

## 增压充液贮箱振动特性的理论与实验\*

雷勇军, 杨震, 王成龙, 宋先村, 李道奎  
(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**结合理论与实验方法研究了增压充液贮箱的振动特性。采用弹性薄壳理论和速度势理论建立了增压充液贮箱的动力学方程组。考虑内部加压对贮箱振动的影响,引入内外压差作用项;考虑弹性壳体与液体间的耦合作用,给出液体动压的表达式。采用经典边界值法计算出贮箱振动频率;设计贮箱模型进行固有振动频率的实验测试。所得计算结果与实验值一致,均表明充液使贮箱振动频率下降,而内部加压使贮箱振动频率增加。进一步分析,得到增压充液贮箱振动频率随波数、贮箱内压、充液密度、贮箱几何参数和材料刚度等因素的变化规律。

**关键词:**增压充液贮箱;振动分析;边界值法

**中图分类号:**V421.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2012)05-0015-06

## Theory and experiment for vibration analysis of liquid-filled tank with internal pressure

LEI Yongjun, YANG Zhen, WANG Chenglong, SONG Xiancun, LI Daokui

(College of Aerospace and Materials Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A theoretical and experimental investigation of the vibration characteristics of fluid-filled tank with internal pressure is presented. The dynamic equations of vibration are based on the elastic mechanics and velocity potential theory. The form related to the difference of pressure inside and outside was given by analysis of its effects on the tank. Also the form related to the solid-fluid interaction was given by analysis of its effects. The classic boundary-value approach was used here to calculate the natural frequencies of the tank. A modal experiment about vibration characteristics of fluid-filled tank with internal pressure was conducted, and the frequencies were measured. Results of theoretical calculation agree with the experimental data, which indicates that the frequencies of the tank decrease when filled with liquid, but they increases with internal pressure, compared with that of the empty tank. Further analysis of the results shows the effects of factors, such as the wave number, internal pressure, fluid density, structural geometric parameters and flexural rigidity of the tank on the dynamical behaviors.

**Key words:** fluid-filled tank with pressure; vibration analysis; boundary-value approach

圆柱形薄壳贮箱内液体推进剂与壳体的耦合振动对整个飞行器的稳定和安全飞行有着重大影响,而分析和试验确定其振动特性是航空航天中一个难题<sup>[1-3]</sup>。随着理论和实验技术的不断发展,国内外学者对常压下充液圆柱壳的动力特性进行了大量研究。Donnel<sup>[4]</sup>建立了空圆柱壳的振动模型,通过公式和曲线给出了其振动频率的理论结果,并精确分析了贮箱长径比为零和无穷大两种极限情况下的振动特性;朱大同<sup>[5]</sup>采用梁函数逼近和有限 Hankel 变换法计算了常压空壳和充液壳的振动频率并讨论了各阶频率与周波数的关系;梁波<sup>[6]</sup>采用有限元方法分析了部分充液圆柱壳的动力特性;万水和朱德懋<sup>[7]</sup>采用半解析有限元法分析了液固耦合系统的模态特性,并给出了理论和实验的对比结果;Amabil<sup>[8]</sup>采用丹尼尔

薄壳理论和迦辽金法对充液圆柱壳的动力特性和振型进行了分析;张树瑜等<sup>[9]</sup>采用空间等效摆模型研究了充液贮箱振动特性和液固耦合机理;Laki 等<sup>[10]</sup>根据 Sander 薄壳理论和有限元法,发展了对低阶和高阶振动频率都有较高精度的充液圆柱壳的半解析法,并通过数值计算和实验分析了液固耦合振动特性。

工程中圆柱形充液贮箱内部一般都需要增压,目前国内外只有少数学者对其动力特性展开研究,Sabri<sup>[11]</sup>根据 Sander 薄壳理论,采用有限元方法对部分充液、内部加压的圆柱壳形贮箱的振动特性进行了研究,并给出了数值计算和不增压情况下现有试验数据的对比结果,分析了贮箱几何参数(长度、半径、厚度)对振动特性的影响。为了充分认识和研究增压充液贮箱的振动特性,

\* 收稿日期:2012-04-26

基金项目:教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-08-0148);2009年度校级本科学员创新性实验计划项目

作者简介:雷勇军(1968—),男,湖南澧县人,教授,博士,博士生导师,E-mail:leiyj108@nudt.edu.cn

本文首先全面考虑内部充液、增压对贮箱振动特性的影响,建立振动动力学方程并采用经典边界值法求解,计算得到振动频率;其次进行增压充液贮箱的振动实验,测得不同工况下的振动频率,并与理论计算值进行对比,验证条件假设、动力学方程和求解方法的正确有效性;最后通过数值仿真详细分析了环向波数、增压、贮箱几何参数、贮箱材料及充液物质等因素对增压充液贮箱固有频率的影响规律。

## 1 增压充液贮箱动力学方程组

圆柱形贮箱充满液体且内部加压,由于液体内部流动作用,贮箱表面会出现微小弹性变形,截面图如图 1 所示。

假设液体理想无旋、不可压、满足速度势理论<sup>[12]</sup>,圆柱壳为弹性壁、刚性底,材料满足均匀、

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z_0^2} + \frac{1}{2}(1-\mu) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2\gamma_1} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta \partial z_0} + \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{\partial w_0}{\partial z_0} = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \bar{q}_z \\ \frac{1+\mu}{2\gamma_1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial z_0} + \frac{1}{2\gamma_1^2}(1-\mu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - k \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} + \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial z_0^2 \partial \theta} \right) = \rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \bar{q}_\theta \\ \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 + k \left( \frac{1}{\gamma_1^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial z_0^4} + \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial z_0^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} \right) - \\ \frac{1}{J} \left( N_z \frac{\partial^2 w_0}{\gamma_1^2 \partial z_0^2} + S_1 \frac{\partial^2 w_0}{\gamma_1 \partial z_0 \partial \theta} + N_\theta \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) = -\rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \bar{q}_r \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $O-r\theta z$  为贮箱圆柱坐标系,  $Or, O\theta, Oz$  分别表示径向、周向和轴向;  $J = \frac{Eh}{(1-\mu^2)}$ ,  $\gamma_1 = \frac{L}{R}$ , 无

量纲参数  $(z_0, r_0) = \frac{1}{L}(z, r)$ ,  $(u_0, v_0, w_0) = \frac{1}{h}(u,$

$v, w)$ ,  $(\bar{q}_r, \bar{q}_\theta, \bar{q}_z) = \frac{(1-\mu^2)R^2}{Eh^2}(q_r, q_\theta, q_z)$ ,

$\bar{\rho} = \frac{\rho_s(1-\mu^2)R^2}{E}$ ,  $k = \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2$ ,  $t$  为时间,  $u, v, w$  为

$z, \theta, r$  方向的位移,  $R$  为曲面的曲率半径,  $h$  为壳体厚度,  $L$  为壳体长度,  $q$  为外载荷,  $E, \mu$  分别为壳体材料杨氏模量和泊松比,  $\rho_l, \rho_s$  分别为液体、壳体密度,  $N_z$  为轴向正压力,  $N_\theta$  为周向正压力,  $S_1$  为周向剪切力。

贮箱上、下底 ( $z_0 = 1, 0$ ) 简支, 即

$$v_0|_{z_0=0,1} = w_0|_{z_0=0,1} = 0 \quad (2)$$

$t = 0$  时, 初始条件为

$$u_0 = v_0 = w_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial w_0}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

增压充液贮箱内部加压使得壳体存在预应

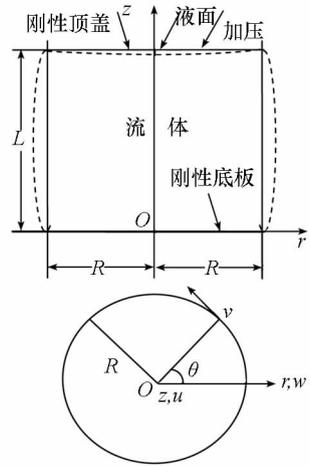


图 1 增压充液圆柱形贮箱示意图

Fig. 1 The sketch of fluid-filled tank with pressure line elasticity, isotropy and small deformation conditions. According to the theory of thin shell elasticity<sup>[13]</sup>, in the fluid-filled tank the dimensionless dynamic equation group is

力, 由薄壁圆筒受力平衡可知, 其影响体现在动力学方程组中正压力  $N_z, N_\theta$  上, 即

$$\begin{cases} N_z = \frac{\Delta P \times R}{2} \\ N_\theta = \Delta P \times R \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\Delta P$  为圆柱壳的内外压力差。

综合考虑圆柱壳与液体的相互作用, 圆柱壳在下底面和内壁面上与液体具有相同的速度, 可得边界条件为

$$\begin{cases} z_0 = 0 & \frac{\partial \phi}{\partial r_0} = 0 \\ 0 < z_0 < 1 & hR \frac{\partial w_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r_0} \Big|_{r_0=1} \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\phi$  为圆柱壳内液体的速度势函数, 用  $U$  表示液体重力势能,  $\phi$  满足 Bernoulli 方程与 Laplace 方程, 即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} - U = \text{const} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

对不同的轴向波数  $m$  和周向波数  $n$ , 根据文献[12], 由变分原理可得液体对于壳体动压为

$$-\rho_l \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\theta_0=1} = -\frac{\rho_l R}{\rho_s h} F_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$F_2 = \frac{1}{n} + \sum_s \frac{2}{\left(1 - \frac{n^2}{s^2}\right) s^2 (s^2 L^2 + m^2 \pi^2)} (-m^2 \pi^2) \quad (9)$$

式中,  $s$  为  $J'_n(s) = 0$  的正根集,  $J_n(s)$  是第一类  $n$  阶贝塞尔函数, 将动压项代入 (1) 式,  $\frac{\rho_l R}{\rho_s h} F_2$  可看作液体对圆柱壳的附加质量。

### 2 动力学方程组求解方法

设壳体作谐振动, 用梁函数逼近壳面位移<sup>[14]</sup>, 三个分量可表示为

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} A_n \frac{L}{\kappa_m} B'(mz_0) \cos n\theta e^{i\Omega t} \\ D_n B(mz_0) \sin n\theta e^{i\Omega t} \\ C_n B(mz_0) \cos n\theta e^{i\Omega t} \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $m$  为轴向波数,  $n$  为周向波数,  $\kappa_m$  为特征值, 它由壳体两端简支条件确定,  $\Omega$  为增压充液壳的自振频率;  $B(mz_0)$  为梁函数, 对两端简支的圆柱壳, 壳面位移中的梁函数可取:  $B(mz_0) = \sin \frac{m\pi z_0}{L}$ ;  $B'(mz_0)$  为梁函数对  $z_0$  的一阶导数。将 (10) 式代入 (1) 式可得

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \bar{\rho} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ \bar{\rho} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中,  $E_{11} = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + (1 - \mu) n^2 / 2 - pw_n^2$ ,

$$E_{12} = -(1 + \mu) \frac{m\pi}{L} n / 2, E_{13} = \mu \frac{m\pi}{L},$$

$$E_{21} = -(1 + \mu) \frac{m\pi}{L} n / 2, E_{31} = \mu \frac{m\pi}{L},$$

$$E_{22} = n^2 + (1 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} / 2$$

$$+ k [n^2 + 2(1 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{L^2}] - pw_n^2$$

$$E_{23} = -\{n + k [n^3 + (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} n]\},$$

$$E_{32} = -\{n + k [n^3 + (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} n]\},$$

$$E_{33} = 1 + k \left( \frac{m^4 \pi^4}{L^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} n^2 + n^4 \right) +$$

$$\left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} N_\theta + n^2 N_z \right) / J - [1 + p_l R / (p_s h) F_2] pw_n^2$$

采用经典的边界值法, 求解 (12) 式即可得系统固有振动频率  $\omega_n$  值。

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (13)$$

### 3 增压充液贮箱振动实验

为了充分认识和研究增压充液贮箱的振动特性, 验证理论假设的合理性以及计算结果的可信性, 进行了增压充液贮箱的振动实验, 测出了贮箱空壳、充液及加压状态的固有频率, 并在下一节中比较计算与实验结果, 分析影响贮箱振动频率的因素及其作用规律。

试验现场仪器安装如图 2 所示。实验设备有安装振动信号采集分析软件的计算机, XH5861 动态应变测试分析系统, 压电加速度传感器, 变送器, 油车 (用于充液贮箱的加压), 力锤。

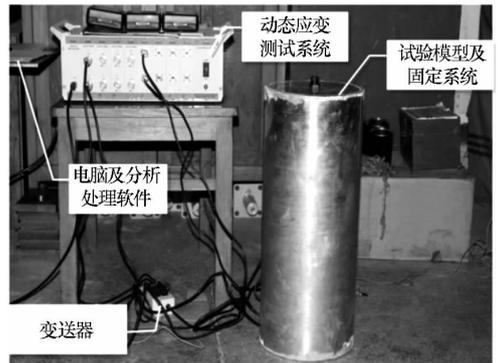


图 2 试验现场仪器安装示意图

Fig. 2 The experiment instrument installation sketch map

实验原理如图 3 所示, 采用外力敲击的方法<sup>[9]</sup>。用力锤激振, 安装在简支固定的贮箱侧壁上的加速度传感器测得加速度信号, 经变送器转化为电信号并放大后送入 XH5861 动态应变测试分析系统中, 再经过振动信号采集分析软件进行傅立叶变换, 得到增压充液贮箱的固有振动频率曲线。

实验过程中, 首先测试贮箱空壳振动频率, 再将箱内加满水进行测试, 最后利用油车对充液贮箱内部加压 (从常压到 10 个大气压)。采用油车液压进行增压, 因此只能对全充液的贮箱进行实验, 由于贮箱材料的限制, 在弹性变形假设条件下, 最大只能承受 10atm 的内部压力。

在实验中只能测出振动能量较大的低阶振动频率,且不能分辨各阶频率对应的振型(即对应  $m, n$  的值),本文通过与数值计算结果比对来判断,如果在实验中测得的振动频率与某振型下数值计算的频率值接近,就认为是该振型下的实验频率值,这是合理的。

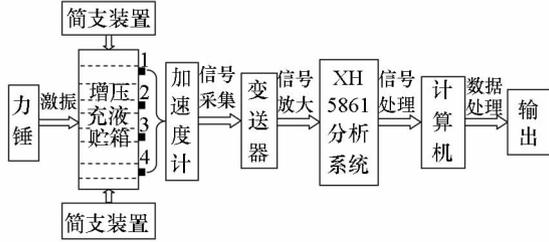


图 3 实验原理图

Fig. 3 Experiment principle diagram

### 4 结果分析

#### 4.1 计算结果与实验结果对比

实验模型根据某运载火箭贮箱尺寸缩比得到:圆柱形贮箱高 0.5m,半径 0.1m,壁厚 0.003m,上下为刚性平面(筒支固定),材料为硬铝,密度  $2.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,模量 65GPa,泊松比是 0.33,强度 250MPa,焊接系数为 0.5,充液物质为水,密度为  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,重力加速度为  $9.8 \text{ m/s}^2$ 。

表 1~表 3 给出了空壳、充液壳和增压充液壳三种工况下,前 5 阶贮箱振动频率的计算与实验对比结果,表 3 中贮箱内部压力为 5 个大气压。由于部分较高阶频率对应的振动能量较小,试验仪器未能测量出其振动频率。

表 1 常压空贮箱固有频率计算值与实验值对比

Tab. 1 Natural frequency of tank with atmospheric pressure

波数	阶数	计算值 (Hz)	实验值 (Hz)	相对误差 (%)
$m = 1 \ n = 3$	1	633.946	629.821	0.652
$m = 1 \ n = 2$	2	643.766	645.055	0.200
$m = 1 \ n = 4$	3	1062.980	1078.572	1.47
$m = 2 \ n = 3$	4	1248.061	1261.510	1.08
$m = 2 \ n = 4$	5	1305.262	—	—

表 2 常压充液贮箱固有频率计算值与实验值对比

Tab. 2 Natural frequency of fluid-filled tank with atmospheric pressure

波数	阶数	计算值 (Hz)	实验值 (Hz)	相对误差 (%)
$m = 1 \ n = 2$	1	274.049	275.322	0.465
$m = 1 \ n = 3$	2	299.036	293.502	1.85
$m = 1 \ n = 4$	3	547.604	524.059	4.30
$m = 2 \ n = 3$	4	600.571	601.090	0.0864
$m = 1 \ n = 1$	5	603.468	—	—

表 3 5atm 充液贮箱固有频率计算值与实验值对比

Tab. 3 Natural frequency of fluid-filled tank with 5 times atmospheric pressure

波数	阶数	计算值 (Hz)	实验值 (Hz)	相对误差 (%)
$m = 1 \ n = 2$	1	287.020	292.365	1.86
$m = 1 \ n = 3$	2	334.369	332.040	0.697
$m = 1 \ n = 4$	3	590.942	572.399	3.14
$m = 1 \ n = 1$	4	604.407	—	—
$m = 2 \ n = 3$	5	621.023	—	—

由表 1~表 3 数据可知,不同工况下贮箱振动频率的实验值与计算值吻合得很好,验证了本文对增压充液贮箱的动力学分析结果是正确有效的;由表 1、表 2 可知,贮箱内液体使得壳体结构耦合振动频率明显下降,这是液体对壳体附加质量项的作用结果。

由表 2、表 3 可知,内部加压作用使得壳体结构的每一阶振动频率都升高; $n$  值越大,增加的相对幅度越大; $m$  值越大,增加的相对幅度越小。例如  $m = 1, n = 1, 2, 3$  时,增加的相对幅度分别为: 0.16%, 4.73%, 11.8%;  $n = 1, m = 1, 2, 3$  时,增加的相对幅度分别为: 0.16%, 0.049%, 0.046% (数据见图 5、图 6),即增压也使得不同振型频率的相对关系发生了变化。因此在液体火箭发动机中,推进剂贮箱内液体与加压对于火箭整体动力特性的影响必须加以考虑。

理论计算值是在圆柱壳材料均匀、线弹性且液体无粘的假设条件下获得的,而实验中由于贮箱加工误差,仪器测量误差,以及加压后贮箱轻微塑性变形等因素的影响,实验值与计算值存在微小偏差,但相对误差均小于 5%。

#### 4.2 增压充液贮箱固有频率的影响因素分析

由图 4~图 6 可知,增压充液贮箱固有频率随周向波数的变化规律与空壳一致:随着轴向波数  $m$  的增加,最容易激发基频振动向较高周向波数  $n$  迁移,这说明空壳振动的能量极小值原理在

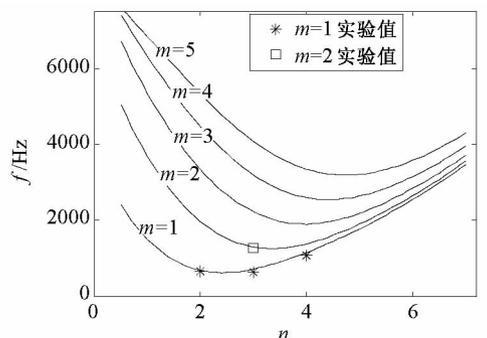


图 4 常压空贮箱固有频率与周波数关系

Fig. 4 The natural frequency of tank vary with  $\theta$  direction waves

增压充液贮箱中同样适用(图6中贮箱内部压力为5atm)。

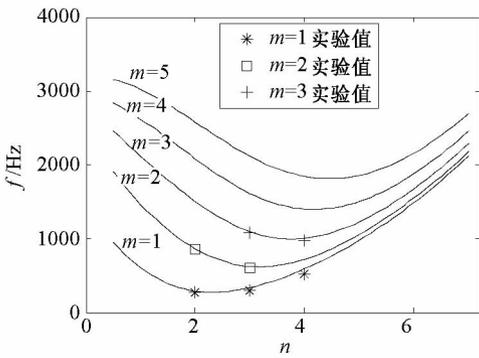


图5 常压充液贮箱固有频率与周向波数关系  
Fig. 5 The natural frequency of fluid-filled tank vary with  $\theta$  direction waves

升高。

图8~图10给出了内部压力为10atm的增压充液贮箱固有频率随贮箱材料和尺寸的变化规律。由图8~图10可知,增压充液贮箱的固有频率随贮箱长径比( $L/R$ )的增大而迅速减小;随贮箱壁厚与半径比值( $h/R$ )的增大而迅速增大;随材料刚度 $E$ 的增大而增大。

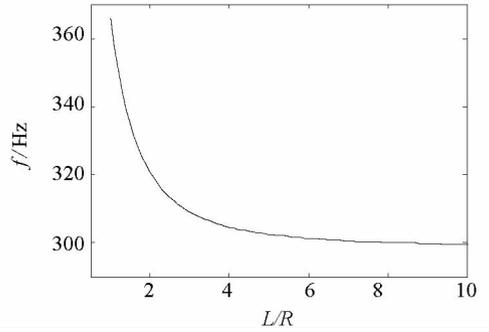


图8 增压充液贮箱固有频率与贮箱长径比关系  
Fig. 8 The natural frequency of fluid-filled tank vary with the value of  $L/R$

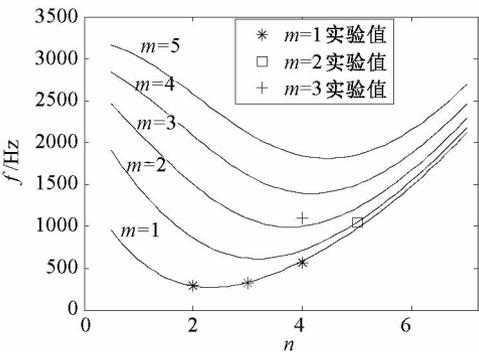


图6 增压充液贮箱固有频率与周波数关系  
Fig. 6 The natural frequency of fluid-filled tank with pressure vary with  $\theta$  direction waves

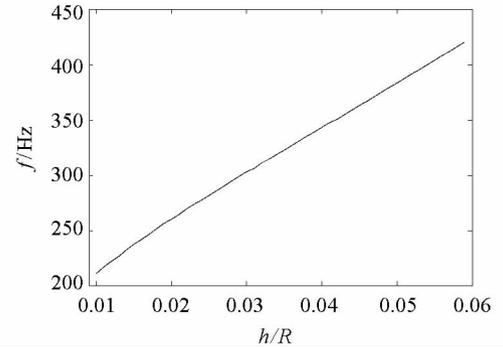


图9 增压充液贮箱固有频率与贮箱厚径比关系  
Fig. 9 The natural frequency of fluid-filled tank vary with the value of  $h/R$

图7给出了内部压力在20atm以内,增压充液贮箱的固有频率随内部压力的变换规律。由于实验仪器的限制,压力只能增加到10atm,且压强变化值小于5atm时,贮箱固频变化很小,实验仪器很难分辨,因此只给出了内部压力分别为1atm、5atm、10atm的实验值。

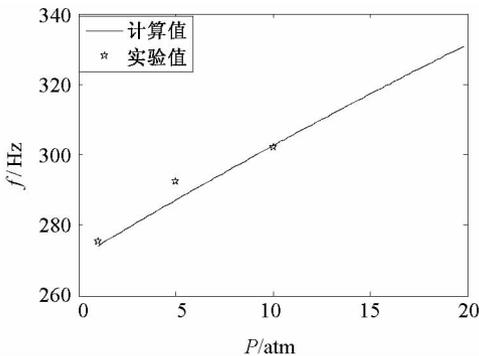


图7 增压充液贮箱固有频率与贮箱内部压强关系  
Fig. 7 The natural frequency of fluid-filled tank vary with inertial pressure

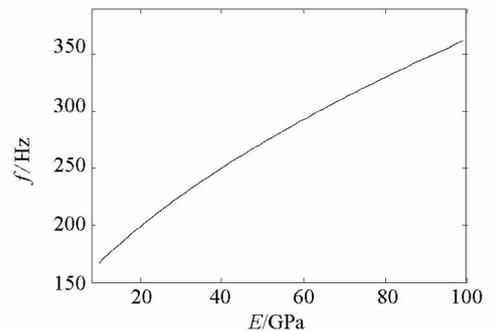


图10 增压充液贮箱固有频率与贮箱材料模量关系  
Fig. 10 The natural frequency of fluid-filled tank vary with the value of  $E$

由图7可知,计算值与实验值吻合良好,且增压充液贮箱的固有频率随内部压力的增大而明显

图11给出了内部压力为10atm的增压充液贮箱固有频率随液固密度比( $\rho_l/\rho_s$ )的变化规律。由图11可知,增压充液贮箱的固有频率随所充液物质密度与贮箱材料密度比值( $\rho_l/\rho_s$ )的增大而减小。

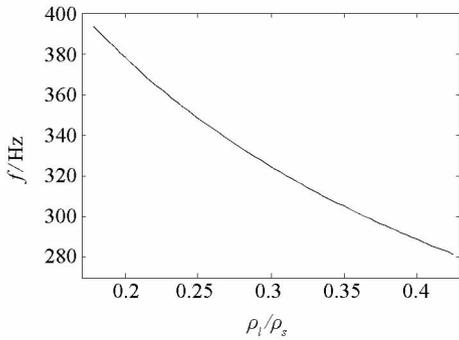


图 11 增压充液贮箱固有频率与液固密度比关系

Fig. 11 The natural frequency of fluid-filled tank vary with the value of  $\rho_l/\rho_s$ .

## 5 结 论

引入内部加压作用项,建立增压充液贮箱的动力学模型,通过试验验证其正确有效性,并分析了充液、内部压强、贮箱几何参数等因素对其振动频率的影响规律。结果表明,贮箱固有频率:

(1) 随内部充液而降低,随内部加压而增大;

(2) 随  $m$  增加而增加,随  $n$  增加先减小后增大,且  $m$  值越大,增加的相对幅度越小, $n$  值越大,增加的相对幅度越大,增压也使得不同振型频率的相对关系发生了变化;

(3) 随贮箱长径比增大而迅速减小,随贮箱壁厚与半径比增大而迅速增大;

(4) 随材料刚度的增大而增大,随充液物质密度与贮箱材料密度比增大而减小。

贮箱振动特性的影响规律,可以为大型航天器、液体火箭的发射及大体积卫星的姿态控制提供重要指导。本文的研究结果仅适用于液体充满、液体晃动幅值与贮箱尺寸相比较小的情况;对于部分充液<sup>[14-15]</sup>或液体大幅晃动出现非线性效应的情况<sup>[16]</sup>,系统将产生分叉和混沌运动,需进一步讨论。

## 参考文献 (References)

[1] Abramson H N. The dynamic behavior of liquids in moving mountainers[J]. NASA, SP-106, 1966.

[2] 尹立中. 航天工程中液体大幅晃动及贮箱类液固耦合动力学研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 1999.  
YIN Lizhong. A study on large-scale amplitude sloshing of fluid in space engineering and dynamics of container solid-fluid interaction [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 1999. (in Chinese)

[3] 杜颖, 刘习军, 贾启芬. 液固耦合动力学问题的研究[J]. 机床与液压, 2004, 11: 9-12.  
DU Ying, LIU Xijun, JIA Qifen. A study on dynamics of solid-fluid interaction [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2004, 11: 9-12. (in Chinese)

[4] Donnel L H. Stability of thin-walled tubes under torsion[R]. NASA Scientific and Technical Information Facility, Aug, 1965, 672: 1-24.

[5] 朱大同. 充液圆柱壳的自振特性[J]. 力学学报, 1984, 16(2): 141-150.  
ZHU Datong. On the free vibration of a circular cylindrical shell filled with liquid[J]. Acta Mechanica Sinica. 1984, 16(2): 141-150. (in Chinese)

[6] 梁波. 弹性贮液圆柱壳的动力学特性分析[J]. 国防科技大学学报, 1990, 12(2): 30-35.  
LIANG Bo. The dynamic characteristics analysis of flexible liquid storage cylinder[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1990, 12(2): 30-35. (in Chinese)

[7] 万水, 朱德懋. 圆柱贮液器固液耦合模态分析[J]. 工程力学, 2000, 17(3): 87-92.  
WAN Shui, ZHU Demao. Solid-liquid coupling modal analysis of cylindrical tank [J]. Engineering Mechanics, 2000, 17(3): 87-92. (in Chinese)

[8] Amabili M. Theory and experiments for large-amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells with imperfections[J]. Journal of Sound and Vibration. 2003, 262: 921-975.

[9] 张树瑜, 郭文彦, 李彩凤, 等. 轴对称充液贮箱有加速度时的等效建模[J]. 上海航天, 2009, 3: 1-7.  
ZHANG Shuyu, GUO Wenyan, LI Caifeng, et al. Equivalent modeling for axisymmetric tank of spacecraft with accelerate [J]. Aerospace Shanghai, 2009, 3: 1-7. (in Chinese)

[10] Lakis A A, Bursuc G, Toorani M H. Sloshing effect on the dynamic behavior of horizontal cylindrical shells[J]. Nuclear Engineering and Design, 2009, 239: 1193-1206.

[11] Sabri F, Aouni Lakis A. Hydroelastic vibration of partially liquid-filled circular cylindrical shells under combined internal pressure and axial compression [J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15: 237-248.

[12] 徐晓贤. 贮箱类流固耦合系统的动力学分析[D]. 长沙: 湖南大学, 2006.  
XU Xiaoxian. The analysis on dynamics of container solid-fluid interaction [D]. Changsha: Hunan University, 2006. (in Chinese)

[13] 刘鸿文. 板壳理论[M]. 浙江大学出版社, 1986.  
LIU Hongwen. Theory of plate and shells [M]. Zhejiang University Press, 1986. (in Chinese)

[14] Amiri M, Sabbagh-Yazdi S R. Influence of roof on dynamic characteristics of dome roof tanks partially filled with liquid [J]. Thin-Walled Structures, 2012, 50: 56-67.

[15] Rebouillat S, Liksonov D. Fluid-structure interaction in partially filled liquid containers: A comparative review of numerical approaches[J]. Computers & Fluids, 2010, 39: 739-746.

[16] Ikeda T, Ibrahim R A. Nonlinear random responses of a structure parametrically coupled with liquid sloshing in a cylindrical tank[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 284: 75-102.