

# Beltrami 流及其在图像去噪中的应用\*

王泽龙, 朱炬波

(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 偏微分方程是图像处理主要的方法之一, 一般通过其对应的变分模型给出方程的意义, 并依此设计优化原偏微分方程以取得最佳的处理效果。针对图像去噪问题, 基于经典的 Beltrami 几何流方法提出了图像流形上一种新的度量张量模型, 具有该度量模型的 Beltrami 流具有清晰的几何意义, 并依此提出了该度量模型中参数的优化选择方法。同时, 该模型为经典的偏微分方程去噪方法提供了统一框架, 且参数的优化选择使得 Beltrami 流在平滑噪声与边缘保持方面取得了良好的平衡。实验表明该方法提高了图像去噪效果, 尤其是对于边缘丰富的图像效果更加明显。

**关键词:** Beltrami 流; 度量张量; 图像去噪; 边缘增强; 相关增强

**中图分类号:** TP751 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2012)05-0137-05

## Beltrami flow and its application in image denoising

WANG Zelong, ZHU Jubo

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Partial differential equation (PDE) is one of the main methods for image processing and its significance is usually shown by the corresponding variable model, according to which the PDE can be optimized further to reach ideal results. Based on the classic Beltrami flow for image processing, a new metric tensor model on the image manifold is proposed for image denoising. The Beltrami flow with this metric tensor has clear geometrical significance, which induces the optimal selection method for parameters in the metric tensor. Meanwhile, this model provides a unified framework for the classic PDE based image denoising methods and the optimal selection method for its parameters makes the Beltrami flow have a better balance between smoothing the noise and preserving the edges. The experiment results show that the image denoising quality is greatly improved, especially for the images with abundant edges.

**Key words:** Beltrami flow; metric tensor; image denoising; edge enhancement; coherence enhancement

图像去噪是图像处理中的经典问题, 目前有诸多处理方法, 如统计方法<sup>[1-3]</sup>、小波方法<sup>[4]</sup>、变分法<sup>[5]</sup>、偏微分方程方法等。几何流方法作为偏微分方程方法中的一类, 不仅帮助解决了重大的理论问题, 如拓扑学中的庞加莱猜想, 还在工程领域展示出巨大的潜力。Beltrami 流<sup>[6-7]</sup>在几何流方法中是一种较为成熟的理论, 虽然在过去的几年已经在图像处理等工程领域进行了有益的尝试<sup>[8-11]</sup>, 但是还远远不能满足应用的需求, 其制约瓶颈在于如何根据图像处理的具体任务构造图像流形上合适的度量张量。

最先引入图像去噪领域的偏微分方程(PDE)方法是各项同性扩散<sup>[12]</sup>, 即高斯滤波, 它能很好地平滑噪声, 但是在边缘保持方面效果不佳, 原因在于扩散的各项同性。Perona 与 Malik 进而提出

了各项异性扩散方程<sup>[13-14]</sup>来进行图像去噪, 其基本原理是在图像边缘处降低扩散速度, 而主要在光滑区域进行扩散滤波, 这样便可较好地保持边缘。另一种改进思路是方向扩散<sup>[15]</sup>, 即仅在平行边缘方向进行扩散, 取消垂直方向扩散。这两种思路都在一定程度上提高了图像去噪效果, 但是存在边缘处去噪效果差与块状效果等问题。Beltrami 流是一种定义在图像流形上的热扩散方程, 具有非常清晰的几何意义, 上述经典的 PDE 去噪方法可以看作是 Beltrami 流方法的特例。由于图像流形的度量张量结构直接决定了 Beltrami 流的扩散效果, 因此, 构造性质优良的度量张量模型可以使得 Beltrami 流有效克服经典 PDE 面临的问题, 在图像的噪声平滑与边缘保持方面取得很好的平衡。

\* 收稿日期: 2012-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60872152)

作者简介: 王泽龙(1985—), 男, 河北保定人, 博士研究生, E-mail: zelong.wang@nudt.edu.cn;

朱炬波(通信作者), 男, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: ju\_bo\_zhu@yahoo.com.cn

# 1 图像流形上的 Beltrami 流

## 1.1 图像流形

灰度图像通常定义为二维坐标空间  $\Omega$  到一维实空间  $\mathbf{R}$  的连续映射:

$$I: (x^1, x^2) \rightarrow I(x^1, x^2) \quad (1)$$

其中,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  为一有界区域。假设  $(D, g)$  为一图像流形, 其中  $g$  为其度量张量,  $D$  定义为

$$D = \{(x^1, x^2) | (x^1, x^2) \in \Omega\} \quad (2)$$

则图像流形为一个二维流形。进一步假设  $(M, h)$  为具有局部坐标  $(X^i)_{i=1}^n$  的  $n$  维特征空间流形, 从图像流形到特征空间流形的嵌入映射不妨设为

$$F: (x^1, x^2) \rightarrow (X^1(x^1, x^2), \dots, X^n(x^1, x^2)) \quad (3)$$

对于灰度图像, 嵌入映射可选择为

$$\begin{cases} X^1 = x^1 \\ X^2 = x^2 \\ X^3 = I(x^1, x^2) \end{cases} \quad (4)$$

则特征空间为三维流形: 二维的坐标空间与一维的灰度值空间。

图像流形与其特征空间流形具有密切的联系。由于在两者之间存在嵌入映射(3), 因此图像流形可看作是高维特征空间流形的低维子流形, 且特征空间流形的度量张量可诱导出图像流形的度量张量:

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^j}{\partial x^\beta}, \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5)$$

其中,  $g_{\alpha\beta}$  与  $h_{ij}$  分别是度量张量  $g$  与  $h$  的分量。因此, 高维特征空间流形中的图像完全可通过合适的嵌入映射诱导到低维的图像流形中处理, 且图像流形通过式(5) 继承图像信息。

## 1.2 Beltrami 流

图像去噪通常需要极小化嵌入映射(3) 的 Polyakov 能量:

$$W(F; D, M) = \iint_{\Omega} \sqrt{\det(g)} g^{\alpha\beta} \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^j}{\partial x^\beta} h_{ij} dx^1 dx^2 \quad (6)$$

其中, 上式采用爱因斯坦求和符号,  $\det(g)$  是度量张量  $g$  的行列式,  $g^{\alpha\beta} = (g^{-1})_{\alpha\beta}$ 。当极小化式(6) 时, 由变分原理可得到梯度下降方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^i}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \sqrt{\det(g)} g^{\alpha\beta} \frac{\partial X^i}{\partial x^\beta} \right) \\ &+ \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial X^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^k}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}, i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \left[ h^{il} \left( \frac{\partial h_{lk}}{\partial X^j} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial X^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial X^l} \right) \right] \quad (8)$$

为 Levi-Civita 系数,  $h^{ij} = (h^{-1})_{ij}$ 。

若仅考虑特征空间流形为欧氏度量张量, 则

$$\Gamma_{jk}^3 = 0, j, k = 1, 2, 3 \quad (9)$$

将式(8) 与(4) 代入式(7), 且令(7) 式中  $i = 3$  得

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \operatorname{div} \left[ \sqrt{\det(g)} g^{-1} \nabla I \right] \quad (10)$$

其中,  $\operatorname{div}$  与  $\nabla$  分别表示与欧氏度量相关的散度与梯度算子。由于与度量张量  $g$  相关的 Laplace-Beltrami 算子定义为

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \sqrt{\det(g)} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \quad (11)$$

因此, 式(10) 可重写为

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta_g I \quad (12)$$

式(12) 即为图像流形  $(D, g)$  上的 Beltrami 流。为了使其具有更加广泛的适用性, 一般将式(12) 写为:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = C(|\nabla I|) \cdot \Delta_g I \quad (13)$$

其中,  $C(|\nabla I|)$  为一系数函数。

Beltrami 流在图像去噪方面具有独特的优势。一方面, 它从高维的图像特征空间流形回归到低维的图像流形, 维数的缩减为处理带来极大的方便; 另一方面, 它随着方程的演化不断更新驱动方程演化的度量张量, 提高了处理效果。此外, 图像去噪效果的提高还依赖于图像流形的度量张量  $g$  的构造。

## 2 度量张量模型

式(5) 表明图像流形的度量张量  $g$  决定于特征空间流形的度量张量  $h$  与嵌入映射  $F$ 。假设

$$h_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

则诱导出图像流形上不同的度量张量为

$$g_i = \begin{pmatrix} 1 + iI_x^2 & iI_x I_y \\ iI_x I_y & 1 + iI_y^2 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

其中,  $I_x$  与  $I_y$  分别为图像在  $x$  与  $y$  方向的梯度。所以, 图像的不同度量张量对应着不同的特征空间流形, 对度量张量  $g$  的建模体现对图像几何特征的理解, 也决定着图像流形上 Beltrami 流的扩散效果。

式(15) 是经典的 PDE 图像处理所参考的度

量张量,下面的度量张量模型推广了式(15):

$$g = \begin{pmatrix} f + \lambda_1 I_x^2 + \lambda_2 I_y^2 & (\lambda_1 - \lambda_2) I_x I_y \\ (\lambda_1 - \lambda_2) I_x I_y & f + \lambda_1 I_y^2 + \lambda_2 I_x^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} f = f(|\nabla I|) \geq 0 \\ \lambda_1 = \lambda_1(|\nabla I|) \geq 0 \\ \lambda_2 = \lambda_2(|\nabla I|) \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

分别为关于图像梯度的非负函数参数。经证明,度量张量(16)满足度量张量定义的对称性与正定性。

下面分析具有度量张量(16)的 Beltrami 流的几何意义。将式(16)代入式(13)得

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{C(|\nabla I|)}{\sqrt{\det(g)}} \operatorname{div} \left[ \frac{G \cdot \nabla I}{\sqrt{\det(g)}} \right] \quad (18)$$

其中

$$G = \begin{pmatrix} f + \lambda_1 I_y^2 + \lambda_2 I_x^2 & (\lambda_2 - \lambda_1) I_x I_y \\ (\lambda_2 - \lambda_1) I_x I_y & f + \lambda_1 I_x^2 + \lambda_2 I_y^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

由于 Laplace-Beltrami 算子为线性算子,因此可将式(19)分解为

$$G = f \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (p_1, p_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \end{pmatrix} \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} p_1 = (-I_y, I_x)^T \\ p_2 = (I_x, I_y)^T \end{cases}$$

分别为图像的边缘方向与梯度方向,可以理解为图像流形上的一个正交标架场。式(20)说明具有(16)式的 Beltrami 流具有清晰的几何意义:式(20)等号右侧第一项为各项同性扩散,其扩散速度由  $f$  决定;第二项为沿正交标架场  $p_1$  与  $p_2$  的方向扩散,扩散速度由  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  决定。具有度量张量(16)的 Beltrami 流具有广泛的适用性,经典的高斯滤波、各项异性扩散以及方向扩散等皆为 Beltrami 流的度量张量(16)的特例。因此,基于本文提出的度量张量模型的 Beltrami 流是经典 PDE 的推广,具有清晰的几何意义,非常适用于图像去噪等图像处理领域。

为使 Beltrami 流更加适用于图像去噪这一具体的图像处理任务,需要进一步确定度量张量模型(16)中的未知函数参数。在图像光滑区域仅需要各项同性扩散,在图像边缘区域需要平行于边缘方向扩散,同时在垂直于边缘方向也需要有微小的扩散,以去除边缘方向的噪声,因此我们考虑

下面的函数参数:

$$\begin{cases} C(|\nabla I|) = a(|\nabla I|) \\ f(|\nabla I|) = b(|\nabla I|) \end{cases} \quad (21)$$

与

$$\begin{cases} \lambda_1(|\nabla I|) = 1 \\ \lambda_2(|\nabla I|) = \frac{l^2}{l^2 + |\nabla I|^2} \end{cases} \quad (22)$$

其中,  $l$  为非负参数,  $a(\cdot)$  与  $b(\cdot)$  分别为边缘停止函数,即当变量逼近 0 时,函数逼近 1,而变量逼近正无穷时,函数逼近 0。这是一种边缘增强 Beltrami 流(EBF),下面考虑相关增强 Beltrami 流(CBF)。

设  $I_h$  为噪声图像,  $I_n$  为经高通滤波产生的图像,即

$$I_h = H \otimes I_n \quad (23)$$

其中,  $H$  与  $\otimes$  分别为高通滤波器与卷积算子,则图像  $I_n$  粗略地描述了图像的边缘信息。设  $I_t$  为噪声图像经 Beltrami 流处理  $t$  时刻的解图像,则相关系数定义为

$$CE(x^1, x^2) = \frac{I_t(x^1, x^2) \cdot I_h(x^1, x^2)}{2^{2n}} \quad (24)$$

其中,  $n$  为图像的量化位数,则  $CE \in [0, 1]$ 。依据相关系数考虑度量张量模型(16)的函数参数:

$$\begin{cases} \lambda_1(|\nabla I|) = \begin{cases} \alpha, CE < c_0 \\ \alpha + (1 - \alpha) e^{\frac{CE-1}{CE-c_0}}, CE \geq c_0 \end{cases} \\ \lambda_2(|\nabla I|) = \alpha \end{cases} \quad (25)$$

其中,  $\alpha$  与  $c_0$  皆为小的正数。式(25)表明:当相关系数小时,即为光滑区域,需要各项同性扩散,当相关系数较大时,变为异性扩散。迭代(24)与(25)式,可得相关增强 Beltrami 流。

### 3 评价指标

由于仿真实验时具有真实的清晰图像,因此可以方便地检验实验结果。首先考虑图像去噪的效果,这里选择通用的评价指标,即峰值信噪比(PSNR),其定义为

$$\text{PSNR} = 10 \lg \left( \frac{255^2}{\|I - \hat{I}\|_2^2} \right) \quad (26)$$

其中,  $I$  与  $\hat{I}$  分别为清晰图像与去噪后图像,PSNR 描述了去噪后图像与原始图像的差异,是一种公认的评价指标。

为了刻画图像去噪方法对图像边缘信息的保留程度,提出一种新的评价指标 PSGR:

$$PSGR = 10 \lg \left( \frac{255^2}{\|\nabla I - \nabla \hat{I}\|_2^2} \right) \quad (27)$$

PSGR 描述了清晰图像的图像梯度与去噪后图像的图像梯度的差异,由于图像梯度是当前反映图像边缘较好的媒介之一,因此 PSGR 评价了去噪后图像的边缘与清晰图像的边缘间的差异。

本文综合采用 PSNR 与 PSGR 分别评价图像去噪的综合效果与图像边缘保持效果。

### 4 实验结果与分析

为了全面地分析比较 Beltrami 流 EBF 与 CBF 的去噪效果,本文采用均值滤波(MF)、小波方法(wavelet)<sup>[16]</sup>、PM 扩散(PMD)<sup>[13]</sup>、方向扩散(DD)<sup>[15]</sup>作为对比,分别计算其 PSNR 与 PSGR 来评价其去噪效果。采用的图像如图 1 所示:从图(a)到图(e)图像的边缘逐渐增加,细节逐渐丰富,因此所选的图像具有很好的代表性。高斯白噪声是较为常用噪声类型,因此,在图 1 所示的清晰图像上加性高斯白噪声(SNR = 15dB)作为噪声图像,结果如图 2 所示。

Beltrami 流 EBF 与 CBF 中的参数分别选取为:  $l = 10, \alpha = 0.1$  与  $c_0 = 0.4$ 。经过 EBF 与 CBF

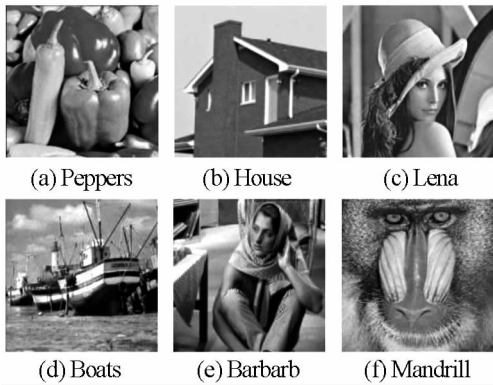


图 1 原始图像(256 × 256)  
Fig. 1 Original Images(256 × 256)

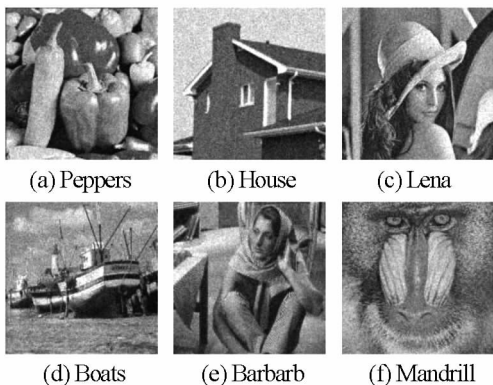


图 2 噪声图像  
Fig. 2 Noised images

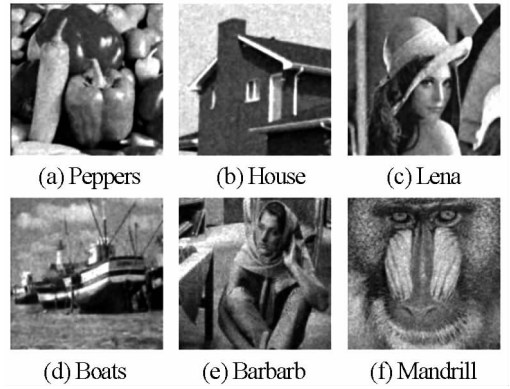


图 3 经 EBF 去噪后的图像  
Fig. 3 Denoised images by EBF

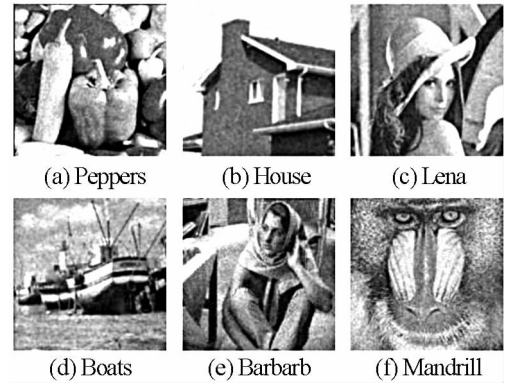


图 4 经 CBF 去噪后的图像  
Fig. 4 Denoised images by CBF

的去噪处理,分别得到如图 3 与图 4 所示的去噪后的图像。从图 3 与图 4 可以发现,经过 Beltrami 流 EBF 与 CBF 去噪,图像的噪声得到很好地平滑,如图(a)与图(b)等,同时,图像边缘较为丰富的图(e)与图(f)等不仅平滑了噪声,还较好地保存了图像边缘信息,具有较好的视觉效果。为了定量地分析比较 EBF、CBF 与对比方法的去噪效果,我们利用 PSNR 与 PSGR 评价去噪图像,结果如表 1 与表 2 所示。定量分析结果表明,Beltrami 流 EBF 与 CBF 在处理较为光滑的图像时优势不是很明显,但当图像边缘较为丰富时去噪效果较好,这主要源于 Beltrami 流的度量张量模型清晰的几何意义,这对于图像边缘的保持具有很好的效果。

表 1 去噪结果(PSNR, dB)

Tab. 1 Denoising results (PSNR, dB)

方法	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
MF	25.7	26.1	25.6	23.6	22.6	21.5
wavelet	26.4	27.1	26.5	25.0	25.3	23.4
PMD	28.3	29.2	27.6	25.5	24.6	23.6
DD	27.5	28.8	27.0	24.5	23.5	22.2
EBF	28.4	29.7	27.9	26.4	25.3	23.8
CBF	28.8	29.1	27.8	25.0	24.7	24.2

表2 去噪结果(PSGR, dB)

Tab. 2 Denoising results (PSGR, dB)

方法	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
MF	22.1	24.0	21.8	19.2	16.7	15.8
wavelet	22.3	25.8	22.1	20.7	18.1	18.1
PMD	25.0	27.1	23.7	20.4	17.6	18.0
DD	24.3	26.8	23.3	20.5	18.2	16.6
EBF	25.4	27.1	23.3	20.4	18.9	18.3
CBF	24.6	26.9	23.8	20.8	19.1	18.5

## 5 结 论

本文介绍了 Beltrami 流及其在图像处理领域的应用。首先,图像流形建立了经典图像理论与现代几何流理论之间深刻的联系,为极小化 Polyakov 能量泛函得到 Beltrami 流提供保障;其次,本文提出的度量张量模型非常适合于图像去噪,具有清晰的几何意义,已经证明几类经典的 PDE 去噪方法皆为此度量张量模型的特例;最后,仿真实验说明 Beltrami 流 EBF 与 CBF 对于图像具有广泛的适用性,尤其在图像边缘保持方面具有独特的优势。此外,对度量张量模型中未知的函数参数还有很强的自由度,可以根据不同的图像处理任务灵活选择。

## 参考文献 (References)

- [1] Luisier F, Blu T, Unser M. Image denoising in mixed Poisson - Gaussian noise[J]. IEEE Transactions on image processing, 2011, 20(2): 696 - 708.
- [2] Chatterjee P, Milanfar P. Practical bounds on image denoising: from estimation to information [J]. IEEE Transactions on image processing, 2011, 20(5): 1221 - 1233.
- [3] 刘莉,谭吉春. 分数域图像混合噪声盲复原方法[J]. 国防科技大学学报,2011,33(3):52 - 55.  
LIU Li, TAN Jichun. A new method of mixed noise image restoration in fractional fourier transform domain[J]. Journal of National University of Defense Technology,2011,33(3):52 - 55. (in Chinese)
- [4] 王红霞,成礼智,吴翊. 基于二进制小波变换的噪声图像自适应

- 应增强新算法[J]. 国防科技大学学报,2005,27(1):51 - 54.  
WANG Hongxia, CHEN Lizhi, WU Yi. An adaptive strategy for image enhancement based on the dyadic wavelet transform[J]. Journal of National University of Defense Technology,2005,27(1):51 - 54. (in Chinese)
- [5] Thorstensen N, Scherzer O. Convergence of variational regularization methods for imaging on Riemannian manifolds [J]. Inverse Problems, 2012, 28.
- [6] Sochen N, Deriche R, Perez L L. The Beltrami flow over implicit manifolds [J]. IEEE Int. Conf. on Computer Vision, 2003, 832 - 839.
- [7] Spira A, Kimmel R, Sochen N. Efficient Beltrami flow using a short time kernel [J]. IEEE Transactions Image Process, 2007, 16: 1628 - 1636.
- [8] Auroux D, Belaid L J, Rjaibi B. Application of the topological gradient method to color image restoration [J]. SIAM J. Imaging Sciences, 2010, 3(2): 153 - 175.
- [9] Feng Z, Gao J. Beltrami manifold denoising algorithm for ink - jet printing texture image using shape prior technology [J]. Journal of Computational Information Systems, 2011, 7(2): 359 - 368
- [10] Roussos A, Maragos P. Tensor-based image diffusions derived from generalizations of the total variation and Beltrami functionals [C]//Proceedings of 2010 IEEE 17th International Conference on Image Processing, Hong Kong, 2010.
- [11] Dascal L, Rosman G, Kimmel R. Efficient Beltrami filtering of color images via vector extrapolation [J]. Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, 2007, 4485: 92 - 103.
- [12] Chambolle A. Partial differential equations and image processing [J]. Proceedings of the IEEE Int. Conf. on Image Process, IEEE, New York, 1994.
- [13] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE transactions Patt. Anal. Mach. Intell., 1990, 12: 629 - 639.
- [14] Yang P, Chen M, Wang J. P - M diffusion for image denoise with fidelity term [C]//Third Int. Conf. Digital Image Processing (ICDIP2011), Chengdu, April, 2011.
- [15] Alvarez L, Lions P L, Morel J M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [C]//SIAM J. Numer. Anal, 1992, 29: 845 - 866.
- [16] Chang G S, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(9): 1532 - 1546.