

战争设计工程中专家思维收敛过程的建模与分析*

王长春, 陈俊良, 陈超

(国防科学技术大学 信息系统工程重点实验室, 湖南 长沙 410073)

摘要: 专家意见能否达成共识是战争设计工程中的一个关键问题。首先从复杂理论视角对专家思维过程的适应性、聚集性、非线性进行分析,接着将专家群体划分为两类并且运用马尔科夫转移矩阵对研讨过程建模,提出并证明了两类专家群体思维收敛的充分必要条件,得到群体思维收敛不仅与研讨过程中专家之间的关系影响矩阵有关,而且与专家的初始意见有关。最后通过计算机仿真进一步探索了群体思维收敛过程的影响因素。

关键词: 战争设计工程;关系矩阵;马尔科夫链;共识

中图分类号: E917, C934 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2012)03-0074-06

Modeling and analysis of the experts thought convergence in war design engineering

WANG Changchun, CHEN Junliang, CHEN Chao

(Science and Technology on Information Systems Engineering Laboratory, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Expert's opinion consensus is one of key problems in the War Design Engineering. Firstly, the characteristics of experts thought, such as adaptive, cluster and non-linear, are analyzed from the view of complex theory. According to their interactive relationship, experts are divided in to two categories, and the convergence process is modeled by Markov transmission matrix. Then, the necessary and sufficient conditions of reaching consensus for each category experts are presented and proved. It ends with the conclusion that the condition of experts thought convergence is not only relative to interactive relationship matrix, but also the primal opinion of expert. Finally, some propositions are verified by computer simulation.

Key words: war design engineering; relationship matrix; Markov chain; consensus

战争是打出来的,也是设计出来的^[1]。为应对战争中的各种复杂性,2005年沙基昌教授提出了战争设计工程方法,其中专家群体是一个重要组成部分。但是由于专家知识背景,对问题看法价值观不同,使得众多专家意见是否具有收敛性,或者说群体思维能否达成共识是一个值得研究的问题。

目前对群体思维问题研究主要集中在以下3个问题。(1)群体思维收敛的调控,调控方法主要分为两类:一类是改变决策者权重以达成共识,如, Ben-Arieh, Chen 在综合前人研究的基础上^[2],提出决策者在不改变意见的条件下,通过改变相关决策者权重的调控过程;另一类是改变专家的评价意见形成共识,如顾基发, Herrera-Viedma, 王丹力通过个体一致性指标识别出成员意见分歧程度,引导个体修改其观点,若群体一致性指标大于或等于给定阈值时,研讨过程结束^[3-5]。(2)群

体思维的演化动力学。用连续或离散变量表示群体中个体的意见,通过设计个体之间的交互规则,分析群体思维的演化规律。如 Hegslmann 基于个体有限理性的交互规则^[6],分析比较了算术平均、几何平均、调和平均3种迭代机制下群体观点的演化规律; Weisbuch 基于邻居效应的交互规则^[7],分析了网络结构、个体理性阈值对群体思维演化的影响。(3)群体思维收敛条件。De Groot 首先运用向量表示群体的初始意见^[8],用左乘随机矩阵表示群体思维的迭代、反馈过程,提出并证明了群体思维收敛的条件。随后,许多研究者对该模型进行了扩展^[9-13],如: Gilardoni 对比研究了线性集结算子和对数集结算子对群体思维收敛的影响^[11],分析并证明这两种意见集结方法在理论上是等价的。Chatterjee 进一步推导了迭代矩阵随时间改变时群体思维的收敛条件^[13]。国内对群体思维收敛条件的定量研究较少,如:董

* 收稿日期:2011-09-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71101149)

作者简介:王长春(1983—),男,江西吉安人,博士研究生, E-mail:wcc198324@163.com;

陈超(通信作者),男,讲师,博士, E-mail:changshacc@163.com

玉成证明了当专家数足够多的时候^[14],加权几何平均综合判断矩阵与加权算术平均综合判断矩阵依概率收敛到客观排序向量。尽管对群体思维收敛条件研究已有一些结论,但是这些理论忽略了群体初始意见对思维收敛的影响。

1 战争设计工程中专家研讨过程分析

战争设计工程中的专家群体研讨是战争设计专家团队针对战争设计的目标,围绕装备与战法策略进行的研究讨论,并对装备与战法策略设计的合理性与正确性进行的思辨性论证。专家群体研讨是群体成员知识、经验相互交流的过程,是思维相互碰撞、主意相互激发的过程,是群体思辨与论证的过程,也是群体成员相互学习的过程。在群体专家研讨过程中,涉及多个领域的专家,他们面对一个共同的主题时可能有不同的意见,为了达成共识,需要进行多轮迭代与反馈,如图1所示。

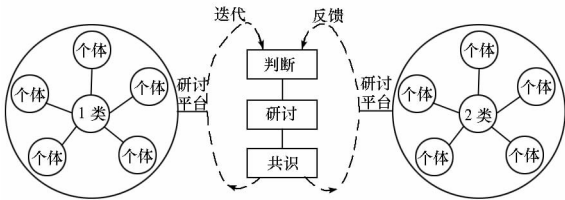


图1 专家群体共识形成过程

Fig. 1 The consensus process of experts thought

专家群体研讨是一个动态系统,其复杂性主要表现在:

(1) 专家群体研讨的适应性

群体专家对战争问题的认识是一个不断改进、不断深化、旋进式收敛的过程。专家群体研讨的目的是达成共识,基于这样的假设,本文认为在研讨过程中专家会根据其他专家的意见来变换和调整自己的判断,并且得到群体思维收敛不仅与研讨过程中专家之间的关系影响矩阵有关,而且与专家的初始意见有关。

(2) 专家群体研讨的聚集性

聚集是复杂适应系统的一个基本特征,是指个体通过一定的条件,利用某种方式形成一个具有一定边界的更大个体的行为。一方面,专家通过某种组织形式聚集成为上层主体,上层主体又能够聚集成为更上层主体,组成复杂适应系统典型的层次结构。另一方面,专家在交互地学习和积累经验的过程中,各主体不断调整其结构和行为方式,持相同或相似意见的专家会形成小群体。本文用循环类来表示这种群体专家属性。

(3) 专家群体研讨的非线性

专家群体研讨的非线性是指决策主体的行为不是简单地叠加成为整个系统的行为,一个变量的微小变化对其他变量具有不成比例、甚至无法预测的影响。这主要体现在两个方面:首先是构成专家群体的成员要素,即决策主体的思想和决策能力,不具有可加性。其次,在专家群体研讨中通常都是由许多子系统组成,不同层次的子系统之间相互关联,相互制约,以某种或多种方式发生着复杂的非线性相互作用。

2 专家思维收敛过程模型

战争设计工程中专家研讨过程是一个动态的、非线性的演化过程。本文以专家群体对某一未知变量判断为背景(如:某型号导弹命中目标的概率),用专家的判断值来表示专家的思维,对其交互和收敛过程进行分析建模。为了明确研究问题,提出如下假设。

假设1 战争设计工程研讨的初始阶段,专家*i*的对某未知参数的判断为 $F_i^{(0)}$,*k*个专家群体的初始判断向量为 $\mathbf{F} = (F_1^{(0)}, F_2^{(0)}, \dots, F_k^{(0)})^T$ 。

假设2 第一轮研讨后,专家*i*的判断值调整为 $F_i^{(1)} = \sum_{j=1}^k a_{ij} F_j^{(0)}$,其中 a_{ij} 表示在研讨过程中专家*i*对专家*j*赋予的权重系数,可以用来反映专家*i*对专家*j*判断的信任和支持程度,且 $\sum_j a_{ij} = 1$ 。经*n*次研讨后,专家*i*判断值调整为: $F_i^{(n)} = \sum_{j=1}^k a_{ij} F_j^{(n-1)}$ 。

因此,战争设计工程中群体思维收敛过程可表示成为: $\mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{F}^{(n-1)} = \mathbf{A}^n \mathbf{F}^{(0)}$,其中影响矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{A}^n = (a_{ij}^n)$, $i, j = 1, 2, \dots, k$,用来描述研讨过程中专家之间的影响关系,它由专家在研讨中的地位 and 专家观点的可信度来确定。

定义1 根据迭代过程中权重系数的性质来划分研讨过程中专家之间的关系。如果存在某个正整数 $n \geq 1$,使得 $a_{ij}^n > 0$,则在研讨过程中专家*j*的观点对专家*i*的判断有影响。同理,如果不存在 $n \geq 1$,使得 $a_{ij}^n > 0$ 成立,则在研讨过程中专家*j*的观点对专家*i*的判断没有影响。

定义2 如果研讨过程中群体中所有专家之间都存在着相互影响,那么该群体称为第一类专家群体;如果群体中存在着两个专家,在研讨过程中他们之间没有影响,那么该群体称为第二类专家群体。

定义3 随着研讨过程的推进,专家观点一直在反馈和调整,如果 $\mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{F}^{(n-1)}$,那么专家群

体达成共识,或者说群体思维收敛。

根据以上定义,借鉴马尔科夫相关理论,容易得到第一类专家群体影响矩阵的周期 $d = 1$,且它是第二类专家群体的特例。为此我们重点分析第二类专家群体思维收敛过程。根据 Frobenius 理论,第二类专家群体的影响矩阵通过置换变换^[15],可以划分为 m 个循环类,每个循环类又可分为 d_i 个子类。其中, P_i 是 $m_i \times m_i$ 矩阵, P_{ij} 为 $m_{ij} \times m_{i(j+1)}$ 矩阵, d_i 为矩阵 P_{ij} 的周期。

$$A = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_m \end{bmatrix}, \text{其中,}$$

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & P_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_{i2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{id_{i-1}} \\ P_{id_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}。$$

对于 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, d_i$, 令 A_{ij} 表示 $m_{ij} \times m_{ij}$ 矩阵, 且 $A_{ij} = P_{ij} \cdot P_{i(j+1)} \cdots P_{id_i} \cdot P_{i1} \cdots P_{i(j-1)}$, 那么

$$P_i^{d_i} = \begin{bmatrix} A_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{i1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{id} \end{bmatrix}$$

假设 $\pi(i, j) = (\pi(i, j)_1, \dots, \pi(i, j)_{m_{ij}})$ 为线性方程组 $\pi(i, j)A_{ij} = \pi(i, j)$, $\sum_{l=1}^{m_{ij}} \pi(i, j)_l = 1$ 的解。因为 P_{ij} 为不可约非周期矩阵, 所有 A_{ij} 也是不可约非周期矩阵, 进而得到线性方程组的解 $\pi(i, j)$ 存在且唯一。

3 专家思维收敛模型分析

3.1 专家思维收敛条件

命题 1: 对于第一类专家群体, 无论群体的初始观点是什么, 群体研讨最终都能够收敛。

证明: 首先证明第一类专家群体循环迭代 n 次后, 关系影响矩阵每一列的最小元素随着 n 的增加而增大, 每一列的最大元素随着 n 的增加而减小。

假设在循环迭代 n 次后的关系影响矩阵中, 第 j 列中的最小元素是 $\min_i a_{ij}^n = m_j(n)$, 第 j 列中的最大元素是 $\max_i a_{ij}^n = M_j(n)$ 。由切尔曼 - 科尔莫科洛甫方程, 得到

$$a_{ij}^n = \sum_k a_{ik} a_{kj}^{n-1} \geq \sum_k a_{ik} m_j(n-1) = m_j(n-1) \tag{1}$$

其中, $m_j(n) \geq m_j(n-1)$ 。同理可以得到

$$a_{ij}^n = \sum_k a_{ik} a_{kj}^{n-1} \leq \sum_k a_{ik} M_j(n-1) = M_j(n-1),$$

其中, $M_j(n) \leq M_j(n-1)$ 。

接着证明循环迭代 n 次后关系影响矩阵每一列的最小元素和最大元素, 随着 n 的增加趋于同一极限。即 $M_j(n), m_j(n)$ 趋于同一极限。运用马尔科夫链中的相关概念, 设从 i_0 经 n 步到达 j 的转移概率是 $m_j(n)$, 从 i_1 经 $n-1$ 步到达 j 的转移概率是 $M_j(n-1)$ 。则有

$$\begin{aligned} m_j(n) &= a_{i_0 j}^{(n)} = \sum_k a_{i_0 k} a_{kj}^{(n-1)} \\ &= \varepsilon a_{i_0 j}^{(n-1)} + (a_{i_0 i_1} - \varepsilon) a_{i_1 j}^{(n-1)} + \sum_{k \neq i_1} a_{i_0 k} a_{kj}^{(n-1)} \\ &\geq \varepsilon M_j(n-1) + [a_{i_0 i_1} - \varepsilon + \sum_{k \neq i_1} a_{i_0 k}] \cdot m_j(n-1) \end{aligned} \tag{2}$$

因此, $m_j(n) \geq \varepsilon M_j(n-1) + (1 - \varepsilon) m_j(n-1)$ 。

同理, 设从 i'_0 经 n 步到达 j 的转移概率是 $M_j(n)$, 从 i_2 经 $n-1$ 步到达 j 的转移概率是 $m_j(n-1)$, 则有

$$\begin{aligned} M_j(n) &= a_{i'_0 j}^n = \sum_k a_{i'_0 k} a_{kj}^{n-1} \\ &= \varepsilon a_{i'_0 j}^{n-1} + (a_{i'_0 i_2} - \varepsilon) a_{i_2 j}^{n-1} + \sum_{k \neq i_2} a_{i'_0 k} a_{kj}^{n-1} \\ &\leq \varepsilon m_j(n-1) + [a_{i'_0 i_2} - \varepsilon + \sum_{k \neq i_2} a_{i'_0 k}] \cdot M_j(n-1) \end{aligned} \tag{3}$$

所以, $M_j(n) \leq \varepsilon m_j(n-1) + (1 - \varepsilon) M_j(n-1)$, 由此得到

$$M_j(n) - m_j(n) \leq (1 - 2\varepsilon) [M_j(n-1) - m_j(n-1)] \leq (1 - 2\varepsilon)^{n-1}$$

进一步可以得到, 当 $n \rightarrow \infty, M_j(n) = m_j(n)$ 。这就证明了当群体为第一类专家群体时, 群体专家思维最终可以收敛。

命题 1 说明当专家群体为第一类群体时, 无论群体的初始判断差异有多么大, 最终都能达成共识。这个结论一方面揭示了群体专家之间的影响关系对群体思维收敛过程起着十分关键的作用; 另一方面从理论上解释了目前通过识别共识度调控专家判断的方法肯定能够收敛。因为一旦发现判断有较大差异的专家, 要么调整其判断值, 要么降低其影响权值。

命题 2: 对于第二类专家群体, 群体思维收敛的充分必要条件是: 对于任意 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, d_i$, 都有 $\pi(i, j)F(i, j) = F^*$ 。

必要性: 当专家群体达成共识时, 即对于群体

中任意一个专家 $l, \lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(n)} = F^*$ 都成立。假设 l 为群体第 i 循环类第 j 子类专家, 根据上文定义可知 $\pi(i, j) = (\pi(i, j)_1, \dots, \pi(i, j)_{m_{ij}})$ 为线性方程组 $\pi(i, j)A_{ij} = \pi(i, j)$ 的解, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_l^{d_i})^{(n)} = \pi(i, j)$, 进而 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(nd_i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_l^{(nd_i)} F = \pi(i, j) F(i, j)$, 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(nd_i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(n)} = F^*$, 故 $\pi(i, j) F(i, j) = F^*$ 。

充分性: 对任意 $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, d_i$, 满足 $\pi(i, j) F(i, j) = F^*$, 下面要证明对于群体中任意一个专家 $l, \lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(n)}$ 存在且等于 F^* 。假设 l 为第 i 循环类第 j 子类的专家, 由上节定义可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_l^{(nd_i)}$ 存在。对于 $r = 0, \dots, d_i - 1, \lim_{n \rightarrow \infty} P_l^{(nd_i+r)} = P_l^{(r)} \lim_{n \rightarrow \infty} P_l^{(nd_i)}$ 存在并且等于 $P_l^{(*)}(r) = (\mathbf{0} \pi(i, j + r) \mathbf{0})$, 进一步可以得到: $\lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(nd_i+r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_l^{(nd_i+r)} F = \pi(i, j + r) F(i, j + r) = F^*$ 。这就证明了对于每一个 $\{nd_i + r\}$ 的子序列 $r = 0, \dots, d_i - 1, \lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(nd_i+r)}$ 极限都存在且收敛于 F^* , 因此得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_l^{(n)}$ 也收敛于 F^* 。

命题2说明对于第二类专家群体, 群体思维收敛的条件不仅与专家之间的影响矩阵有密切关系, 而且与群体专家的初始意见有关。在实际研讨过程中, 属于第二类专家群体的情况更加普遍。该结论启示我们在选择专家时, 为了达成共识, 不仅要考虑专家观点的相似性, 而且需要考虑群体专家的适应性。如果某个专家太固执、或者学习能力较差, 那么该群体研讨很难取得共识。

3.2 示例

下面通过一个例子来对上面的理论进行说明。假设由7个专家组成的第二类群体, 研讨过程中的影响矩阵为 P , 且在研讨过程中关系矩阵不改变^[11]。根据 P 的属性, 将专家群体划分为 P_1 和 P_2 两个循环类。

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$, 运用上文的定义, 第一个循环类 P_1 的相关参数为

第一个循环类 $P_1 = P_{11} = A_{11} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$, 进一步可以通过求解方程组

$\Pi(1, 1)A_{11} = \Pi(1, 1)$, 及 $\sum_{l=1}^3 \Pi(1, 1)_l = 1$ 得到 $\Pi(1, 1) = (4/11, 3/11, 4/11)$ 。

对于第二个循环类 $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & P_{21} \\ P_{22} & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $P_{21} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$, $P_{22} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, 运用上文定义, 得到: $A_{21} = \begin{bmatrix} 5/12 & 7/12 \\ 11/24 & 13/24 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$ 。

与上述方法类似, 通过求解方程组得到: $\Pi(2, 1) = (11/25, 14/25)$, $\Pi(2, 2) = (9/25, 16/25)$ 。因此, 该群体在研讨过程中, 群体思维收敛的充要条件为:

$$4/14F_1 + 3/14F_2 + 7/14F_3 = 11/25F_4 + 14/25F_5 = 9/25F_6 + 16/25F_7$$

4 仿真实验及结果分析

将群体专家的意见用连续变量 F_i 来表示, 专家之间的交互、迭代关系用马尔科夫转移矩阵 $A = (a_{ij})$ 来表示, 那么群体专家的研讨过程中的思维收敛过程可以表示为 $F^{(m)} = A^{(m)} F^{(0)}$ 。其中, $a_{ij} = \begin{cases} 1/\#X(i, F), & \text{if } j \in X(i, F) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, $X(i, F)$ 表示满足 $X(i, F) = \{ \|F_j - F_i\| \leq \varepsilon \}$ 所组成的专家集合, $\#X(i, F)$ 表示集合中专家的数量。运用 Matlab 仿真平台对群体思维的演化过程进行仿真。

(1) 影响矩阵对群体思维收敛影响

在专家研讨过程中, 关系影响矩阵直接影响到思维收敛情况, 本文在固定群体初始意见的前提下, 通过调整仿真实验的输入参数, 使得影响矩阵分别有3个循环类, 2个循环类和1个循环类, 其对应的仿真结果如图2所示。

图2的仿真结果显示, 当关系影响矩阵有3个循环类时, 群体专家研讨结束时有4种不同的观点; 当影响矩阵有2个循环类时, 群体专家研讨结束时有两种不同观点; 当影响矩阵有1个循环类时, 群体专家将达成共识。这组实验说明群体研讨过程中专家之间的影响矩阵对群体思维收敛具有十分重要的作用, 且影响矩阵循环类越少, 越容易

取得共识。

(2) 专家数量对思维收敛影响

关于专家数量对群体思维的影响仍然是一个悬而未决的问题。文献[13]认为在概率意义下,专家数量越多,群体越容易收敛。Hegselmann 认为专家数量对群体思维收敛的影响与专家初始意见有关^[5]。

笔者认为群体专家数量对思维演化的影响是间接的,其影响效果与增加新专家后关系影响矩

阵属性有关。如果新增加专家都比较自我,不愿意接受别人意见,那么群体专家数量越多,分歧越多;如果新增加的专家理解能力和影响力都比较大,那么增加专家个数有利于群体思维的收敛。为此,本节在运用相同初始意见分布的前提下,分别考察 100、400 个专家在影响矩阵有 2 个循环类和 4 个循环类 的情况下群体专家观点的演化特性,如图 3 所示。

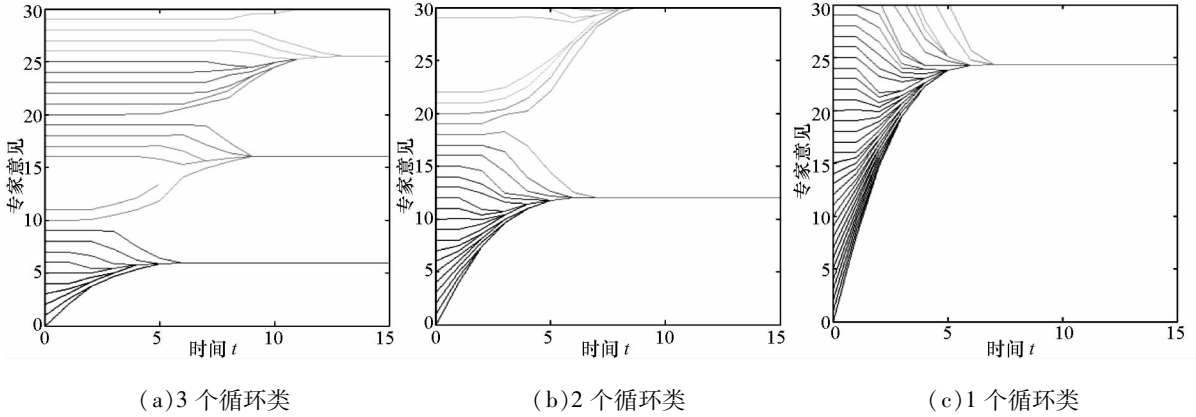


图 2 关系矩阵对群体思维收敛影响
Fig. 2 The effect of relationship matrix

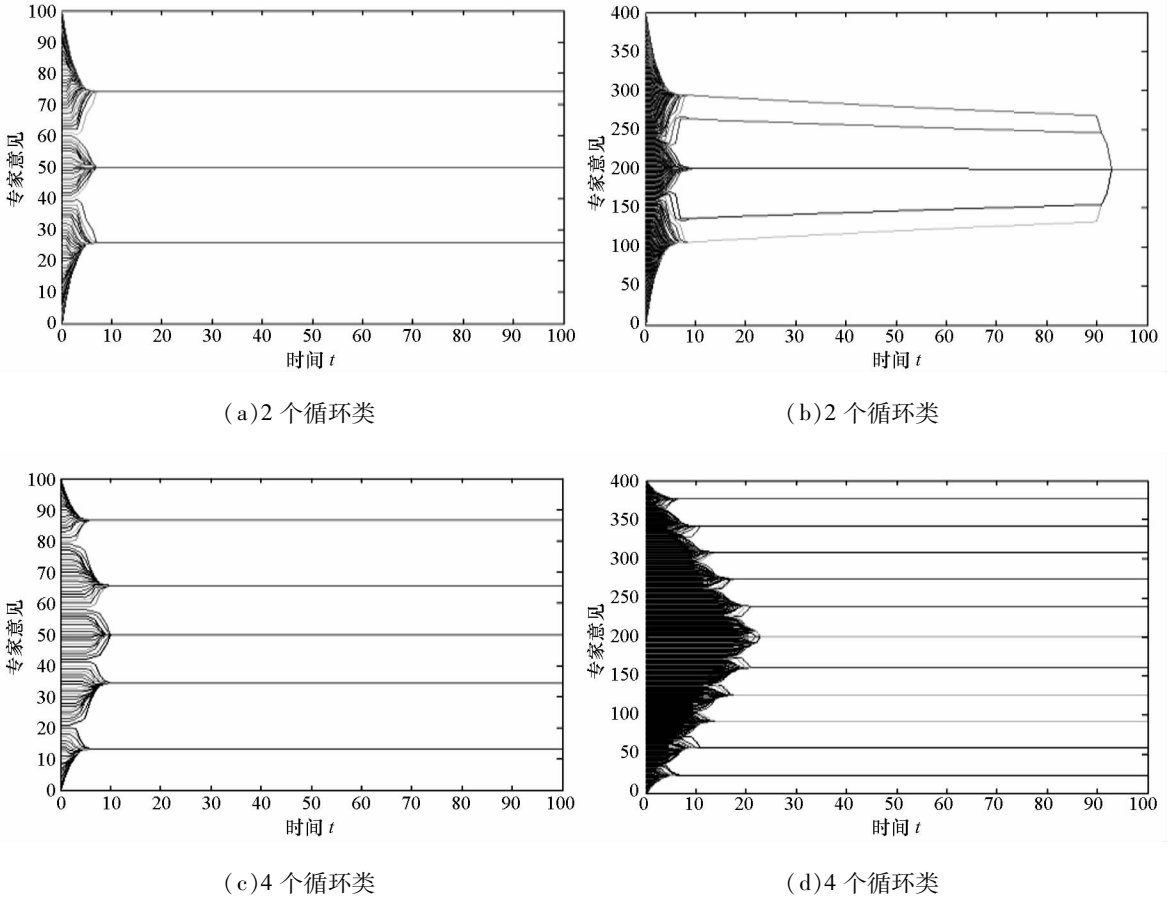


图 3 专家数量对群体思维收敛影响
Fig. 3 The effect of the expert number

图3(a)~(b)仿真结果显示,当影响矩阵只有2个循环类时,100个专家研讨结束时存在3种不同的意见,而当专家个数增加到400个时群体意见却可以收敛。图3(c)~(d)显示,当影响矩阵有4个循环类时,增加专家个数反而使得群体最终意见更加发散。这些结果表明专家群体数量对群体思维收敛的影响与关系影响矩阵的属性有关。

5 结 论

由于战争问题的复杂性和个体认知水平的有限性,群体专家经验和知识是有效解决问题的根本途径。本文将战争设计工程中专家研讨过程看成一个离散的动力系统,运用马尔科夫链对群体思维收敛过程进行建模,主要得到如下结论:

(1)提出了群体思维收敛的充分必要条件。群体思维收敛不仅与研讨过程中专家之间的关系影响矩阵有关,而且与专家的初始意见有关。

(2)运用仿真方法分析了关系影响矩阵、专家数量对群体思维收敛的影响。

本文试图从数学和计算机仿真两个角度推导和分析群体思维收敛的条件,相关结论对于战争设计过程中群体思维收敛问题具有一定的理论价值。

参考文献 (References)

[1] 沙基昌,毛赤龙,陈超. 战争设计工程[M]. 北京:科学出版社,2009:74-92.
SHA Jichang, MAO Chulong, CHEN Chao. War design engineering [M]. Beijing: Science Press, 2009: 74-92. (in Chinese)

[2] Ben A D, Chen Z F. Linguistic group decision-making: opinion aggregation and measures of consensus [J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 5(4): 371-386.

[3] 顾基发. 意见综合——怎样达成共识[J]. 系统工程学报, 2001, 16(5): 340-347.
GU Jifa. On synthesizing opinions how can we research consensus [J]. Journal of Systems Engineering, 2001, 16

(5): 340-347. (in Chinese)

[4] Herrera V E, Herrera F, Chiclana F. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures [J]. Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions, 2002, 32(3): 394-402.

[5] 王丹力,戴汝为. 专家群体思维收敛的研究[J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 1-5.
WANG Danli, DAI Ruwei. Reseach on convergence of expert group thought [J]. Journal of Mangement Sciences in China, 2002, 5(2): 1-5. (in Chinese)

[6] Hegselmann R, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation [J]. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 2002, 5(3): 1-33.

[7] Weisbuch G, Deffuant G, Amblard F. Meet, discuss, and segregate [J]. Complexity, 2002, 7(3): 55-63.

[8] De Groot M H. Reaching a consensus [J]. Journal of the American Statistical Association, 1974, 69(345): 118-121.

[9] Urbig D, Lorenz J, Herzberg H. Opinion dynamics: The effect of the number of peers met at once [J]. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 2008, 11(24): 1-27.

[10] Rauhut H, Lorenz J. The wisdom of crowds in one mind; how individuals can simulate the knowledge of diverse societies to reach better decisions [J]. Journal of Mathematical Psychology, 2011, 55(2): 191-197.

[11] Berger R L. A necessary and sufficient condition for reaching a consensus using Degroot's method [J]. Journal of the American Statistical Association, 1981, 76: 415-418.

[12] Gilardi G L, Clayton M K. On reaching a consensus using Degroot's iterative pooling [J]. The Annals of Statistics, 1993, 21(1): 391-401.

[13] Chatterjee S, Seneta E. Toward consensus: some convergence theorems on repeated average [J]. Applied Probability, 1977, 89-97.

[14] 董玉成,徐寅峰,张桂清. 群体思维收敛性定量验证[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 3: 108-111.
DONG Yucheng, XU Yinfeng, ZHANG Guiqing. On convergence of expert group thought [J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2006, 3: 108-111. (in Chinese)

[15] 胡迪鹤. 随机过程论基础理论应用[M]. 武汉:武汉大学出版社,2000:271-326.
HU Dihe. The theory and application of stochastic process [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2000: 271-326. (in Chinese)