基于直接数据域自适应算法的相干信号DOA估计*

袁晓东[1,2],万建伟[1],程 翥[1],石斌斌[3],许可[1]
(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073;
2. 中国人民解放军94782部队,浙江 杭州 310021;
3. 空军预警学院 空天基预警监视装备系,湖北 武汉 430019)

摘 要: 利用直接数据域自适应算法的稳态权值代替噪声子空间构建空间谱,构造了一种超分辨波达方向(DOA)估计方法。为了解决谱峰搜索时的伪峰问题,采用参考阵元轮换得到多组线性无关稳态权值,逼近噪声子空间,能有效去除伪峰。针对相干信号的DOA估计,进一步提出了直接数据域取对称共轭向量的解相干方法。相比子空间分解类算法,本文算法不需估计信号源数目和协方差矩阵、不需特征分解,复杂度仅为$O(MP)$,同时能有效完成解相干处理。

关键词: DOA估计;直接数据域;自适应算法;参考阵元轮换;低复杂度
中图分类号: TN911.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2012)03-0131-05

DOA estimation of correlated signals based on the adaptive algorithm in direct data domain

YUAN Xiaodong[1,2], *WAN Jianwei*[1], *CHENG Zhu*[1], *SHI Binbin*[3], *Xu Ke*[1]
(1. College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. 94782 Force of PLA, Hangzhou 310021, China;
3. Department of Air/Space-based Earlywarning Surveillance Equipment, Air Force Radar Academy, Wuhan 430019, China)

Abstract: A novel method for high resolution direction-of-arrival (DOA) estimation is proposed. The novel approach constructs the spatial spectrum by utilizing the steady-state weights of the adaptive algorithm in direct data domain instead of the noise subspace. The proposed method can solve the false peak problem effectively in the spectral peak search. The noise subspace can be closed with several groups of linear non-correlated steady-state weights from utilizing different reference signals. A practical method for the DOA estimation of correlated signals is also presented, which utilizes the symmetric conjugate vector in direct data domain. Compared with the conventional method, the proposed approach does not need to estimate the source number and the covariance matrix. As it does not need the eigendecomposition and only has a computational complexity of O(MP), it is a practical method for DOA estimation of correlated signals.

Key words: DOA estimation; direct data domain; adaptive algorithm; different reference signals; low complexity

实时高分辨波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理中的重要问题。以MUSIC算法[1]为代表的子空间分解类算法,通过对阵列接收数据的数学分解(如特征分解、奇异值分解和QR分解等),将接收数据划分为信号和噪声两个相互正交的子空间,然后利用两个子空间的正交性完成高分辨测向。但该类DOA估计算法,需要协方差矩阵估计和特征分解,通常还需要其他算法来估计空间信号源数目[2],计算量大。采用现有的数字信号处理芯片实现子空间分解类算法仍有难度。

现有DOA估计算法针对子空间分解类算法中相关问题进行了大量研究,主要解决去除或改进协方差矩阵的估计、特征分解、信号源个数的确定以及解相干等问题,但未能得到一种利于工程实现的解相干精确测向算法。利用直接数据域方法,可以使用单个快拍数据进行协方差矩阵构造、噪声子空间估计等[3-5]。文献[3]基于直接数据域最小二乘算法,提出了一种DOA估计方法,通过自适应算法得到自适应权值,然后求取自适应权值的模之和,搜索使模之和最小的方向即为来波方向[3];文献[4]直接利用快拍数据构造Toeplitz矩阵代替协方差矩阵[4],但其仍需特征分解和确定信源数目;文献[5]提出一种方向估计

* 收稿日期:2011-07-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61002022)
作者简介:袁晓东(1979—),男,河南周口人,博士研究生,E-mail:yuanxiaodong08@nudt.edu.cn
万建伟(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:kermitwjw@139.com

和跟踪自适应算法,通过 LMS 算法估计噪声子空间,利用近似牛顿算法进行方向更新,但算法计算量仍很高,且不便于工程实现[5]。

本文在分析子空间分解类算法测向原理的基础上,利用直接数据域自适应算法的稳态权值代替噪声子空间的基构建空间谱,构造了一种新的超分辨 DOA 估计方法。针对算法中谱峰搜索时出现的伪峰问题,采用参考阵元轮换得到多组线性无关稳态权值,逐步逼近噪声子空间,能有效去除伪峰。针对相干信号的 DOA 估计,提出了直接数据域取对称共轭向量的解相干算法。所提算法在减小计算量的同时,能有效完成解相干处理。

1 子空间分解类算法的测向原理

考虑 N 个远场的窄带信号从不同的方位角和俯仰角 $(\theta_1,\varphi_1),(\theta_2,\varphi_2),\cdots,(\theta_N,\varphi_N)$ 入射到一个 M 元等距平面阵 $(N\leqslant M-1)$,阵元间距 d 为半波长 $\lambda/2$,阵元的坐标分别为 $(x_i,y_i),(i=1,2,\cdots,M)$,则阵列在第 k 个快拍接收的 M 维观测数据矢量为

$$x(k)=\boldsymbol{A}(\theta,\varphi)s(k)+v(k) \tag{1}$$

其中:

$$\boldsymbol{A}(\theta,\varphi)=[\alpha(\theta_1,\varphi_1),\alpha(\theta_2,\varphi_2),\cdots,\alpha(\theta_N,\varphi_N)]$$

$$s(k)=[s_1(k),s_2(k),\cdots,s_N(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$v(k)=[v_1(k),v_2(k),\cdots,v_M(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha(\theta_j,\varphi_j)=[\mathrm{e}_{1\mathrm{j}}^{-\mathrm{j}\omega\tau},\mathrm{e}_{2\mathrm{j}}^{-\mathrm{j}\omega\tau},\cdots,\mathrm{e}_{M\mathrm{j}}^{-\mathrm{j}\omega\tau}]^{\mathrm{T}}$$

$$\tau_{ij}=(x_i\cos\theta_j\cos\varphi_j+y_i\sin\theta_j\cos\varphi_j)/c$$

$$i=1,2,\cdots,M;\quad j=1,2,\cdots,N$$

式(1)即为二维测向的数学模型,其中 $s(k)$ 为空间信号的 $N\times1$ 维矢量,$v(k)$ 为 $M\times1$ 维噪声数据矢量,$\boldsymbol{A}(\theta,\varphi)$ 为空间阵列的 $M\times N$ 维导向矢量矩阵,$\alpha(\theta_j,\varphi_j)$ 为第 j 个信号的导向矢量,ω 为接收信号的中心频率,c 为信号传播速度。

假设阵列各阵元的加性噪声 $n_i(t)$ 为空间白噪声且互不相关,$i=1,2,\cdots,M$;噪声与信号也互不相关,各阵元为各向同性,且不考虑互耦以及通道不一致的影响,在这些假设条件下,对阵列快拍数据的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_X$ 进行特征分解有

$$\boldsymbol{R}_X=\boldsymbol{U}_S\boldsymbol{\Sigma}_S\boldsymbol{U}_S^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{\Sigma}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}} \tag{2}$$

式(2)中,$\boldsymbol{U}_S$ 是由大特征值对应的特征矢量张成的子空间,也即信号子空间,而 $\boldsymbol{U}_N$ 是由小特征值对应的特征矢量张成的子空间,也即噪声子空间。可以证明数据空间中的信号子空间与噪声子空间是相互正交的,信号的导向矢量可以由信号子空间的一组基线形表示,故信号的导向矢量也与噪声子空间正交:

$$a^{\mathrm{H}}(\theta,\varphi)\boldsymbol{U}_N=0 \tag{3}$$

子空间分解类算法就是通过搜索与噪声子空间垂直的导向矢量方向来测向的,经典的 MUSIC 算法的谱估计公式为

$$P_{\mathrm{MUSIC}}=\frac{1}{a^{\mathrm{H}}(\theta,\varphi)U_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}a(\theta,\varphi)} \tag{4}$$

由上式得到的空间谱在信号源方向会产生较尖的“峰值”,而在其他方向相对平坦。通过谱峰搜索即可获得空间信号的到达角。

2 自适应算法测向原理

使用第 1 节数学模型,由上节子空间分解类算法的测向原理知,只要得到噪声子空间,就可以构建类似于式(4)的空间谱,通过谱峰搜索进行测向。自适应算法中,设阵列输入矢量为 $\boldsymbol{x}(n)=[x_1,x_2,\cdots,x_M]^{\mathrm{T}}$,阵列的加权矢量为 $\boldsymbol{w}(n)=[w_1,w_2,\cdots,w_M]^{\mathrm{T}}$,输出误差为 e。任选一路输入做参考路,考虑简单约束问题:

$$\min\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_X\boldsymbol{w}\quad \text{s.t.}\ \ \boldsymbol{w}(i)=1 \tag{5}$$

其中 i 对应选取的参考路。随着权值 $\boldsymbol{w}(n)$ 迭代到稳态权值 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$,阵列的最终输出能量 $E\{|e^2(n)|\}=\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_X\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 最小,输出中不包含信号成分,即有:$e_{\min}=\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{H}}a(\theta,\varphi)$ 趋近于零,故权值 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 垂直于信号子空间 $\boldsymbol{U}_S$。由于 $\boldsymbol{U}_S$ 和 $\boldsymbol{U}_N$ 互为正交补,故 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 为噪声子空间内的一个矢量,可用权值 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 代替 $\boldsymbol{U}_N$ 构建空间谱:

$$P_{\mathrm{ADAPT}}=\frac{1}{a^{\mathrm{H}}(\theta,\varphi)\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{H}}a(\theta,\varphi)} \tag{6}$$

由于权值 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 仅是 $\boldsymbol{U}_N$ 内的一个矢量,故与 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 垂直的方向矢量中既包含了信号方向,也很可能包含了一些与 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 垂直,但不在 $\boldsymbol{U}_S$ 内的方向矢量,在空间谱中表现为多余的尖峰,本文称之为伪峰。为了去除伪峰,需要更多不同的 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 矢量作为基张成子空间来逼近 $\boldsymbol{U}_N$。

3 参考阵元轮换测向算法

选取不同阵元做参考阵元进行自适应算法时,若阵元位置无对称关系,则得到的 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 线性无关,且都属于噪声子空间 $\boldsymbol{U}_N$。不同的权值矢量 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 张成 $\boldsymbol{U}_N$ 内的一个子空间,记为 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}\}$,则有 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}\}\subseteq U_N$。随着轮换参考阵元数的增多,$\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}\}$ 接近 $\boldsymbol{U}_N$,从而伪峰得到消除,原理如图 1 所示。

图 1 中 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt1}},\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt2}}$ 为不同参考阵元得到的自适应权值,都位于噪声子空间 $\boldsymbol{U}_N$ 内,S_1 为所有与

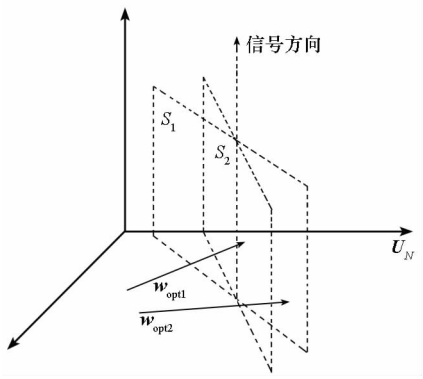


图 1　参考阵元轮换自适应算法测向消除伪峰原理

Fig. 1　Principle of false peak elimination in DOA estimation with adaptive algorithm using different reference signals

矢量 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt1}}$ 垂直的方向向量张成的空间,S_2 为与矢量 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt2}}$ 垂直的方向向量张成的空间。则单独搜索与矢量 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt1}}$ 或 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt2}}$ 垂直的方向向量不唯一,表现在空间谱上不但包含真实信号谱峰,也包含伪峰;但搜索同时垂直于 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt1}}$,$\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt2}}$ 的方向向量,则仅有 S_1 和 S_2 相交的向量,即为信号来波方向。所以通过阵元轮换自适应算法,最终能消除伪峰,得到超分辨的信号方向,参考阵元轮换自适应算法测向的空间谱为

$$P_{\mathrm{ADAPT}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{P} a_i^{\mathrm{H}}(\theta,\varphi)\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}(i)}\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}(i)}^{\mathrm{H}} a_i(\theta,\varphi)} \tag{7}$$

其中 P 为选取的轮换参考阵元数目,其范围为:$1 \leqslant P \leqslant M$。

4　基于直接数据域的解相干方法

上述算法当信号相干时会产生秩损失,从而不能进行相干信号测向。为了解相干,在等距线性方阵和同时相干信号个数不大于两个的情况下,提出了直接数据域取“对称共轭向量” 进行 DOA 估计。

令 $\boldsymbol{J}$ 为 $M \times M$ 置换矩阵,其除反对角线上元素为 1 外,其余元素皆为 0,则对于 N 个信号入射到 M 元等距线性方阵(每行和每列阵元数都为 $L = \sqrt{M}$),可得 $\boldsymbol{J}x^*$ 为输入快拍向量 x 的对称共轭向量。取 $x_{BF} = x + \boldsymbol{J}x^*$,新的输入快拍数据向量变为

$$\begin{aligned}
x_{BF} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{s}^* + \sigma^2\boldsymbol{I} \\
&= \begin{bmatrix} a(\theta_1,\varphi_1) \\ \vdots \\ a(\theta_N,\varphi_N) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(\theta_1,\varphi_1) \\ \vdots \\ a(\theta_N,\varphi_N) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi((L-1)\sin(\theta_1)\cos(\varphi_1)+(L-1)\sin(\theta_1)\sin(\varphi_1))} s_1^* \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi((L-1)\sin(\theta_N)\cos(\varphi_N)+(L-1)\sin(\theta_N)\sin(\varphi_N))} s_N^* \end{bmatrix} + \sigma^2 I \\
&= [a(\theta_1,\varphi_1) \ \cdots \ a(\theta_N,\varphi_N)] \times \begin{bmatrix} s_1 + b_1 s_1^* \\ \vdots \\ s_N + b_N s_N^* \end{bmatrix} \\
&\quad + \sigma^2 I \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_{BF} + \sigma^2\boldsymbol{I}
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $b_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi((L-1)\sin(\theta_1)\cos(\varphi_1)-(L-1)\sin(\theta_1)\sin(\varphi_1))}, \cdots, b_N = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi((L-1)\sin(\theta_N)\cos(\varphi_N)-(L-1)\sin(\theta_N)\sin(\varphi_N))}$ 都为复常数,N 为入射信号源数目。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Vandermonde 矩阵,当 $(\theta_1,\varphi_1),\cdots,(\theta_N,\varphi_N)$ 各不相同时,其为满秩矩阵;下面证明 $\boldsymbol{s}_{BF}$ 当同时相干信号个数不大于 2 时,为 N 个线性无关的矢量:易知矩阵 $\boldsymbol{s}_{BF}$ 中非相干信号组成向量线性无关。而两相干信号,不失一般性,设为 s_1 和 s_2,令 $s_1 = cs$, $s_2 = s$,其中 c 为复常数,$s = s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_c t}$,故两相干信号组成的向量分别为 $cs + b_1c^*s^*$,$s + b_2s^*$。令 $a = b_1c^*/c$,$b = b_2$,也都为复常数。需证明向量 $s + as^*$ 与向量 $s + bs^*$ 无关,只需证明两者相关矩阵为满秩,两者相关矩阵为

$$\begin{bmatrix} E[(s+as^*)(s+as^*)^{\mathrm{H}}] & E[(s+as^*)(s+bs^*)^{\mathrm{H}}] \\ E[(s+bs^*)(s+as^*)^{\mathrm{H}}] & E[(s+bs^*)(s+bs^*)^{\mathrm{H}}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+a^2)\{E[ss^*]\} + a\{E[ss]\} + a\{E[s^*s^*]\} & (1+ab)\{E[ss^*]\} + b\{E[ss]\} + a\{E[s^*s^*]\} \\ (1+ab)\{E[ss^*]\} + a\{E[ss]\} + b\{E[s^*s^*]\} & (1+b^2)\{E[ss^*]\} + b\{E[ss]\} + b\{E[s^*s^*]\} \end{bmatrix}$$

其行列式经计算为:$(a^2 + b^2 - 2ab)\{E[ss^*]\}^2$,故仅当 $a = b$,即 $b_1c^*/c = b_2$ 时,行列式为 0,此时有 $(\theta_1,\varphi_1) = (\theta_2,\varphi_2)$,$c$ 为实数,即两相干信号方位相同,且无相位延迟,可看作一个信号,故没必要分辨;而在其他情况下,有 $a \neq b$,此时矩阵行列式不为 0,矩阵非奇异,即两相干信号组成向量线性无关。故得到的 x_{BF} 总为满秩矩阵,能体现出所有信源数。总结整个解相干自适应算法测向流程为:

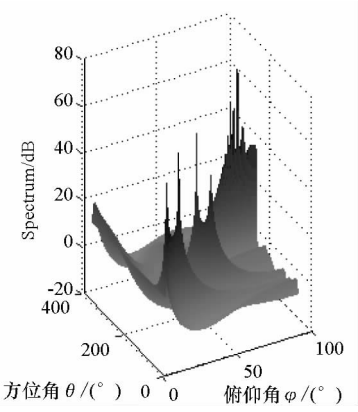
(1) 通过 $x + \boldsymbol{J}x^*$ 得到新的快拍数据;

(2) 选取不同阵元做参考阵元,经自适应算法得到不同的稳态权值 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$,一般得到两个稳态权值:$\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt1}}$,$\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt2}}$ 即可;

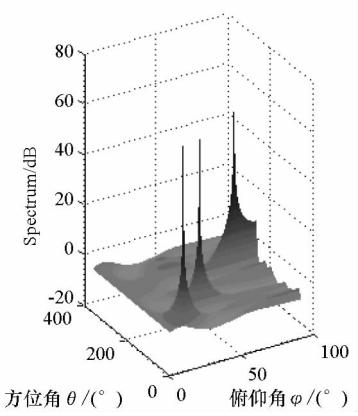
(3) 利用得到的不同稳态权值按式(7) 构造空间谱,进行信号方向搜索。

5　仿真和测试

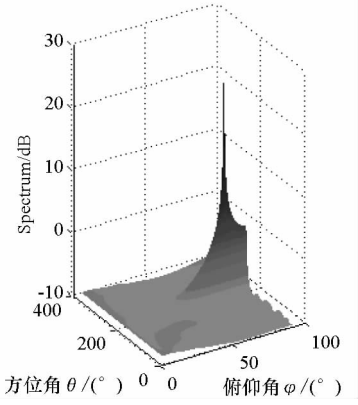
设定典型仿真条件为：阵列为 4 × 4 均匀方阵，阵元间距为信号半波长 $\lambda/2$。输入信号为 3 个窄带信号，信噪比都设为30dB。3 个信号的俯仰角和方位角分别为：(15°,40°)，(35°,100°)，(75°,210°)，其中前两个窄带信号为相干信号。分别用固定参考阵元自适应算法、参考阵元轮换自适应算法和 MUSIC 算法进行测向，空间谱结果如图 2 所示。



(a) 固定参考阵元自适应算法测向



(b) 两参考阵元轮换自适应算法测向



(c) MUSIC 算法测向

图 2　不同算法测向结果比较

Fig. 2　Comparison with different DOA estimation algorithms

由图 2(a) 可看出单一稳态权值矢量 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 构建空间谱，能测出所需信号方向，但空间谱中也包含了较多的伪峰，一般可通过设置门限滤除，但在信号源数量未知时容易造成误测；图 2(b) 为用两阵元轮换做参考阵元测向结果，可看出伪峰已被有效消除，能较好地进行相干信号测向，而且算法中有取平均操作，能改善估计方差。图 2(c) 所示 MUSIC 算法仅能测出非相干信号，不能对相干信号测向。

本算法已在开发的自适应抗干扰处理机中实现，并已经投入实际应用，取得了较好的干扰定位效果。为了说明该算法的性能，本文在自适应抗干扰处理机的基础上设计了仿真实验，实验中天线阵列采用4 ×4 等距方阵，AD 采样为14 位，自适应抗干扰算法选为 LMS 算法，空间信号源设置同仿真条件，信号间非相干，实验重复 20 次，得到的信噪比对测向性能的影响以及轮换参考阵元数量 P、信号角度间隔大小对分辨成功概率的影响分别如图 3、图 4 和图 5 所示。

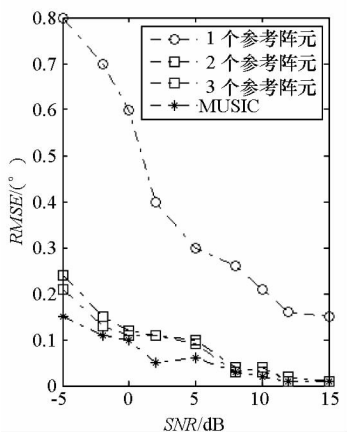


图 3　均方根误差比较

Fig. 3　Comparison with RMSE

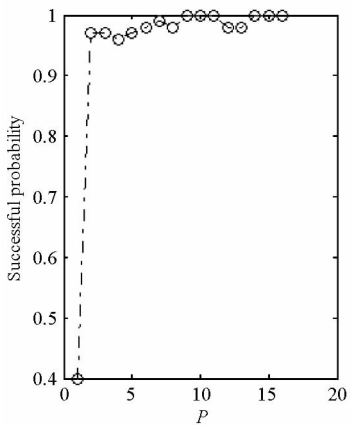


图 4　成功概率随轮换参考阵元数变化

Fig. 4　Successful probability with different reference signal numbers

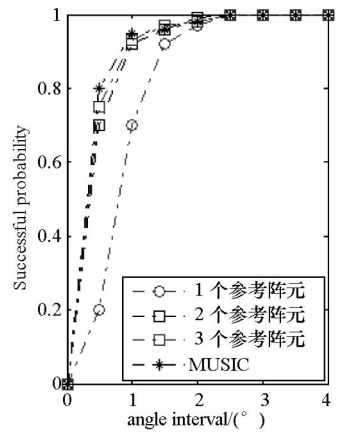


图 5　角度分辨概率比较

Fig. 5　Successful probability with angle interval

由图 3 可看出,本文算法性能与 MUSIC 算法相当,在低信噪比条件下,由于自适应稳态权值 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 受噪声影响较大,存在数值上的波动,导致通过本文算法测向精度比 MUSIC 算法略低;但 MUSIC 算法在低信噪比条件下存在不易划分信号子空间和噪声子空间的问题,只有信号源数目估计正确,才能得到较好测向结果。由图 4 可看出仅用两个不同参考阵元,即可达到较好的测向成功概率,而一个参考阵元自适应算法由于滤除伪峰的门限较难设定,严重影响所测信号源数目结果,从而降低了分辨概率。由图 5 可看出随着信号角度的接近,自适应算法通过降低收敛步长仍能达到较好分辨力;MUSIC 方法通过增加接收数据采样点数,也能达到较好的分辨力。

6　结束语

本文基于自适应阵列处理算法,构造了一种用稳态权值 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ 逼近噪声子空间,从而构建空间谱进行信号 DOA 估计的新方法。深入分析了通过自适应权值测向产生伪峰,以及采用参考阵元轮换自适应算法测向可去除伪峰的原因。为解决相干信号 DOA 估计问题,采用了直接数据取“对称共轭向量”方法。经仿真和实际测试验证,其性能与直接利用噪声子空间测向类算法相当,而且其不需预知信号源数目,不需协方差矩阵估计,不需特征分解,所以极大地降低了计算量。如用 LMS 类自适应算法实现,本文算法复杂度仅有 $O(MP)$(P 为选取的轮换参考阵元数目,一般选取 $P=2$ 即有较好结果)。因此本文所提方法能对空间相干多信号源进行精确超分辨测向,且便于工程实现。

参考文献(References)

[1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transaction. on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276 – 280.

[2] Wu H T, et al. Source number estimator using gerschgorin disks [C]//Proceeding of ICASSP, 1994(4): 261 – 264.

[3] Azarbar A, Dadashzadeh G. A new DOA estimation based on direct data domain algorithm[C]//2011 IEEE GCC Conference and Exhibition, 2011(2): 205 – 208.

[4] Chen H, Huang B, Wang Y, et al. Direction-of-arrival estimation based on direct data domain (D3) method [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(3): 512 – 518.

[5] Xin J, Sano A. Efficient subspace-based algorithm for adaptive bearing estimation and tracking [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(12): 4485 – 4505

[6] 王永良,陈辉,彭应宁,等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京:清华大学出版社,2004.
WANG Yongliang, CHEN Hui, PENG Yingning, et al. Spatial spectrum estimation theory and method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)

[7] 程翥,李双勋,薛鸿印,等. 一种简化的单约束波束形成方法[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(12): 2673 – 2676.
CHENG Zhi, LI Shuangxun, XUE Hongyin, et al. Simplified implementation for single constrained beam-forming [J]. Journal of System Simulation, 2007, 19(12): 2673 – 2676. (in Chinese)

[8] Ferreira T N, Netto S L, Diniz P S R. Direction-of-Arrival estimation using a direct-data approach[J]. IEEE Transaction. on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(1): 728 – 733.

[9] 于红旗,黄知涛,周一宇,等. 一种不需要特征值分解的 MUSIC 方法[J]. 国防科技大学学报, 2007, 29(4): 91 – 94.
YU Hongqi, HUANG Zhitao, ZHOU Yiyu, et al. An improved MUSIC algorithm without eigenvalues decomposition[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2007, 29(4): 91 – 94. (in Chinese)