

# 非定常 Euler 方程数值计算中高精度格式应用\*

赵云飞<sup>1</sup>, 刘 绪<sup>1</sup>, 涂国华<sup>2</sup>, 刘 伟<sup>1</sup>, 毛枚良<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073;

2. 空气动力学国家重点实验室, 四川 绵阳 621000)

**摘要:** 采用五阶精度加权紧致非线性格式(WCNS)和非定常“双时间步”方法求解非定常 Euler 方程, 模拟 NACA0012 翼型强迫俯仰振动流场, 研究了高精度格式应用到非定常计算时“双时间步”方法物理时间步长、子迭代收敛判据、子迭代步数以及物理时间导数离散方法对计算精度和计算效率的影响。

**关键词:** 高精度格式; 非定常流动; WCNS 格式; Euler 方程; 数值模拟

中图分类号: V211.3 文献标志码: A 文章编号: 1001-2486(2012)03-0012-05

## High-accuracy numerical method applied to calculate unsteady Euler equations

ZHAO Yunfei<sup>1</sup>, LIU Xu<sup>1</sup>, TU Guohua<sup>2</sup>, LIU Wei<sup>1</sup>, MAO Meiliang<sup>2</sup>

(1. College of Aerospace and Materials Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. State Key Laboratory of Aerodynamics, Mianyang 621000, China)

**Abstract:** By applying 5-order accuracy WCNS (Weighted Compact Nonlinear Schemes) to simulate forced-oscillation of NACA0012 aerofoil, some techniques of high-accuracy method in unsteady simulation were studied, such as inner iteration capability, inner iteration parameters of “dual time stepping” method, and discretization accuracy of time derivatives of Euler equations. The results show that, these coefficients have a remarkable effect on computation accuracy and CPU time when WCNS scheme is applied to unsteady flow simulation.

**Key words:** high-order accurate scheme; unsteady flows; WCNS schemes; Euler equations; numerical simulation

高精度、高分辨率格式概念自 20 世纪 80 年代由 Harten 提出以来一直被人们密切关注, 其在理论和应用上的诸多难点也给研究人员带来了巨大挑战, 时至今日, 高精度数值格式研究仍然是 CFD 的前沿内容。高精度格式不仅在表面热流、摩阻、流动分离等需要正确模拟真实物理粘性的问题上具有广泛应用, 而且在湍流直接数值模拟、大涡模拟、计算声学等对时间和空间具有多尺度特征的流动数值模拟上也具有迫切的应用背景。航空航天研究的需求不断推动着高精度格式快速发展, 高精度格式在计算流体力学工作中发挥的作用正逐步增加。

目前, 高精度格式应用于定常流动计算已较多, 但针对非定常流动的研究尚不多见, 国内外针对这方面的研究文献还不充分。实际上, 非定常流动十分复杂, 具有多频谱特征, 常常伴随有多尺度的漩涡结构, 对于非定常流场的这些精细结构, 采用高精度、高分辨率的格式模拟有助于揭示复

杂流场的演化过程。在非定常计算中, Jameson<sup>[1-2]</sup>发展的“双时间步”(Dual-time-step)方法在数值求解非定常 Euler/N-S 方程中得到了十分广泛的应用。“双时间步”方法涉及到子迭代收敛性、子迭代参数取值(物理时间步长、收敛判据、子迭代限制步数)等实际问题<sup>[5]</sup>, 这对于高精度格式的应用来说十分重要。目前, 高精度格式在这方面的计算经验还较少。另外, 时间精度也是非定常计算的重要问题之一, 在空间项采用高精度格式离散时, 时间导数也要保证较高的离散精度。然而目前的隐式“双时间步”方法通常对时间导数只采用二阶格式离散, 三阶或更高阶的离散方法研究还较为缺乏, 因此这也是高精度非定常计算值得关注的问题。

针对上述问题, 本文采用空间五阶精度的加权紧致非线性格式 WCNS<sup>[3,6-8]</sup> 对非定常计算的这些关键基础问题进行了研究, 包括非定常“双时间步”方法子迭代收敛性、子迭代参数选取、不

\* 收稿日期: 2011-06-24

基金项目: 国家部委资助项目; 国家自然科学基金资助项目(11172325, 90716015)

作者简介: 赵云飞(1988-), 男, 内蒙赤峰人, 博士研究生, E-mail: zhaoyf08@126.com;

刘伟(通信作者), 男, 教授, 博士, 硕士生导师, E-mail: fishfather6525@sina.com

同时间离散方法对非定常计算的影响等。

## 1 控制方程

贴体坐标系下守恒形式的无量纲 Euler 方程为

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1)$$

式中  $\bar{Q}$  为守恒变量,  $\bar{E}$ 、 $\bar{F}$ 、 $\bar{G}$  为无粘通量。

## 2 数值方法

### 2.1 空间离散方法

Euler 方程对流项采用五阶精度原始变量型 WCNS 格式离散,以  $\xi$  方向为例(网格间距为  $h$ ):

$$\bar{E}'_j = \frac{75}{64h}(\bar{E}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{E}_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{25}{384h}(\bar{E}_{j+\frac{3}{2}} - \bar{E}_{j-\frac{3}{2}}) + \frac{3}{640h}(\bar{E}_{j+\frac{5}{2}} - \bar{E}_{j-\frac{5}{2}}) \quad (2)$$

设  $U$  为原始变量,那么式中的  $\bar{E}_{j\pm\frac{1}{2}} = E(\tilde{U}_{j\pm\frac{1}{2}})$  代表单元边界的数值通量,本文采用通量分裂方法计算:

$$\bar{E}_{j\pm\frac{1}{2}} = E^-(\tilde{U}_{Rj\pm\frac{1}{2}}) + E^+(\tilde{U}_{Lj\pm\frac{1}{2}}) \quad (3)$$

正负通量  $E^\pm$  由 Steger-Warming 分裂方法得到,其中  $\tilde{U}_{Rj\pm\frac{1}{2}}$  和  $\tilde{U}_{Lj\pm\frac{1}{2}}$  为单元边界上的原始变量,通过高阶非线性插值求得。WCNS 边界格式及相关方法具体参见文献[10]。

### 2.2 时间离散方法

本文采用 LU-SGS + “双时间步”(Dual-time-step)方法离散时间导数项:

$$L(\Delta Q^{p+1}) = RHS^p \quad (4)$$

$$RHS^p = - \left[ J^{-1} \frac{\partial(Q^p)}{\partial t} + R(Q^p) \right]$$

式(4)中,上角标  $p$  表示子迭代步数。左端项表示对虚拟时间导数的隐式 LU-SGS 方法处理<sup>[9]</sup>,右端项  $RHS^p$  包含非定常方程时间导数项  $\partial(Q^p)/\partial t$  和空间导数项  $R(Q^p)$ ,空间导数项采用 WCNS 格式离散。本文分别用时间一阶精度、二阶精度和三阶精度的后差格式对  $\partial(Q^p)/\partial t$  离散:

时间导数一阶离散:

$$RHS^p = - \left[ J^{-1} \frac{Q^p - Q^n}{\Delta t} + R(Q^p) \right] \quad (5a)$$

时间导数二阶离散:

$$RHS^p = - \left[ J^{-1} \frac{3Q^p - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + R(Q^p) \right] \quad (5b)$$

时间导数三阶离散:

$$RHS^p = - \left[ J^{-1} \frac{11Q^p - 18Q^n + 9Q^{n-1} - 2Q^{n-2}}{6\Delta t} + R(Q^p) \right] \quad (5c)$$

## 3 计算结果及分析

### 3.1 计算模型

NACA0012 翼型强迫俯仰振动定义为攻角随时间正弦变化:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m \sin(kt) \quad (6)$$

式中  $\alpha$  为瞬时攻角,  $\alpha_0$  为起始攻角,  $\alpha_m$  为振幅,  $t$  是无量纲物理时间  $t = (\tilde{t} \cdot \tilde{V}_\infty) / \tilde{L}_{ref}$ ,  $\tilde{L}_{ref}$  和  $\tilde{V}_\infty$  分别是控制方程无量纲化的特征长度和特征速度,  $k$  是减缩频率。本文所有计算均采用此强迫振动模型,基本计算条件包括:  $Ma = 0.755$ ,  $\alpha_0 = 0.016^\circ$ ,  $T_\infty = 300K$ , 振幅  $\alpha_m = 2.51^\circ$ , 减缩频率  $k = 0.1628$ 。

### 3.2 “双时间步”方法对高精度非定常计算的若干影响因素研究

本节考查高精度格式应用到非定常计算时,“双时间步”方法物理时间步长、子迭代收敛判据以及最大子迭代步数对非定常计算的影响,采用第2节给出的数值方法求解非定常 Euler 方程数值模拟 NACA0012 翼型强迫俯仰振动,时间导数采用(5b)式的二阶格式离散。

#### 3.2.1 物理时间步长的影响

采用空间五阶精度 WCNS 格式在 6 个不同物理时间步长  $dt$  下(0.01、0.02、0.05、0.1、0.2、0.5)数值模拟 NACA0012 翼型强迫俯仰振荡,子迭代收敛判据统一设定为  $Tol = 0.01$ (子迭代收敛判据定义见文献[10]),子迭代均达到收敛判据后跳出。图1是不同时间步长得到的升力迟滞曲线对比,由于非定常迟滞作用,曲线表现出迟滞环形态。时间步长小于 0.1 的 4 条曲线基本是重合的,并与参考文献计算结果基本吻合<sup>[4]</sup>。当时时间步长较大取 0.2 时曲线有了少许偏离,而到 0.5 时曲线偏离程度已经很大,在最大攻角处曲线有明显变形,这说明时间步长过大后计算精度得不到满足。从曲线在最大攻角处的放大图可以看出,随着物理时间步长  $dt$  的减小,曲线呈现单向收敛的趋势。对于本算例,  $dt = 0.1$  是一个恰当的选择,在保证计算精度的同时,时间步长相对较大,从而减少一个振动周期的计算步数,提高计算效率。

表 1 列出了第 3 个振动周期结束时不同时间步长总的计算 CPU 时间对比(以  $dt = 0.1$  的 CPU

用时为单位折算),能够看出时间步长增大(减小)的确缩短(增加)了计算时间,但这种缩短(增加)并不是线性的,原因是时间步长增大(减小)在减少(增加)计算步数的同时却增加(减少)了子迭代收敛步数。

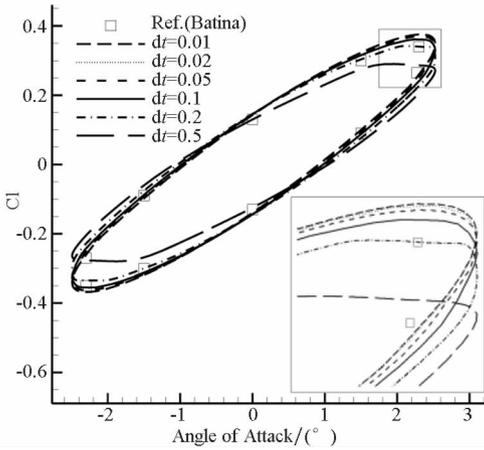


图 1 物理时间步长对计算精度的影响

Fig. 1 Influence of the physical time-step

表 1 不同物理时间步长的计算 CPU 时间对比

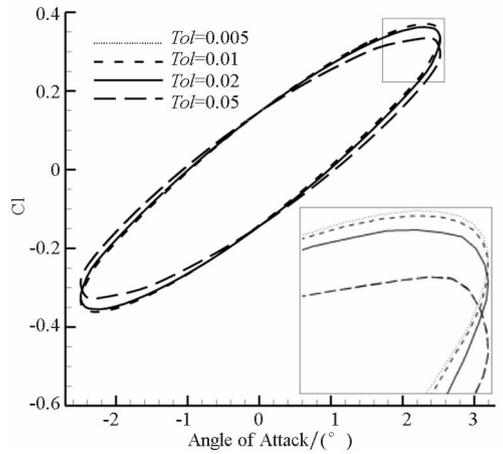
Tab. 1 Comparison of CPU time with different physical time-step

物理时间步长 $dt$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5
CPU 时间	3.54	2.6	1.52	1	0.63	0.31

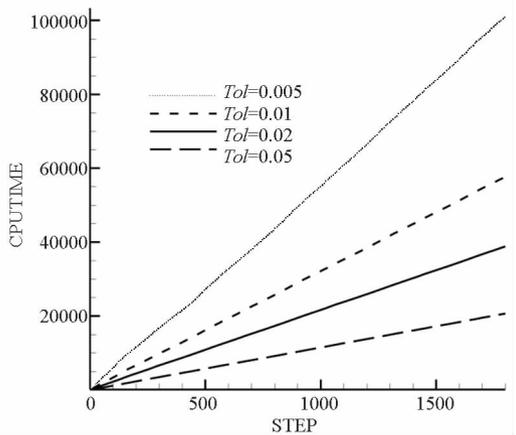
### 3.2.2 子迭代收敛判据的影响

图 2 是收敛判据  $Tol$  分别取 0.005、0.01、0.02、0.05 的计算结果,计算物理时间步长统一取 0.05,子迭代不给最大步数限制,使之达到收敛判据后才跳出。由图 2(a)可见,收敛判据取 0.01 和 0.005 的迟滞环几乎是重合的,也就是说收敛判据取 0.01 可以满足精度要求,再往小取就没什么意义了。相反地,收敛判据较大时,取 0.02 的曲线较 0.01 稍微有了些偏离,但还可以接受,而到了 0.05 时,迟滞曲线在最大攻角处有了明显变形,不能满足计算精度要求。

图 2(b)是不同收敛判据下的计算 CPU 时间比较,横轴是计算物理迭代步数,纵轴是计算 CPU 时间。可以看出,随着收敛判据的减小,计算 CPU 时间在不断增加,到计算结束 (step = 1800) 时,收敛判据 0.005 用了 100000 个 CPU 时间,收敛判据 0.01 只用了不到 60000 的 CPU 时间,几乎少了一半,而两者之间的计算精度却差异不大。从以上的分析中可以看到,采用高精度格式进行非定常计算时,子迭代收敛判据对计算精度和效率有重要影响。



(a) 对迟滞环计算精度的影响



(b) 对计算 CPU 时间的影响

图 2 收敛判据的影响

Fig. 2 Influence of inner iteration tolerance(Tol)

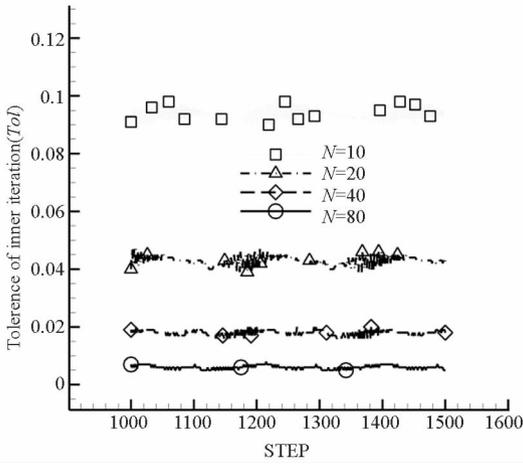
### 3.2.3 最大子迭代步数的影响

设定最大子迭代步数可以保证子迭代在无法达到收敛判据时同样能够跳出子迭代,以免计算陷入死循环,这是目前非定常计算常采用的方法。本节在最大子迭代步数分别取 10、20、40、80 的情况下采用 WCNS 格式模拟 NACA0012 翼型强迫俯仰振荡,时间步长统一取 0.1,并保证子迭代都达到最大子迭代步数才跳出,这样能够单方面研究子迭代步数对计算结果的影响。

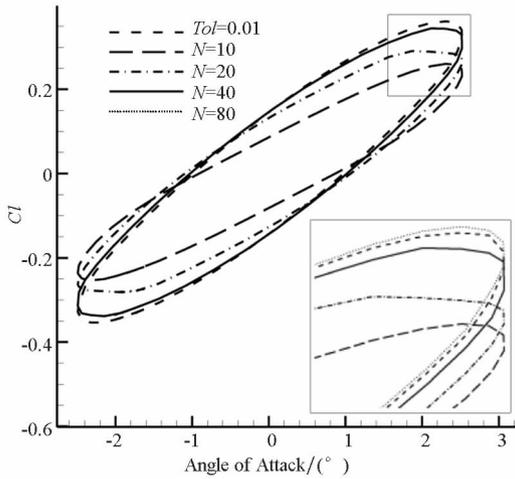
图 3(a)是 4 种不同子迭代步数的收敛水平比较。子迭代步数限制在 10 步时,对应子迭代残差收敛标准在 0.1 附近,随着子迭代步数增多,子迭代残差也收敛得越来越小,子迭代步数为 40 时,大致对应 0.02 的残差标准,子迭代步数限制在 80 步时,残差已收敛到 0.01 左右。

图 3(b)是不同子迭代步数的升力迟滞环的比较。图中  $Tol = 0.01$  与  $N = 80$  的曲线几乎重合,因为它们的残差收敛水平一样都是 0.01 左右(参考图 3(a))。随着子迭代步数的减少,残差收敛水平越来越差, $N = 20$  和  $N = 10$  的曲线已偏

离太大,不能满足计算精度。上述研究说明,在对实际问题计算时,子迭代步数限制标准对计算结果的影响是一个很重要的问题。



(a) 不同子迭代步数对应的收敛水平



(b) 对迟滞环计算精度的影响

图3 最大子迭代步数的影响

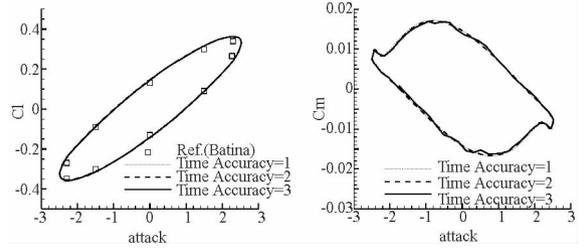
Fig. 3 Influence of the times of inner iteration

### 3.3 不同时间离散方法对高精度非正常计算的影响

空间项采用高精度 WCNS 格式离散时,时间导数的离散同样要保证较高的精度。对时间导数项分别用式(5a)、(5b)、(5c)给出的时间一阶、二阶、三阶后差格式离散,数值模拟 NACA0012 翼型强迫俯仰振荡,考查时间离散方法对计算结果的影响。

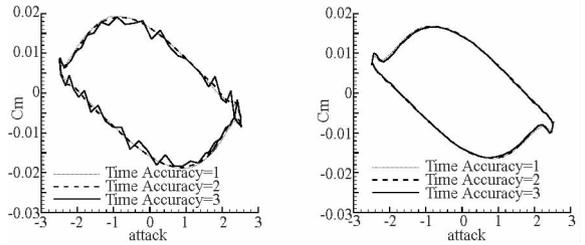
图4是在不同物理时间步长  $dt$  和收敛标准  $Tol$  下的计算结果。从图4(a)的升力迟滞环来看,控制方程时间导数项离散方法不同对计算结果的影响并不明显,三种离散方法迟滞环几乎重合。然而从俯仰力矩迟滞环来看,如图4(b)和4(c),三阶离散方法的计算曲线随  $dt$  增大出现不同程度的非物理振荡, $dt=0.1$  振荡较弱, $dt=0.2$

时振荡最为明显。如果保持图4(c)的其他计算条件不变,只把子迭代收敛标准提高到0.005,如图4(d),振荡现象则削弱很多。可见缩小物理时间步长或提高子迭代收敛标准能抑制时间高阶离散所引起的振荡问题(但会增加计算时间)。



(a) 升力迟滞环  $dt=0.1, Tol=0.01$

(b) 俯仰力矩迟滞环  $dt=0.1, Tol=0.01$



(c) 俯仰力矩迟滞环  $dt=0.2, Tol=0.01$

(d) 俯仰力矩迟滞环  $dt=0.2, Tol=0.005$

图4 时间离散方法不同对计算结果的影响

Fig. 4 Influence of time discretization accuracy on numerical results

另外,比较3种离散方法的计算 CPU 时间,由表2可见,一阶时间离散方法用时稍长一些,二、三阶时间离散方法用时较短。通过分析,其原因是在相同的收敛判据下( $Tol=0.01$ ),一阶离散方法计算子迭代步数较多,而二、三阶离散子迭代步数较少,这从图5可以得到验证(横轴为物理推进步数,纵轴为子迭代步数)。

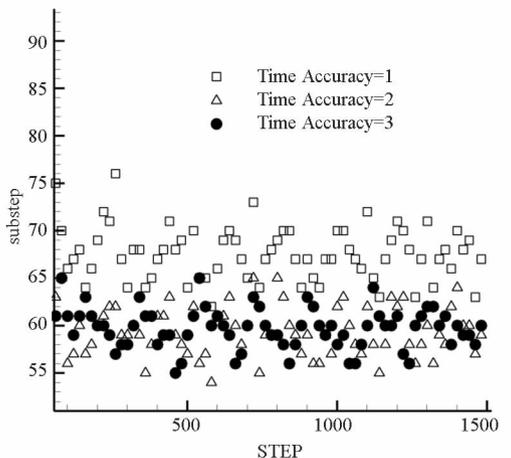


图5 时间离散方法不同时子迭代收敛步数的比较  
Fig. 5 Times of inner iteration for three time discretization methods ( $dt=0.1, Tol=0.01$ )

总体来看,在本文空间采用五阶精度 WCNS 格式离散条件下,时间导数项采用二阶格式离散在计算精度、稳定性以及计算效率上都较为理想。

表 2 不同时间离散方法的计算 CPU 时间对比

Tab.2 Comparison of CPU time with different time discretion accuracy( $dt=0.1$ ,  $Tol=0.01$ )

时间离散方法	一阶离散	二阶离散	三阶离散
CPU 时间	1.11	1.0	1.03

## 4 结论

本文基于空间五阶精度格式 WCNS,研究了高精度格式应用到非定常计算时,“双时间步”方法子迭代参数选取、子迭代收敛性和控制方程时间导数不同离散精度等问题。对高精度计算方法来说,物理时间步长过大会降低非定常计算精度,取得过分小会使计算周期延长,从而增加计算时间;时间步长增大同样会降低子迭代收敛能力。子迭代要达到一定的收敛水平才能满足计算精度的需要,超过这个限度后计算精度的提升不大,反而会使计算时间增加。基于空间五阶精度 WCNS 格式的时间离散方法研究表明:一阶离散方法计算收敛能力较差,计算效率稍低;三阶离散方法出现非物理振荡(提高子迭代收敛水平能够削弱这种振荡);而时间二阶离散方法从精度、效率等方面总体计算表现较好。

## 参考文献 (References)

[1] Jameson A. Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings [R].

AIAA Paper,1991:1596.

- [2] Hsu J M, Jameson A. An implicit-explicit hybrid scheme for calculating complex unsteady flows [R]. AIAA Paper, 2002:0714.
- [3] Deng X G, Mao M L. Weighted compact high-order nonlinear schemes for the Euler equations [R]. AIAA Paper, 1997:1941.
- [4] Batina J T. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes[R]. AIAA Paper,1989:0115.
- [5] 赵海洋,刘伟,任兵. 双时间隐式方法求解非定常绕流的相关问题[J]. 国防科技大学学报, 2005, 27(3): 25 - 29. ZHAO Haiyang, LIU Wei, REN Bing. The unsteady flow field calculation with a dual-time stepping method[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2005, 27(3): 25 - 29. (in Chinese)
- [6] Deng X G, Zhang H X. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2000, 165: 22 - 44.
- [7] Deng X G, Mao M L, Tu G H, et al. Extending weighted compact nonlinear schemes to complex grids with characteristic based interface conditions[J]. AIAA Journal 2010, 48(12): 2840 - 2851.
- [8] Deng X G, Mao M L, Tu G H, et al. Geometric conservation law and applications to high-order finite difference schemes with stationary grids[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230: 1100 - 1115.
- [9] Yoon S, Jameson A. Lower-upper symmetric Gauss-Siedel method for the Euler and Navier-stokes equations [J]. AIAA Journal, 1988, 26(9): 1025 - 1026.
- [10] 张毅锋. 高阶精度格式(WCNS)加速收敛和复杂流动数值模拟的应用研究[D]. 绵阳:中国空气动力研究与发展中心,2007. ZHANG Yifeng. Investigations of convergence acceleration and complex flow numerical simulation for high-order accurate scheme (WCNS) [D]. Mianyang: China Aerodynamics Research and Development Center, 2007. (in Chinese)