非均布应力场中内埋裂纹的应力强度因子*

袁杰红[1],孙鹏飞[1],段静波[2]
(1. 国防科技大学 指挥军官基础教育学院,湖南 长沙 410072;
2. 国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要: 在内埋裂纹线性线弹簧模型的基础上,通过引入二维权函数将裂纹面上的非均布载荷进行均布化等效,求解了中心内埋椭圆形裂纹在沿板厚非均匀分布应力场中的应力强度因子,列出了问题的奇异积分方程,利用 Gauss-Chebyshev 方法求解了在4种应力场分布情形下的数值结果,并与已有文献的解进行了比较,当 $a_0/c_0<0.4$、$a_0/h\leqslant0.3$ 时,两者结果具有较好的一致性,表明了本文方法的合理性和可靠性。

关键词: 线弹簧模型;中心内埋裂纹;非均布应力场;权函数;应力强度因子
中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2012)03-0044-04

The stress intensity factor of embedded cracks in non-uniform stress fields

YUAN Jiehong[1], *SUN Pengfei*[1], *DUAN Jingbo*[2]
(1. College of Basic Education for Commanding Officers, National University of Defense Technology, Changsha 410072, China;
2. College of Aerospace and Materials Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The stress intensity factor of a center embedded elliptical crack in non-uniform stress fields, which is along the thickness direction of the plate, is gained based on the linear line-spring model for embedded cracks. The two dimensional weight function is used to transform the non-uniform stress field to an equivalent uniform one. The singular integral equations are formulated and the numerical results in four cases of stress distributions are gained by Gauss-Chebyshev method. The results are in good accordance with those given in the previous literature when a0/c0 < 0.4、a0/h≤0.3, and the rationality and reliability of this method are demonstrated.

Key words: line-spring model; center embedded crack; non-uniform stress field; weight function; stress intensity factor

内埋裂纹(图1)是一种常见的未穿透裂纹,如结构中的气孔、夹渣等缺陷都可能发展为内埋裂纹,并且其裂纹面常受到残余应力等复杂载荷的作用,应力场的非均布性使得内埋裂纹应力强度因子的求解更加困难。对于非均布应力场中的裂纹问题,有限元法和权函数法是目前比较有效的手段。计算量大、费用高和准备工作复杂等问题限制了有限元法的应用推广,而对于权函数法,虽然有一系列的报道[1-3],但是三维裂纹问题的权函数求解复杂,不便于工程实际应用。

线弹簧模型最初由 Rice 等[4]提出,用于计算表面裂纹应力强度因子,袁杰红等[5]将其推广至内埋裂纹问题的求解,建立了在远场作用拉伸和弯曲载荷时无限平板内埋裂纹的线性线弹簧模型,但是对于裂纹面承受非均布载荷的情况,则不能直接应用该模型求解。鉴于权函数法求解非均布应力场中裂纹问题的独特优势,如果将线弹簧模型和权函数法相结合,则有望求解非均布应力场中的内埋裂纹问题。本文在无限平板内埋裂纹线性线弹簧模型[5]的基础上,通过引入二维权函数将沿板厚非均匀分布的应力场进行等效处理,求解了中心内埋椭圆形裂纹在沿板厚非均匀分布应力场中的应力强度因子,给出了相应的数值结果,并通过与文献[1]的比较,验证了本文方法的正确性。

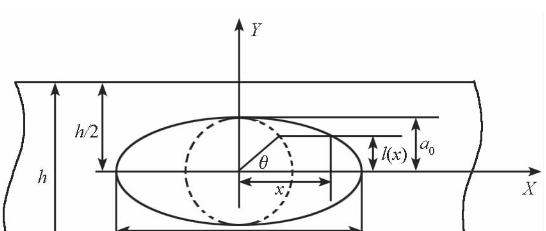
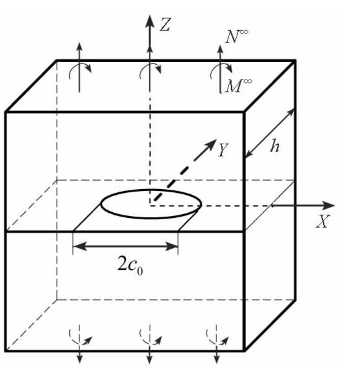


图1 中心内埋裂纹示意图
Fig. 1 A center embedded elliptical crack

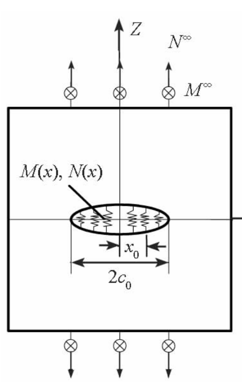
* 收稿日期:2011-06-09
作者简介:袁杰红(1965—),男,湖南长沙人,教授,博士,硕士生导师,E-mail: yjh210048@163.com

1　无限平板内埋裂纹线性线弹簧模型描述

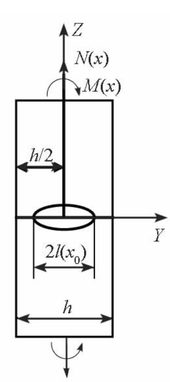
如图 1 和图 2(a)所示,在无穷远处单位宽度上作用有外力 N^∞ 和外力矩 M^∞ 的内埋椭圆形裂纹(a_0、c_0 分别为短轴和长轴半长)的无限平板,可以转化为裂纹面上作用有线弹簧的长度为 $2c_0$ 的穿透裂纹平板(图 2(b))。线弹簧的本构关系可由相应位置的平面应变边裂纹板条所受的广义力和由于裂纹存在引起的附加广义位移的关系来确定(图 2(c));内埋裂纹前缘各点的应力强度因子等于相应位置的内裂纹板条的应力强度因子。这样,求解无限平板内埋裂纹问题便转化为求解穿透裂纹平板问题和一个作用有弹簧$N(x)$、$M(x)$力的内裂纹板条问题,它们都是二维问题。由前者可获得平板性能方程,由后者可得到线弹簧本构关系表达式,两者联立后,可得到内埋裂纹问题的解。



(a)



(b)



(c)

图 2　内埋裂纹线弹簧模型

Fig. 2　The line-spring model of embedded cracks

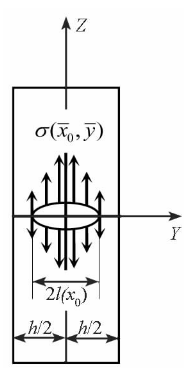
2　非均布应力场的处理

对于在远场作用载荷 N^∞ 和 M^∞,在裂纹面作用非均布载荷 $\sigma(\bar{x},\bar{y})$($\bar{x}=\dfrac{x}{c_0}$,$\bar{y}=\dfrac{y}{h}$ 均为无量纲坐标,h 为板厚)的中心内埋裂纹,上述线弹簧模型由于非均布载荷的存在而不能直接应用,但由上节的描述可知,内埋裂纹前缘各点的应力强度因子等于相应位置的内裂纹板条的应力强度因子。那么,可以取在 $\bar{x}=\bar{x}_0$ 处(图2(b),$|\bar{x}_0|\leqslant 1$,$\bar{x}=x/c_0$,$\bar{x}_0=x_0/c_0$)平行于 YOZ 面的一内裂纹板条(图 2(c))进行研究。在线弹性范围内,根据叠加原理可将内裂纹板条的应力强度因子分为两部分求解:一部分是由远场载荷 N^∞ 和 M^∞ 引起的;另一部分是由非均布载荷 $\sigma(\bar{x}_0,\bar{y})$ 引起的。

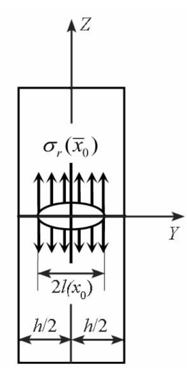
如图 3(a) 所示为在裂纹面上作用有关于 Y 轴和 Z 轴对称但非均匀分布应力 $\sigma(\bar{x}_0,\bar{y})$ 的内裂纹板条,根据权函数理论,当$\dfrac{l(\bar{x}_0)}{h}\leqslant 0.3$ 时,其应力强度因子可由下式[6] 获得:

$$K_I = f\sigma_0\sqrt{\pi l(\bar{x}_0)} \tag{1}$$

其中,$f=\int_0^\xi \dfrac{\sigma(\bar{x}_0,\bar{y})}{\sigma_0}\sqrt{\dfrac{h}{\pi\xi}}m(\bar{y},\xi)\,\mathrm{d}\bar{y}$,$m(\bar{y},\xi)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi\xi h}}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}\tan\pi\xi\right)$ 为权函数,σ_0 为原点处应力值,$\xi=\dfrac{l(\bar{x}_0)}{h}$,$l(\bar{x}_0)=a_0\sqrt{1-(\bar{x}_0)^2}$,$\bar{y}=y/h$,$h$ 为板厚。



(a)



(b)

图 3　内裂纹板条示意图

Fig. 3　The slice with a center embedded crack

对于作用均布应力场 $\sigma_r(\bar{x}_0)$ 的内裂纹板条(图 3(b)),其应力强度因子的表达式为

$$K_I = \sigma_r(\bar{x}_0)\sqrt{\pi l(\bar{x}_0)}\cdot\sqrt{\sec\frac{\pi l(\bar{x}_0)}{h}} \tag{2}$$

如果 $\sigma_r(\bar{x}_0)$ 和 $\sigma(\bar{x}_0,\bar{y})$ 两者引起的应力强度因子相等,那么 $\sigma_r(\bar{x}_0)$ 就可以作为非均布应力场 $\sigma(\bar{x}_0,\bar{y})$ 的等效均布应力场。令式(1) 和式(2) 相等,可得等效关系式为

$$\sigma_r(\bar{x}_0) = f\sigma_0\sqrt{\cos\pi\xi} \tag{3}$$

其中,f、σ_0 和 ξ 均如前所指。这样处理后,由 $\sigma(\bar{x}_0,\bar{y})$ 引起的应力强度因子便可等效为由均布应力场 $\sigma_r(\bar{x}_0)$ 引起。

由于 x_0 具有一般性，那么当 $|x| \leqslant 1$ 时，式(3)可以写成

$$\sigma_r(\bar{x}) = f\sigma_0\sqrt{\cos\pi\xi} \tag{4}$$

其中，$f = \int_0^{\xi}\frac{\sigma(\bar{x},\bar{y})}{\sigma_0}\sqrt{\frac{h}{\pi\xi}}m(\bar{y},\xi)\mathrm{d}\bar{y}$，$m(\bar{y},\xi)$ 如前所指，$\xi = \frac{l(\bar{x})}{h}$，$l(\bar{x}) = a_0\sqrt{1-\bar{x}^2}$。

3　非均布应力场中内埋裂纹的应力强度因子

将非均布应力场 $\sigma(\bar{x},\bar{y})$ 等效为均布应力场 $\sigma_r(\bar{x})$ 后，根据Bueckner等效原则，$\sigma_r(\bar{x})$ 便可以和远场作用的载荷 N^∞ 和 M^∞ 进行叠加，根据文献[5]可直接写出求解非均布应力场中内埋裂纹应力强度因子的无量纲形式的奇异积分方程

$$\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\bar{t}-\bar{x}}+k_{11}(\bar{x},\bar{t}) & k_{12}(\bar{x},\bar{t})\\ k_{21}(\bar{x},\bar{t}) & \frac{3}{\bar{t}-\bar{x}}+3k(\bar{x},\bar{t})+k_{22}(\bar{x},\bar{t})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu_1(\bar{t})\\ \frac{\mu_2(\bar{t})}{6}\end{Bmatrix}\mathrm{d}\bar{t} = -\frac{2\pi}{E}\begin{Bmatrix}\sigma_M^\infty+\sigma_r(\bar{x})\\ \frac{c_0}{h}\sigma_B^\infty\end{Bmatrix} \tag{5}$$

其中，$k(\bar{x},\bar{t})$、$k_{i,j}(\bar{x},\bar{t})$，$i,j=1,2$ 为已知核函数，E 为弹性模量，c_0 为裂纹长轴半长，h 为板厚，$\mu_1(\bar{t})$、$\mu_2(\bar{t})$ 为未知位错密度函数，$\bar{t}=t/c_0$，$\bar{x}=x/c_0$，$\sigma_M^\infty = N^\infty/h$，$\sigma_B^\infty = 6M^\infty/h^2$，$\sigma_r(\bar{x}) = f\sigma_0\sqrt{\cos\pi\xi}$ 为等效均布应力场，其他均如前所指。

利用Gauss-Chebyshev方法[7]求解方程(5)的基本未知量 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$。之后，通过平板性能方程[5]和内埋裂纹板条应力强度因子的表达式[5]就可求得坐标为 $\bar{x}_k$（$\bar{x}_k$ 为Chebyshev多项式零点）点处的线弹簧内力和裂纹前缘对应点的应力强度因子。为能得到裂纹前缘任意点的应力强度因子，可对所得对应 $\bar{x}_k$ 的应力强度因子作多项式拟合。

4　数值结果及分析

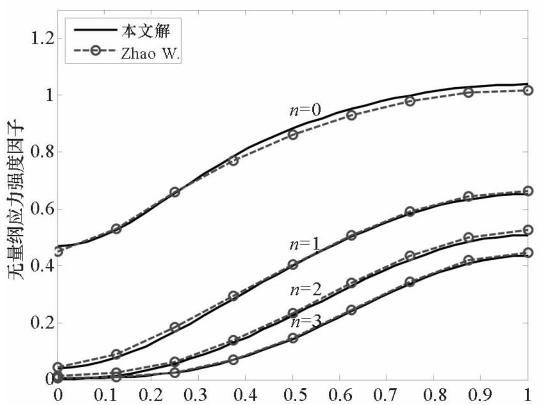
令远场拉伸力和弯矩为零，并假设非均布载荷的分布规律为 $\sigma(\bar{x},\bar{y}) = \sigma_0\left(\frac{\bar{y}}{\bar{a}_0}\right)^n$（$\sigma_0$ 为原点处应力值，$\bar{y}=\frac{y}{h}$，$\bar{a}_0=\frac{a_0}{h}$）。本文分别计算了在 $n=0,1,2,3$ 四种情形下，不同 a_0/c_0 及 a_0/h 的中心内埋裂纹的应力强度因子，为了与文献[1]的解进行对比，把对应力强度因子 K_I 无量纲化：

$$\bar{K}_I = \frac{K_I}{\left(\sigma_0\sqrt{\frac{\pi a_0}{Q}}\right)} \tag{6}$$

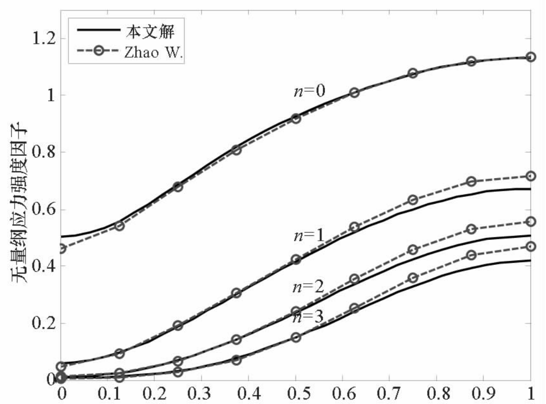
其中，$Q = 1+1.464(a_0/c_0)^{1.65}$ 为裂纹形状因子。

需要指出的是文献[1]计算的为有限宽板，c_0/b（b 为板宽）的值取为0.1。计算时取泊松比 $v=0.3$，计算结果及对比情况如图4(a)～(f)所示。

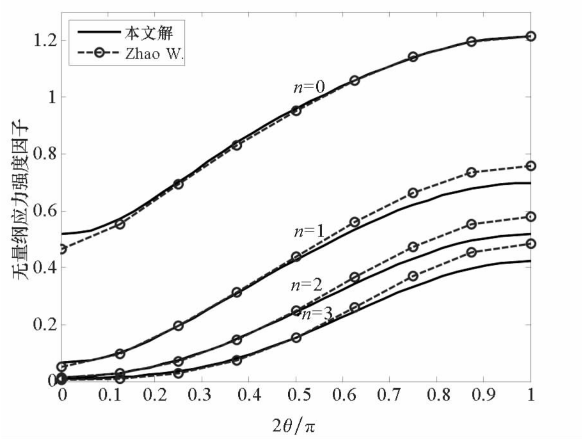
图4(a)～4(f)表示在四种不同的载荷分布形式下，几种中心内埋椭圆裂纹前缘各点(以椭圆参数角 θ 表示，图1)应力强度因子的变化规律。可以看出，本文与文献[1]的结果有完全相同的变化趋势。且在 $a_0/c_0<0.4$、$a_0/h\leqslant 0.3$ 时，两者的结果具有较好的一致性；随着 a_0/c_0 的增大，两者相对误差有所增大，这是各线弹簧之间由于裂纹前缘曲率引起相互作用造成的，且这种相互作用随 a_0/c_0 的增大而增大，而线弹簧本身并没有考虑此种相互作用。此外，文献[1]中有限板宽的影响也是不可忽略的因素。



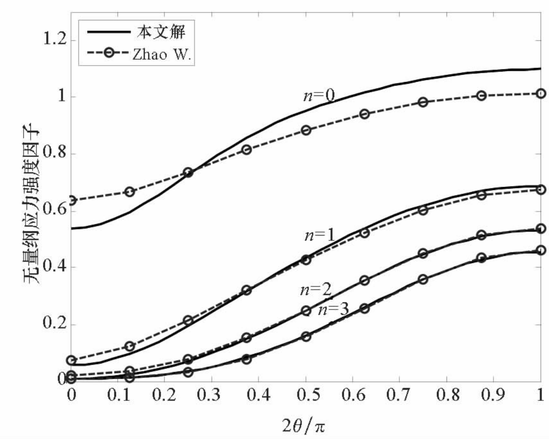
(a) $a_0/c_0=0.2$　$a_0/h=0.1$



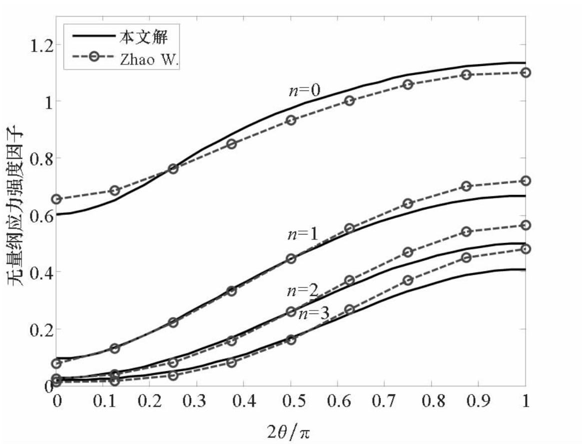
(b) $a_0/c_0=0.2$　$a_0/h=0.25$



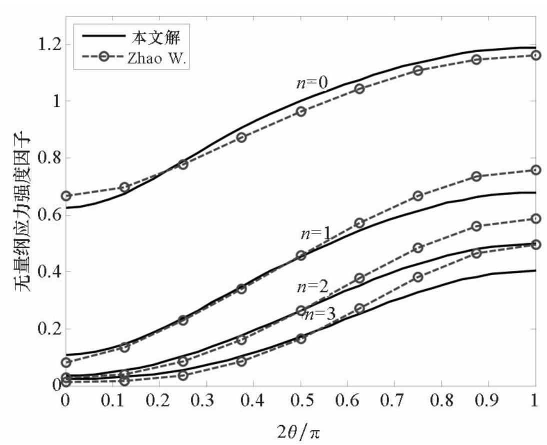
(c) $a_0/c_0=0.2$　$a_0/h=0.3$



(d) $a_0/c_0=0.4$　$a_0/h=0.1$



(e) $a_0/c_0=0.4$　$a_0/h=0.25$



(f) $a_0/c_0=0.4$　$a_0/h=0.3$

图 4　中心内埋裂纹应力强度因子

Fig. 4　The stress intensity factors of the center embedded crack

5　结　论

(1) 计算结果表明:本文所建立的非均布应力场中内埋裂纹应力强度因子的求解方法是合理可靠的;

(2) 受所引用权函数适用范围的限制,本文方法的适用对象为沿板厚非均布应力场中 $a_0/c_0<0.4$、$a_0/h\leqslant 0.3$ 的中心内埋椭圆裂纹,但是这已经覆盖了工程实际中的大多数情况,且有足够的精度;

(3) 本文利用线弹簧模型将三维问题转化为二维问题,计算量小、编程方便,适合于工程实际应用。

参考文献(References)

[1] Zhao W, Wu X R, Yan M G. Weight function method for three dimensional crack problems-I. basic formulation and application to an embedded elliptical crack in finite plates [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1989, 34(3): 593 - 607.

[2] Wang X, Lambert S B, Glinka G. Approximate weight functions for embedded elliptical cracks [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1998, 59: 381 - 392.

[3] Krasowsky A J, Orynyak I V, Gienko A Y. Approximate closed form weight function for an elliptical crack in an infinite body [J]. International Journal of Fracture, 1999, 99: 117 - 130.

[4] Rice J R, Levy N J. The part-through surface cracks in an elastic plate [J]. Journal of Applied Mechanics, 1972, 39: 185 - 194.

[5] 袁杰红, 唐国金, 周建平, 等. 无限平板内埋裂纹线弹簧模型[J]. 固体力学学报, 1999, 20(1): 69 - 75.
YUAN Jiehong, TANG Guojin, ZHOU Jianping, et al. The line-spring model for embedded crack in an infinite plate [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1999, 20(1): 69 - 75. (in Chinese)

[6] Wu X R. Approximate weight functions for center and edge cracks in finite bodies [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1984, 20(1): 35 - 49.

[7] Erdogan F, Gupta G D. On the numerical solution of singular integral equations [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1972, 29: 525 - 534.