickness plates [J]. International Journal for Fatigue, 2007, 29: 305 - 317.
- [12] Ayhan A O. Stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using enriched finite elements [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44: 8579 - 8599.
- [13] Ayhan A O. Three-dimensional mixed-mode stress intensity factors for cracks in functionally graded materials using enriched finite elements [J]. International Journal of Solids Structures, 2009, 46: 796 - 810.
- [14] Zhang C Y. Viscoelastic fracture mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [15] 王自强, 陈少华. 高等断裂力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
WANG Ziqiang, CHENG Shaohua. Advanced fracture mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)