

航天测控通信系统可靠性分析的 Krylov 子空间投影算法*

闫 华, 武小悦

(国防科技大学 信息系统与管理学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 基于 Markov 模型对航天测控通信系统进行可靠性分析的过程中, 若系统中测控通信设备数量较多, 模型中的状态空间随设备数量呈指数增长, 将会导致数值计算困难。提出了一种基于 Krylov 子空间技术的可靠性分析方法, 将大规模问题投影至小规模子空间中, 求得问题的近似解。实验结果证明, Krylov 子空间方法的计算速度及精度优于 Ross 方法和前向 Euler 法 (forward Euler method, FEM)。

关键词: 系统可靠性; Markov; Krylov 子空间; 航天测控通信系统

中图分类号: V57; TP273 文献标志码: A 文章编号: 1011-2486(2012)04-0063-05

Krylov subspace projection algorithm of reliability analysis of TT&C and communication system

YAN Hua, WU Xiaoyue

(College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Using Markov model to evaluate reliability of the tracking, telemetry and command (TT&C) and communication system is very difficult if there are many facilities in system, due to the fact that Markov modeling techniques suffer from the state explosion problem. In light of this, a reliability analysis method based on Krylov subspace is proposed; the main idea of this method is projecting the initial problem to a smaller subspace for the obtaining of an approximating result. Examples prove that the proposed method performs better than Ross method and Forward Euler Method, and it can achieve a good efficiency and accuracy.

Key words: reliability analysis; Markov process; Krylov subspace; tracking, telemetry and command (TT&C) and communication system

航天测控通信系统是在任何空间活动中不可缺少的一个重要组成部分^[1]。测控通信系统是天地通信的唯一途径^[2], 其主要任务是对各飞行阶段飞行器进行跟踪、测量、控制和通信, 任务类型包括轨道测量、遥测数据接收、遥控指令发送等, 在对载人航天器进行测控时还包括语音通信及航天员生理状态参数接收等任务。通过建立航天测控通信系统的可靠性模型, 分析系统完成单个测控通信任务或综合任务的可靠性, 对于确保航天任务的圆满完成具有重要意义。

测控通信任务在执行过程中, 由于测控设备的执行时间不一致, 导致在不同的阶段参与任务的设备数不同且任务的成功标准也不同, 因此测控通信任务具有多阶段任务系统 (Phased Mission System, PMS) 的特点。PMS 可靠性分析方法包括可靠性框图法^[3]、故障树法^[4]、Petri 网方法^[5]、Bayes 网络方法^[6]以及 Markov 方法^[7-9]等。基于 Markov 过程的分析方法能够处理动态可修系统,

同时能够正确描述阶段内各部件之间的依赖性及部件跨阶段的依赖性, 因此适合于 PMS 的可靠性分析。但是, 由于 Markov 模型求解中涉及矩阵指数运算 (形如 e^{Qt}), 当系统规模较大时, Markov 模型中的状态空间呈指数增长, 导致矩阵规模巨大, 计算困难。

Markov 模型求解中的矩阵指数运算方法主要包括一致化方法^[10]、Ross 提出的近似计算方法^[11]、常微分方程方法^[12]以及迭代求解方法^[13]等。这些方法一般适合于中小规模问题的求解。当矩阵规模较大时, 算法运行耗时巨大。航天测控通信系统中, 通常参与执行任务的设备数量较多, 若采用上述方法进行求解效率较低。本文采用 Krylov 子空间技术, 将大规模矩阵在 Krylov 子空间中进行投影, 以投影后的矩阵进行近似计算。由于经过投影后能够极大地减少矩阵规模, 因此, Krylov 子空间方法能够有效提高 Markov 模型求解效率。

* 收稿日期: 2012-01-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71071159)

作者简介: 闫华 (1983—), 男, 甘肃临潭人, 博士研究生, E-mail: yanhua_8304@163.com;

武小悦 (通信作者), 男, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: xiaoyuewucn@yahoo.com.cn

1 测控通信任务可靠性分析

1.1 基于 Markov 过程的测控通信任务可靠性建模

测控通信任务具有较强的计划性,因为航天器的轨道、飞行程序等都是事先分析、设计的,在测控资源布局已定的情况下,执行测控通信任务的设备及其开始工作时间和结束工作时间都是确定的。若令 $task_i$ 表示测控通信任务,则可以用如图 1 所示的测控设备执行时序图描述该任务。

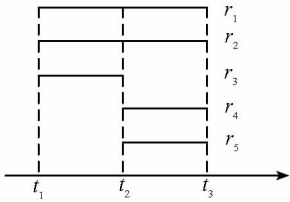


图 1 测控设备执行时序图

Fig. 1 Time sequence of TT&C components

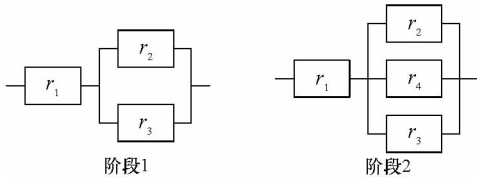


图 2 各阶段测控设备间逻辑关系

Fig. 2 Reliability logic of TT&C components in each phase

图 1 中 r_i 为执行任务的测控设备,由设备执行时序图可以看出,该任务可以划分为两个阶段,每个阶段中设备间的逻辑结构关系如图 2 所示。对测控通信任务 $task_i$ 进行可靠性分析的过程可以概括为:对每一个任务阶段单独生成 Markov 模型,以前一阶段末的状态概率向量作为后一阶段初的状态概率向量,依次对各 Markov 模型进行求解,最末阶段的可靠性即为整个任务的可靠性。

Markov 模型中状态概率向量的求解,根据 Kolmogorov 后向方程 $dP(t)/dt = Q \cdot P(t)$,可得到 $P(t) = e^{Qt}$ 。其中, Q 为转移速率矩阵,若以 $v(t)$ 表示系统在 t 时刻的状态概率向量,则有

$$v(t) = v(0) \cdot e^{Qt} \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

当矩阵 Q 较大时, e^{Qt} 的计算十分困难。若将初始矩阵通过 Krylov 子空间投影,近似为小规模矩阵的指数运算,则能够简化计算,提高求解效率。

1.2 Arnoldi 过程

Krylov 子空间是指由形如 $p(A)v$ 的向量张成的子空间^[14],其中 A 为矩阵, $p(A)$ 为包含矩阵 A 的

多项式,若以 $K_m(A, v)$ 表示 Krylov 子空间,则有:

$$K_m(A, v) = \text{Span}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\} \quad (2)$$

Arnoldi 过程是 Krylov 子空间方法中构造子空间的一组标准正交基的方法,由 W. E. Arnoldi 于 1951 年首先提出,起初用于将一般矩阵简化为一个 Hessenberg 矩阵。设 $\langle v_1, v_2 \rangle$ 表示向量 v_1 和 v_2 的内积,则利用 Arnoldi 方法构造子空间 $K_m(A, v)$ 中的标准正交基的过程可简单描述如下^[14]:

- Step 1 选取初始向量 b_1 , 并将其标准化
- Step 2 For $j = 1, 2, \dots, m$ Do
- Step 3 $h_{ij} = \langle Ab_j, b_i \rangle$ For $i = 1, 2, \dots, j$
- Step 4 $r_j = Ab_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}b_i$
- Step 5 $h_{j+1,j} = \|r_j\|_2$
- Step 6. $b_{j+1} = r_j / h_{j+1,j}$
- Step 7. End

从上述算法过程可以看出,Arnoldi 过程的每一次循环都对向量 Ab_j 利用标准的 Gram-Schmidt 正交化方法进行处理。其中, h_{ij} 为向量 Ab_j 在已生成的基向量 $b_i (i = 1, 2, \dots, j)$ 上的投影,则 $\sum_{i=1}^j h_{ij} b_i$ 为 Ab_j 在由基向量 $\{b_1, b_2, \dots, b_j\}$ 张成的子空间 V^j 上的投影。因此, r_j 即为向量 Ab_j 与其在子空间 V^j 上投影的差。由投影原理可知, r_j 是正交于子空间 V^j 的,亦即正交于 V^j 的正交基 $\{b_1, b_2, \dots, b_j\}$ 。将 r_j 单位化之后赋给 b_{j+1} , 则向量组 $\{b_1, b_2, \dots, b_j, b_{j+1}\}$ 就是 V^j 在 Ab_j 上扩展的子空间 $\text{Span}\{b_1, b_2, \dots, b_j, Ab_j\}$ 的标准正交基。重复上述扩展构造正交基的过程,可得向量组 $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 为 Krylov 子空间 $K_m = \text{Span}\{b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{m-1}b_1\}$ 的一组标准正交基。

由 Arnoldi 算法过程的 Step 5 和 Step 6 可以得到, $h_{j+1,j}b_{j+1} = r_j$, 综合 Step 4 可以得到

$$Ab_j = \sum_{i=1}^j h_{ij}b_i + h_{j+1,j}b_{j+1} \quad (3)$$

对 $j = 1, 2, \dots, m$ 可分别写出:

$$\begin{cases} Ab_1 = h_{11}b_1 + h_{21}b_2 \\ Ab_2 = h_{12}b_1 + h_{22}b_2 + h_{32}b_3 \\ \vdots \\ Ab_m = h_{1m}b_1 + h_{2m}b_2 + \dots + h_{mm}b_m + h_{m+1,m}b_{m+1} \end{cases}$$

若令

$$\mathbf{H}_m = \begin{cases} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,m-1} & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,m-1} & h_{2m} \\ & h_{32} & \cdots & h_{3,m-1} & h_{3m} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & h_{m,m-1} & h_{mm} \end{cases}$$

则可将式(1)写为如下的矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_m\mathbf{H}_m + h_{m+1,m}\mathbf{b}_{m+1}\mathbf{e}_m^T \quad (4)$$

其中 $\mathbf{B}_m = [b_1, b_2, \dots, b_m]$, $\mathbf{e}_m = (0, \dots, 0, 1)^T$ 。上式两端左乘 \mathbf{B}_m^T , 并利用 \mathbf{b}_{m+1} 与 \mathbf{B}_m 列向量的正交性可得

$$\mathbf{B}_m^T\mathbf{A}\mathbf{B}_m = \mathbf{H}_m \quad (5)$$

可见, Arnoldi 过程在构造正交基 \mathbf{B}_m 的同时, 还会生成一个 Hessenberg 矩阵 \mathbf{H}_m , \mathbf{H}_m 表示矩阵 \mathbf{A} 在 Krylov 子空间 K_m 中关于基 \mathbf{B}_m 的投影, 且具有式(4)和(5)所示的性质。

1.3 基于 Krylov 子空间的状态概率向量求解

如式(1)所示, $\mathbf{v}(t) = v(0) \cdot e^{Qt}$, 若令 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T$, $\omega(t) = v(t)^T$, $\boldsymbol{\pi} = \omega(0)$, 则有

$$\omega(t) = e^{At} \cdot \boldsymbol{\pi}, \quad t \in [0, T] \quad (6)$$

暂不考虑时间 t , 令 $\omega = e^A \boldsymbol{\pi}$, 则对 ω 的任意 $m-1$ 阶多项式展开都可记为 $p_{m-1}(A)\boldsymbol{\pi}$ 进行近似计算, 如其 $m-1$ 阶 Taylor 展开式为 $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} \boldsymbol{\pi}$ 。 ω 的所有 $m-1$ 阶多项式近似都是 Krylov 子空间 $K_m(\mathbf{A}, \boldsymbol{\pi})$ 中的元素, 其中

$$K_m(\mathbf{A}, \boldsymbol{\pi}) = \text{Span}\{\boldsymbol{\pi}, \mathbf{A}\boldsymbol{\pi}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\boldsymbol{\pi}\} \quad (7)$$

设 $\mathbf{B}_m = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ 为 Krylov 子空间 $K_m(\mathbf{A}, \boldsymbol{\pi})$ 中的一组基, \mathbf{B}_m 由 Arnoldi 过程构造, ω_{opt} 为对 ω 的 $m-1$ 阶多项式近似中的最优值, 则有

$$\begin{aligned} \|\omega_{opt} - \omega\|_2 &= \min_{x \in K_m(\mathbf{A}, \boldsymbol{\pi})} \|x - \omega\|_2 \\ &= \min_{y \in \mathbb{R}^m} \|\mathbf{B}_m y - \omega\|_2 \end{aligned} \quad (8)$$

根据最小二乘法原理, 可得 $y_{opt} = (\mathbf{B}_m^T \mathbf{B}_m)^{-1} \mathbf{B}_m^T e^A \boldsymbol{\pi}$ 。

由于 Arnoldi 过程所得 \mathbf{B}_m 为标准正交基, 因此, $\mathbf{B}_m^T \mathbf{B}_m = \mathbf{I}$, 由此可知

$$y_{opt} = \mathbf{B}_m^T e^A \boldsymbol{\pi} \quad (9)$$

利用 Arnoldi 算法构造基 \mathbf{B}_m 时, 若令 $\beta = \|\boldsymbol{\pi}\|_2$, 取 $b_1 = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\beta}$ ($\boldsymbol{\pi}$ 为初始时刻状态概率向量), 并设 \mathbf{e}_i 表示单位矩阵 \mathbf{I} 的第 i 个列向量, 其长度视具体情况而定, 则可得

$$\boldsymbol{\pi} = \beta \mathbf{B}_m \mathbf{e}_1 \quad (10)$$

综合式(9)和(10), 同时由于 $\omega_{opt} = \mathbf{B}_m y_{opt}$, 可得

$$\omega_{opt} = \beta \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^T e^A \mathbf{B}_m \mathbf{e}_1 \quad (11)$$

用式(11)进行计算仍然是非常复杂的。如果将式(4)近似为 $\mathbf{A}\mathbf{B}_m \approx \mathbf{B}_m \mathbf{H}_m$, 则有:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^i \mathbf{B}_m &= \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{A} \mathbf{B}_m \\ &\approx \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}_m \mathbf{H}_m \\ &\vdots \\ &\approx \mathbf{B}_m \mathbf{H}_m^i \end{aligned} \quad (12)$$

即 $\mathbf{B}_m^T \mathbf{A}^i \mathbf{B}_m \approx \mathbf{H}_m^i$, 根据 Taylor 展开式可得到如下近似公式:

$$\mathbf{B}_m^T e^A \mathbf{B}_m \approx e^{\mathbf{H}_m} \quad (13)$$

则式(11)可写为:

$$\omega_{opt} \approx \beta \mathbf{B}_m e^{\mathbf{H}_m} \mathbf{e}_1 \quad (14)$$

将时间变量 t 重新引入式中, 对任意的时间 t , 总有 $\mathbf{B}_m^T (\mathbf{A}t)^i \mathbf{B}_m \approx (\mathbf{H}_m t)^i$, 可得:

$$\omega(t) \approx \beta \mathbf{B}_m e^{\mathbf{H}_m t} \mathbf{e}_1 \quad (15)$$

式(14)中也包括矩阵指数运算 $e^{\mathbf{H}_m t}$, 但是由于矩阵 \mathbf{H}_m 的阶数 m 小于原矩阵 \mathbf{A} 的阶数 n , 因此可认为通过 Krylov 子空间投影, 将初始的大规模矩阵问题转化为小规模矩阵的计算, 从而降低了计算复杂度。 $e^{\mathbf{H}_m t}$ 的计算可以根据常用的矩阵指数运算方法, 本文采用 Ross 提出的方法, 利用如下的近似公式^[11]:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n \quad (16)$$

$$e^{Qt} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + Qt/n)^n \approx (I + Qt/n)^n \quad (17)$$

该算法对小规模矩阵的指数运算具有较高的计算速度和精度。

2 算例分析

为了验证本文给出的 Krylov 算法的有效性, 对以下 6 个单阶段测控任务 $task_1, task_2, task_3, task_4, task_5$ 和 $task_6$ 进行计算。假设参与任务的测控设备数分别为 8、9、10、11、12 和 13, 且测控设备的 MTTR 和 MTBF 均为 20 min 和 30 min, 任务持续时间均为 30 min。为简化描述, 假设各任务中设备间均为并联关系。

Ross 方法具有较高的精度, 且当初始矩阵规模较小时算法运行速度很快^[11]; Forward Euler Method(FEM)方法由于思想简单, 因此速度优于龙格-库塔(Runge-Kutta)及亚当姆斯(Adams)等常微分方程方法。A. Rauzy^[13]通过实验指出 FEM 方法在大部分情况下都能得到较好的计算结果。因此, 对任务 $task_1, task_2$ 和 $task_3$, 选择 Ross 方法和 FEM 方法与 Krylov 方法进行比较。各方

法计算所得可靠性结果和算法运行时间分别如表 1 和表 2 所示。其中, Krylov 算法中子空间规模 m 取 10, 记为 Krylov10; Ross 算法迭代次数取 22, 记为 Ross22; FEM 算法步长取 0.0001, 记为 FEM0.00001。

表 1 $task_1, task_2$ 和 $task_3$ 可靠性计算结果对比

Tab. 1 Reliability results of $task_1, task_2$ and $task_3$

测控任务	可靠性结果		
	Krylov10	Ross22	FEM0.00001
$task_1$	0.998 634 667 960 152	0.998 634 667 932 848	0.998 611 691 088 119
$task_2$	0.999 477 331 604 206	0.999 477 331 563 402	0.999 447 929 511 200
$task_3$	0.999 801 098 864 583	0.999 801 098 826 501	0.999 764 500 566 641

表 2 算法运行时间对比

Tab. 2 Running time using different methods

测控任务	算法运行时间(s)		
	Krylov10	Ross22	FEM0.00001
$task_1$	0.012	544.8	86.1
$task_2$	0.015	8584.6	192.1
$task_3$	0.031	136454.6	441.3

由表 1 可以看出, Krylov 方法与 Ross 方法的计算结果相同; 与 FEM 方法的误差分别为 $2.29e-005, 2.94e-005, 3.66e-005$ 。由于 Ross 方法的计算精度较高, 上述结果证明 Krylov 方法能够保证求解精度。算例中的三个测控任务, $task_1$ 的矩阵规模为 256×256 , $task_2$ 的矩阵规模为 512×512 , $task_3$ 的矩阵规模为 1024×1024 。Krylov 方法中子空间规模为 10, 即经过投影后得到一个 10×10 的矩阵, 则投影后矩阵规模分别约为初始矩阵规模的 $1/20, 1/50$ 和 $1/100$, 问题规模大为简化。这一点可以由表 2 的算法运行时间中看出, Krylov 方法的运行时间远小于 Ross 算法和 FEM 算法。

任务 $task_4, task_5, task_6$ 中的矩阵规模分别为 $2048 \times 2048, 4096 \times 4096$ 和 8192×8192 。若采用 Ross 方法计算耗时巨大, 因此选择 FEM 方法与 Krylov 方法进行比较, Krylov 方法子空间规模取 20 进行计算, 记为 Krylov20。各方法计算结果和算法运行时间分别如表 3 和表 4 所示。

由表 3 可得, Krylov 方法与 FEM 方法的计算误差分别为 $4.46e-005, 5.33e-005, 6.29e-005$ 。由表 3 和表 4 可以看出, 对更大规模的问题, Krylov 方法仍然能够保证很高的速度和精度,

性能明显优于 FEM 方法。且由表 2 和表 4 可以看出, Krylov 方法运行时间与子空间规模直接相关, 在 m 不变的情况下, 初始问题中矩阵规模的增大对算法运行时间影响不大。

表 3 $task_4, task_5$ 和 $task_6$ 可靠性计算结果对比

Tab. 3 Reliability results of $task_4, task_5$ and $task_6$

测控任务	可靠性结果	
	Krylov20	FEM0.00001
$task_4$	0.999 924 661 407 427	0.999 880 093 633 056
$task_5$	0.999 971 570 780 607	0.999 918 249 363 040
$task_6$	0.999 989 305 164 251	0.999 926 452 079 351

表 4 算法运行时间对比

Tab. 4 Running time using different methods

测控任务	算法运行时间(s)	
	Krylov20	FEM0.00001
$task_4$	0.3	976.8
$task_5$	0.6	1998.2
$task_6$	1.1	4228.7

由以上分析可以看出, Krylov 子空间简化了问题规模, 提高了计算效率。该方法的运行时间和精度与所选取的子空间规模 m 有关, m 越大, 计算量越大, 结果精度越高; 反之, 计算量小但精度低。关于 Krylov 子空间方法的计算误差, 有以下公式^[15]:

$$\omega(t) - \beta \mathbf{B}_m e^{H_m t} e_1 = t \beta h_{m+1, m} \sum_{k=1}^{\infty} e_m^T \phi_k(H_m t) e_1 (At)^{k-1} b_{m+1} \quad (18)$$

其中, $\phi_k(z)$ 为一组函数, 其定义如下:

$$\begin{cases} \phi_0(z) = e^z, & k < 0 \\ \phi_{k+1}(z) = \frac{\phi_k(z) - \phi_k(0)}{z}, & k \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

当选择某一子空间规模 m 近似计算, 可根据公式(18)右端的前 k 项和对计算误差进行估计。若计算误差不满足预期的精度要求, 可从以下两个方面改善结果精度: (1) 选择较大的 m 值, 能够有效提高精度, 但由于矩阵规模的增大, 计算量的增加也是显著的; (2) 保持子空间规模 m 不变, 选择较小的时间步长 Δt , 通过迭代计算得到 $\omega(t)$ 的近似值。

3 结 论

本文提出了基于 Krylov 子空间技术的航天测控通信系统可靠性分析方法, 将初始问题投影

至小规模子空间中求得其近似解,该方法简化了问题复杂度,提高了求解效率。算例证明,Krylov 子空间方法比 Ross 方法和 FEM 方法具有更快的求解速度,通过选取合理的子空间规模,计算结果也具有较高的精度。在数值实验中也发现,当设备数量较多时(如 20 个),Markov 模型转移速率矩阵为 1 048 576 阶方阵,则矩阵的生成将占用大量时间,甚至会因为内存溢出而无法生成。因此,下一步要解决转移速率矩阵的快速生成和大规模条件下的矩阵存储问题。

参考文献 (References)

- [1] 于志坚. 我国航天测控系统的现状与发展[J]. 中国工程科学, 2006, 8(10):42-46.
YU Zhijian. Status quo and development of spaceflight TT&C systems[J]. Engineering Science, 2006, 8(10): 42-46. (in Chinese)
- [2] 于志坚. 载人航天测控通信系统[J]. 宇航学报, 2004, 25(3):247-250.
YU Zhijian. TT&C and communication system of Chinese manned space flight[J]. Journal of Astronautics, 2004, 25(3): 247-250. (in Chinese)
- [3] Esary J D, Ziehms H. Reliability analysis of phased missions [C]//Proceedings of the Conference on Reliability and Fault Tree Analysis, Philadelphia, USA; SIAM, 1975: 213-236.
- [4] Xing L D, Dugan J B. Analysis of generalized phased-mission system reliability, performance, and sensitivity [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2002, 51(2):199-211.
- [5] Mura I, Bondavalli A. Markov regenerative stochastic petri nets to model and evaluate phased mission systems dependability[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2001, 50(12): 1337-1351.
- [6] Liu D, Zhang C Y, Xing W Y, et al. Reliability analysis of phased-mission systems using Bayesian networks[C]//Annual Reliability and Maintainability Symposium, Las Vegas, NV, USA, 2008: 21-26.
- [7] Alam M, Al-Saggaf U M. Quantitative reliability evaluation of repairable phased-mission systems using Markov approach[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1986, R-35(5): 498-503.
- [8] Somani A K, Ritcey J A, Au Stephen H L. Computationally-efficient phased-mission reliability analysis for systems with variable configurations[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1992, 41(4):504-511.
- [9] Dugan J B. Automated analysis of phased-mission reliability[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1991, 40(1):45-52.
- [10] Moorsel A P A V, Sanders W H. Transient solution of Markov models by combining adaptive and standard uniformization [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1997, 46(3): 430-440.
- [11] Ross S M. Introduction to probability models[M]. Academic Press, 2007.
- [12] Stewart W J. Introduction of the numerical solution of Markov chains[M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
- [13] Rauzy A. An experimental study on iterative methods to compute transient solutions of large Markov models [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 86(1):105-115.
- [14] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems[M]. New York: PWS Publishing, 1996.
- [15] Saad Y. Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1992, 29:209-228.