第34卷第5期 国防科技大学学报 Vol. 34 No. 5
2012年10月 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Oct. 2012

广义A-调和张量的反向Hölder型不等式*

朱健民,唐照阳,黄建华
(国防科技大学 理学院,湖南 长沙 410073)

摘　要:基于微分形式A-调和方程的反向Hölder型不等式,是研究其解可积性的重要工具。本文将A-调和方程推广到拟线性方程的情形,在一定的条件下获得方程解的反向Hölder型不等式,所得结果可以退化到经典的情形,为研究此类调和方程的正则性与可积性奠定了基础。

关键词:微分形式;A-调和方程;反向Hölder不等式
中图分类号: O175　　**文献标志码:** A　　**文章编号:**1001-2486(2012)05-0164-05

The reverse Hölder type inequalities for generalized A-harmonic tensors

ZHU Jianmin, TANG Zhaoyang, HUANG Jianhua
(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The reverse Hölder type inequality for A-harmonic equations is a very important tool to discuss the integrability for solutions to these equations. In the present paper we dealt with a kind of generalized homogeneous A-harmonic equations formulated by $d^*A(x,\kappa(u-u_\Omega),du)=0$. The reverse Hölder type inequality were established for the weak solution u of these equations, very similar to the traditional one. The results obtained here for the special cases of $\kappa=0$ can lead to the corresponding situation considered before now, which can be regarded as the foundation for studying the regularity and integrability to this kind of equations.

Key words: differential forms; A-harmonic equation; reverse Hölder inequality

众所周知,微分形式的A-调和方程涵盖了非常广泛的一类方程,例如柯西-黎曼方程,拉普拉斯方程,p-调和方程 $\mathrm{div}(\nabla u|\nabla u|^{p-2})=0$,A-调和方程 $\mathrm{div}A(x,\nabla u)=0$,等等。由于A-调和方程在诸多领域,如拟共形理论,拟正则映射,偏微分方程,弹性理论等起到非常重要的作用,从上世纪90年代以来,越来越多的人关注这些方程解的行为及其应用,参阅文献[1-7,9,11-13,15]。为了得到A-调和方程解的正则性,需要建立一些解的先验估计,在这些估计中有很多有趣的不等式,例如Caccioppoli不等式和反向Hölder型不等式,参见文献[7-8,12]。同时在A-调和方程从函数到微分形式,或者是从特殊情况到一般形式的过程中我们希望这些不等式依然成立。

最近文献[4]对文献[14]中所讨论的拟线性方程进行了由函数到微分形式的推广。这些拟线性方程可表示为

$$\mathrm{div}A(x,u,u_x)=B(x,u,u_x), \tag{1}$$

其中向量函数 A 和标量函数 B 满足下列条件

$$|A(x,u,p)|\leqslant a|p|^{\alpha-1}+b|u|^{\alpha-1}+e,$$
$$|B(x,u,p)|\leqslant c|p|^{\alpha-1}+d|u|^{\alpha-1}+f,$$
$$\langle A(x,u,p),p\rangle\geqslant a^{-1}|p|^{\alpha}-d|u|^{\alpha}-g。$$

在文献[4]中,通过对 A 和 B 的细微的改动,可以建立一些有关微分形式的方程(1)的Caccioppoli估计。

但是可以想象得到,这些估计的形式与传统的Caccioppoli估计有较大的差别。受文献[14]的启发,我们考虑一类有关微分形式的广义的 A-调和方程,它们可以看做方程(1)的推广,所得的结果与传统形式形似,自然对 A 和 B 有更强的要求。

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域,$p>0$ 与 $a>0$ 为常数。令 $A:\Omega\times\Lambda^{l-1}(\mathbf{R}^n)\times\Lambda^l(\mathbf{R}^n)\to\Lambda^l(\mathbf{R}^n)$ 和 $B:\Omega\times\Lambda^{l-1}(\mathbf{R}^n)\times\Lambda^l(\mathbf{R}^n)\to\Lambda^{l-1}(\mathbf{R}^n)$ 为非线性算子,并满足下列条件:

(H1)　$|A(x,\xi,\zeta)|\leqslant a(|\xi|^{p-1}+|\zeta|^{p-1})$;

(H2)　$|B(x,\xi,\zeta)|\leqslant a(|\xi|^{p-1}+|\zeta|^{p-1})$;

(H3)　$\langle A(x,\xi,\zeta),\zeta\rangle\geqslant|\zeta|(|\zeta|^{p-1}-|\xi|^{p-1})$

* **收稿日期:**2012-03-09
作者简介:朱健民(1963—),男,湖南慈利人,教授,博士,硕士生导师,E-mail:jmzhu@nudt,edu.cn

上述条件对几乎所有 $x\in\Omega$ 和所有 $x\in\Omega$ 以及 $\xi\in\Lambda^{l-1}(\mathbf{R}^n)$ 成立。

本文考虑下面推广的 A – 调和方程

$$d^*A(x,\kappa(u-u_\Omega),du)=B(x,\kappa(u-u_\Omega),du) \tag{2}$$

其中 κ 为常数,u_Ω 为 u 在 Ω 上积分平均的推广。对于方程(2),$\kappa=0$ 时可简化为 $d^*A(x,du)=B(x,du)$。

我们知道已经有很多有关该简化方程的研究,见文献[1]。在文献[15]中,为获得齐次 A – 调和方程 $d^*A(x,du)=0$ 弱解的正则性,给出了下列条件:

(H4) $|A(x,\xi)-A(x,\zeta)|\leqslant b|\xi-\zeta|(|\xi|+|\zeta|)^{p-2}$;

(H5) $\langle A(x,\xi)-A(x,\zeta),\xi-\zeta\rangle\geqslant a|\xi-\zeta|^2(|\xi|+|\zeta|)^{p-2}$;

(H6) $A(x,\lambda\zeta)=|\lambda|^{p-2}\lambda A(x,\zeta)$

上述条件对几乎所有 $x\in\Omega$,$\lambda\in\mathbf{R}$ 和 $\xi,\zeta\in\Lambda^l(\mathbf{R}^n)$ 成立。在该文中建立了一个如下有关弱解 u 的重要不等式

$$\left(\int_Q|du|^s\right)^{1/s}\leqslant C(n,p,a)\left(\int_{2Q}|du|^r\right)^{1/r} \tag{3}$$

其中球 $Q\subset 2Q\subset\Omega$,$r=\max\left\{\dfrac{ns}{n+s-1},\dfrac{ns}{np-n+s-p+1}\right\}$。

(3)式可以视为关于 du 的反向 Hölder 不等式。

将利用上面有关 A 和 B 的条件得到关于 u 的类似的不等式。

在文献[11]中对非齐次 A – 调和方程 $d^*A(x,du)=B(x,du)$,建立了如下 u 的反向 Hölder 不等式

$$\|u\|_{s,Q}\leqslant C|Q|^{(t-s)/ts}\|u\|_{t,\sigma Q}$$

这里的球 Q 满足 $\sigma Q\subset\Omega$,C 为与 u 无关的常数。本文将用到其中一种重要的方法,这种方法在文献[8]中首次被人们用到。

在文献[16]得到类似于文献[15]中的不等式

$$\left(\int_Q|du|^s\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant C\left[\left(\int_{\sigma Q}|du|^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}}+\kappa\left(\int_\Omega|du|^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}\right]$$

其中 $r_1=\max\left\{\varphi(s),\varphi\left(\dfrac{s}{p-1}\right)\right\}$,

$r_2=\max\left\{\varphi(s),\varphi\left(\varphi\left(\dfrac{s}{p-1}\right)\right)\right\}$,

且 $\varphi(s)=\dfrac{ns}{n+s-1}$。

受前面研究工作的启发,在本文中获得对于此类推广 A – 调和方程的类似的有关 u 的估计。

1　有关微分形式的预备知识

本文使用的概念和记号主要来自于文献[1]中,在本节中简略地将其列出。

用 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的一组标准正交基。假设 $\Lambda^l=\Lambda^l(\mathbf{R}^n)$ 为 l – 余向量构成的线性空间,其中余向量由外积 $e_I=e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_l}$ 构成,$I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots i_l\leqslant n$,$l=0,1,\cdots,n$。Grassman 代数 $\Lambda=\oplus_{l=0}^n\Lambda^l$ 是关于外积的分次代数。对 $\alpha=\sum\alpha^I e_I\in\Lambda$ 和 $\beta=\sum\beta^I e_I\in\Lambda$,$\Lambda$ 中的内积定义为 $\langle\alpha,\beta\rangle=\sum\alpha^I\beta^I$,这里的求和是关于全部 l – 数组 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$ 和所有的整数 $l=0,1,\cdots,n$ 进行的。Hodege 星算子 $\star:\Lambda\to\Lambda$ 定义为

$$\star\omega=\mathrm{sgn}(\pi)\alpha_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{n-k}},$$

这里 $\omega=\alpha_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ 是 k – 形式,$\pi=(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})$ 为 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换,并且 $\mathrm{sgn}(\pi)$ 表示置换的符号。$\alpha\in\Lambda$ 的范数由 $|\alpha|^2=\langle\alpha,\alpha\rangle=\star(\alpha\wedge\star\alpha)\in\Lambda^0=\mathbf{R}$ 给出。

尽管本文中并不是处处要求,但是我们这里总假设 Ω 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的球或方体。一个可微的 l – 形式 ω 是一个 Ω 上的取值于 $\Lambda^l(\mathbf{R}^n)$ 的 Schwartz 分布。我们用 $D'(\Omega,\Lambda^l)$ 表示所有可微 l – 形式所构成的空间,并且用 $L^p(\Omega,\Lambda)$ 表示 l – 形式

$$\omega(x)=\sum_I\omega(x)dx_I=\sum\omega_{i_1,i_2,\cdots,i_l}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l},$$

其所有系数 $\omega_I\in L^p(\Omega,\mathbf{R})$。故 $L^p(\Omega,\Lambda^l)$ $(p\geqslant 1)$ 是装备下列范数的 Banach 空间

$$\|\omega\|_p=\|\omega(x)\|_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega|\omega(x)|^p\right)^{1/p}=\left(\int_\Omega\left(\sum_I|\omega_I(x)|^2\right)^{p/2}dx\right)^{1/p}。$$

空间 $L_1^p(\Omega,\Lambda^l)$ 是 $D'(\Omega,\Lambda^l)$ 满足下列条件的子空间

$$\|\alpha\|L_1^p(\Omega)=\left(\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right|^2\right)^{p/2}dx\right)^{1/p}<\infty$$

l – 形式的 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega,\Lambda^l)$ 为 $W^{1,p}(\Omega,\Lambda^l)=L^p(\Omega,\Lambda)\cap L_1^p(\Omega,\Lambda^l)$。记号 $W_d^p(\Omega,\Lambda^l)$ 表示所有满足 $d\omega\in L^p(\Omega,\Lambda^{l+1})$ 的 l – 形式 ω 所构成的空间。$W_{d,loc}^p(\Omega,\Lambda^l)$ 的意义是自

明的。记号 $W^p_{d,0}(\Omega,\Lambda^l)$ 表示 $C^\infty(\overline{\Omega},\Lambda^l)$ 在 W^p_d 中关于范数 $\|\omega\|_{p,\Omega}+\|d\omega\|_{p,\Omega}$ 的完备空间。

算子 $\mathrm{d}:D'(\Omega,\Lambda^l)\to D'(\Omega,\Lambda^{l+1})$ $(l=0,1,\cdots,n-1)$ 表示外微分，即

$$\mathrm{d}\omega(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant n}\frac{\partial\omega_{i_1,i_2,\cdots,i_l}(x)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_l}$$

它的形式共轭算子定义为 $d^*=(-1)^{nl+1}\star\mathrm{d}\star:D'(\Omega,\Lambda^{l+1})\to D'(\Omega,\Lambda^l),l=0,1,\cdots,n-1$，也称为 Hodge 余微分。

2 主要结果及其证明

给定 $g\in L^s(\Omega,\Lambda^l)$，$h\in L^s(\Omega,\Lambda^{l-1})$ 和 $f\in L^{s/(p-1)}(\Omega,\Lambda^l)$，其中 $s\geqslant\max\{1,p-1\}$。我们知道，在 Ω 中方程

$$\mathrm{d}^\star A(x,h,g+\mathrm{d}v)=\mathrm{d}f$$

存在弱解 $v\in W^s_{d,0}(\Omega,\Lambda^{l-1})$ 可在分布意义下理解，即

$$\int_\Omega\langle A(x,h,g+\mathrm{d}v),\mathrm{d}\phi\rangle=\int_\Omega\langle f,\mathrm{d}\phi\rangle$$

对于每个 $\phi\in W^{s/(s-p+1)}_{d,0}(\Omega,\Lambda^{l-1})$ 成立。

现在，考虑下面推广的 A－调和方程

$$\mathrm{d}^*A(x,\kappa(u-u_\Omega),\mathrm{d}u)=0\qquad(4)$$

其中 κ 为常数，对该方程的弱解解 u（也称为调和张量）建立反向 Hölder 不等式。首先，给出方程弱解的定义。

定义 1 微分形式 $u\in W^s_{d,loc}(\Omega,\Lambda^{l-1})$ 称作方程(4)的弱解，若 u 在分布意义下满足此方程，即下列积分方程

$$\int_\Omega\langle A(x,\kappa(u-u_\Omega),\mathrm{d}u),\mathrm{d}\varphi\rangle=0\qquad(5)$$

对任何具有紧支集的 $\varphi\in W^{s/(s-p+1)}_d$ 成立。

定理 1 令 $u\in W^s_{d,loc}$ 为方程(4)在 Ω 中且满足条件(H1)和(H3)的弱解。对于任一同心的球或方体 $Q\subset\sigma Q\subset\Omega$，存在与 u 无关的常数 C 和 C'，使得

$$\|\mathrm{d}u\|^p_{p,\omega}\leqslant C\|k(u-u_\Omega)\|^p_{p,\sigma\Omega}+C'\|u-\omega\|_{p,\sigma\Omega},$$

该式对所有满足 $\sigma Q\subset\Omega$ 的方体 Q 和所有闭形式 ω 成立。

证明 令 $\eta\in C^\infty_0(\sigma Q)$，在 Q 中时 $\eta=1$，且其他情形满足 $|\nabla\eta|\leqslant\dfrac{C}{(\sigma-1)}\dfrac{1}{\mathrm{diam}(Q)}$。

对 $\mathrm{d}^*A(x,k(u-u_\Omega),\mathrm{d}u)=0$ 运用测试形式 $\varphi=-u\eta^p$ 以及条件(H1)－(H3)，有

$$\int_{\sigma Q}\langle A(x,k(u-u_\Omega),\mathrm{d}u),-\eta^p\mathrm{d}u\rangle$$

$$=\int_{\sigma Q}\langle A(x,k(u-u_\Omega),\mathrm{d}u),up\eta^{p-1}\mathrm{d}\eta\rangle,$$

$$\int_{\sigma Q}\eta^p|\mathrm{d}u|(|\mathrm{d}u|^{p-1}-|k(u-u_\Omega)|^{p-1})$$

$$\leqslant\int_{\sigma Q}ap|u||\eta|^{p-1}|\mathrm{d}\eta||(|\mathrm{d}u|^{p-1}+|k(u-u_\Omega)|^{p-1})。$$

于是

$$\int_{\sigma Q}\eta^p|\mathrm{d}u|^p\leqslant\int_{\sigma Q}\eta^p|\mathrm{d}u||k(u-u_\Omega)|^{p-1}+\int_{\sigma Q}ap||u\eta|^{p-1}|\mathrm{d}\eta||\mathrm{d}u|^{p-1}+\int_{\sigma Q}ap|u||\eta|^{p-1}|\mathrm{d}\eta||k(u-u_\Omega)|^{p-1}。$$

根据 Young 不等式，有

$$\int_Q|\mathrm{d}u|^p\leqslant\int_{\sigma Q}\eta^p|\mathrm{d}u|^p$$

$$\leqslant\int_{\sigma Q}|\mathrm{d}u||k(u-u_\Omega)|^{p-1}+\frac{apC}{(\sigma-1)}\frac{1}{\mathrm{diam}Q}\int_{\sigma Q}|u||\mathrm{d}u|^{p-1}+\frac{apC}{(\sigma-1)}\frac{1}{\mathrm{diam}Q}\int_{\sigma Q}|u||k(u-u_\Omega)|^{p-1}$$

$$\leqslant\int_{\sigma Q}(\mu_1^{-\frac{p}{q}}|\mathrm{d}u|^p+\mu_1|k(u-u_\Omega)|^p)+\frac{apC}{(\sigma-1)}\frac{1}{\mathrm{diam}Q}\int_{\sigma Q}(\mu_2^{-\frac{p}{q}}|u|^p+\mu_2|\mathrm{d}u|^p+\mu_3^{-\frac{p}{q}}|u|^p+\mu_3|k(u-u_\Omega)|^{p-1})$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$。令 μ_1 足够大且 μ_2 足够小，得到

$$C_0\int_Q|\mathrm{d}u|^p\quad\leqslant\mu_1\int_{\sigma Q}|k(u-u_\Omega)|^p+\frac{apC}{(\sigma-1)}\frac{1}{\mathrm{diam}Q}\int\sigma Q\;(\mu_2^{-\frac{p}{q}}|u|^p)$$

那么有

$$\int_Q|\mathrm{d}u|^p\leqslant C\int_{\sigma Q}|k(u-u_\Omega)|^p+C'\int_{\sigma Q}|u|^p。$$

若用 $u-\omega$ 代替 u，其中 ω 为任一闭形式，不等式依然成立。于是完成了定理 1 的证明。

现在建立 Caccioppoli 型估计，从而进一步建立反向 Hölder 不等式。我们的证明是文献[8]中定理证明的更改。

首先，若 u 是一个 0－形式，令

$$u^+=\max\{u,0\},u^-=\min\{u,0\}。$$

类似地，规定 1－形式的正部和负部

$$\omega^+=\sum_I\omega_I^+\mathrm{d}x_I,\omega^-=\sum_I\omega_I^-\mathrm{d}x_I。$$

定理 2 令 $u\in W^s_{\mathrm{d},loc}$ 为方程(4)满足条件(H1)和(H3)的弱解。那么存在不依赖于 u 的常数 C 和 C'，使得

$$\int_\Omega |u^+|^s|du^+|^p\eta^p \leqslant C\int_\Omega |u^+|^{s+p}|\nabla\eta|^p + C'\int_\Omega |k(u-u_\Omega)|^{s+p}|\eta|^p$$

对所有非负 $\eta\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立。同样,上述不等式对 u^- 依然成立。

证明　对式(5)运用测试形式 $\varphi=-u^+\eta^p$ 以及条件(H1)~(H3)可得

$$\int_\Omega\langle A(x,k(u-u_\Omega),du),-\eta^p du^+\rangle = \int_\Omega\langle A(x,k(u-u_\Omega),du^+),u^+p\eta^{p-1}d\eta\rangle,$$

$$\int_\Omega\eta^p|du^+|(|du^+|^{p-1}-|k(u-u_\Omega)|^{p-1}) \leqslant\int_\Omega a|u^+|p|\eta|^{p-1}|d\eta|(|du^+|^{p-1}+|k(u-u_\Omega)|^{p-1})。$$

于是,由 Young 不等式有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\eta^p|du^+|^p &\leqslant \int_\Omega\eta^p|du^+||k(u-u_\Omega)|^{p-1} + \int_\Omega ap|u^+||d\eta||\eta|^{p-1}|du^+|^{p-1} + \int_\Omega ap|u^+||\eta|^{p-1}|d\eta||k(u-u_\Omega)|^{p-1}\\ &\leqslant \int_\Omega(\mu_1^{-\frac{q}{p}}|du^+|^p|\eta|^p+\mu_1|\eta|^p|k(u-u_\Omega)|^p) + \int_\Omega ap(\mu_2^{-\frac{q}{p}}|u^+|^p|d\eta|^p+\mu_2|\eta|^p|du^+|^p) + \int_\Omega ap(\mu_3^{-\frac{q}{p}}|u^+||d\eta|^p+\mu_3|\eta|^p|k(u-u_\Omega)|^p)\end{aligned}$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$。取 μ_1 足够大且 μ_2 够小,得到

$$C_0\int_\Omega|\eta|^p|du^+|^p \leqslant(\mu_1+ap\mu_3)\int_\Omega|\eta|^p|k(u-u_\Omega)|^p + (ap\mu_2^{-\frac{p}{q}}+ap\mu_3^{-\frac{p}{q}})\int_\Omega|u^+|^p|d\eta|^p。$$

于是有

$$\int_\Omega|\eta|^p|du^+|^p \leqslant C_1\int_\Omega|\eta|^p|k(u-u_\Omega)|^p+C_2\int_\Omega|u^+|^p|d\eta|^p。\tag{6}$$

参考文献[8]中引理 3.27,令 $T=\sum t dx_I$,其中 $t>0$。那么 $u-T$ 依然是方程(4)的解且满足上述不等式。对于 $t>0$ 考虑集合

$$A=\{x\,|\,|(u-T)^+|\neq 0\},$$
$$B=\cup_I\{x\,|\,(u_I-t)^+>0\},$$
$$C=\{x\,|\,|u^+|>t\},$$
$$D=\{x\,|\,u_I^+>t\}。$$

有 $D_I\subset B=A\subset C$ 对所有 I 成立。故由 $dv=|du^+|^p\eta^p$ 和(6)式,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|du^+|^s dv &\leqslant C_0\sum_I\int_\Omega(du_I^+)^s dv = C_0\sum_I(s\int_0^\infty t^{s-1}\int_{D_I}dvdt)\\ &\leqslant C_0\sum_I(s\int_0^\infty t^{s-1}\int_B|d(u-T)^+|^p\eta^p dt)\\ &\leqslant C_1\int_0^\infty t^{s-1}\int_B|d(u-T)^+|^p\eta^p dt\\ &\leqslant C_1(C_2\int_0^\infty t^{s-1}\int_C|u^+|^p|\nabla\eta|^p dt + C_3\int_0^\infty t^{s-1}\int_C|\eta|^p|k(u-u_\Omega)|^p dt)\\ &\leqslant C_4\int_\Omega|u^+|^{s+p}|\nabla\eta|^p + C_5\int_\Omega|\eta|^p|k(u-u_\Omega)|^{s+p}。\end{aligned}$$

于是便完成了定理 2 的证明。

下面建立关于 u 的反向 Hölder 等式并给出证明。

定理 3　令 $u\in W^s_{d,loc}$ 为方程(4)满足条件(H1)和(H3)的弱解。那么对任一同心球或方体 $Q\subset\sigma Q\subset\Omega$,存在不依赖于 u 的常数 C 和 C',使得

$$\|u\|_{r,Q}\leqslant C\|u\|_{s,\sigma Q}+C'\|k(u-u_\Omega)\|_{s,\sigma Q},$$

其中 $r=\dfrac{sp}{n-p}$。

证明　令 $\eta\in C_0^\infty(\sigma Q)$ 为非负函数且满足在 Q 中 $\eta=1$, $|\nabla\eta|\leqslant\dfrac{C}{\operatorname{diam}Q}$ 以及 $0\leqslant\eta\leqslant 1$。固定 $t\neq 0$, $\omega=|u^+|^{1+t/p}\eta$,利用定理 2 以及不等式 $(a+b)^{1/p}\leqslant a^{1/p}+b^{1/p}$,我们得到

$$\begin{aligned}(\int_{\sigma Q}|\nabla\omega|^p dx)^{1/p} &\leqslant(\frac{p+t}{p})(\int_{\sigma Q}|\nabla u^+|^p|u^+|^t\eta^p dx)^{1/p} + (\int_{\sigma Q}|u^+|^{p+t}|\nabla\eta|^p dx)^{1/p}\\ &\leqslant C_1(p+t)(\int_{\sigma Q}|u^+|^{p+t}|\nabla\eta|dx)^{1/p} + C_2(p+t)(\int_{\sigma Q}|k(u-u_\Omega)|^{p+t}|\eta|^p dx)^{1/p}\\ &\leqslant C_3\frac{(p+t)}{\operatorname{diam}Q}(\int_{\sigma Q}|u^+|^{p+t}dx)^{1/p} + C_2(p+t)(\int_{\sigma Q}|k(u-u_\Omega)|^{p+t}dx)^{1/p}。\end{aligned}$$

由 Sobolev 不等式($\|u\|_{\frac{np}{n-p}}\leqslant C\|\nabla u\|_p$),有

$$(\int_{\sigma Q}|\omega|^{\frac{np}{n-p}}dx)^{\frac{n-p}{np}} \leqslant C_4(p+t)(\int_{\sigma Q}|u^+|^{p+t}dx)^{1/p}$$

$$+ C_5(p+t)\left(\int_{\sigma Q}|k(u-u_\Omega)|^{p+t}\mathrm{d}x\right)^{1/p}。$$

令 $s = p + t$ 并利用不等式 $(a^{1/p} + b^{1/p})^p \leqslant (a^{1/s} + b^{1/s})^s$,对任意 $a,b > 0$ 和 $p < s$,可得

$$\| u^+ \|_{\frac{sp}{n-p},Q} \leqslant C_6 \| u^+ \|_{s,\sigma Q} + C_7 \| k(u-u_\Omega) \|_{s,\sigma Q}。$$

同样的讨论对 u^- 一样成立。定理 3 证毕。

参考文献(References)

[1] Agarwal P R, Ding S, Nolder C A. Inequalities for di_erential forms[M]. Springer, 2009.

[2] Aronsson G, Lindqvist P. On p-harmonic functions in the plane and their stream functions[J]. J. Differential Equations, 1988,74:157 –178.

[3] Ball J M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity[J]. Arch. Rational Mech. Anal., 1977, 63:337 –403.

[4] Cao Z, Bao G, Xing Y, et al. Some Caccioppoli estimates for di _ erential forms [J]. J. Ineq. Appl., Article ID 734528, 2009.

[5] Ding S. Two-weight Caccioppoli inequalities for solutions of nonhomogeneous A – harmonic equations on Riemannian manifolds[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2004, 132:2367 –2375.

[6] Ding S. Local and global norm comparison theorems for solutions to the Nonhomogeneous A-harmonic equation[J]. J. Math. Anal. Appl, 2007,335:1274 –1293.

[7] Giaquinta M , Soucek J. Caccioppoli's inequality and Legendre-Hadamard condition[J]. Math. Ann., 1985,270:105 –107.

[8] Heinonen J, Kilpel ainen T, Martio O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations[M]. Dover Publications, lnc. Mineola, New york, 2006.

[9] Iwaniec T, Sbordone G. Weak minima of variational integrals [J]. J. Reine Angew. Math., 1994,454:143 –161.

[10] Li X. On the strong Lp-Hodge decomposition over complete Riemannian manifold[J]. J. Fun. Appl., 2009, 257:3617 –3646.

[11] Nolder C A. Hardy-Littlewood theorems for A-harmonic tensors[J]. Illinois J. Math., 1999,43:613 –631.

[12] Nolder C A. Global integrability theorems for A-Harmonic tensors[J]. J. Math. Anal. Appl., 2000,247:236 –247.

[13] Nolder C A. Conjugate harmonic functions and Cli _ ord algebras[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005,302:137 –142.

[14] Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equations [J]. Acta Math., 1964,111:247 –302.

[15] Stro _ olini B. On weakly A-harmonic tensors[J]. Studia Math., 1995,114:289 –301.

(上接第 157 页)

[15] Radl A, Von Luxburg U, Hein M. Getting lost in space: large sample analysis of the resistance distance [C] // Proceeding of 23rd Annual Conference on Neural Information Processing Systems(NIPS), 2010, Curran, RedHook, USA, 2010:1 –9.

[16] Fouss F, Pirotte A. Random-walk computation of similarities between nodes of a graph with application to collaborative recommendation[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2007, 19(3):355 –369.

[17] Ben-Israel A, Greville T. Generalized inverses: theory and applications[M]. seconded. Springer –Verlag, 2003.

[18] Herstein I, Winter D. Matrix theory and linear algebra[M]. Maxwell Macmillan International Editions, 1988, 440 –441.

[19] Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points [J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69:17 –20.

[20] Greenbaum A. Iterative methods for solving linear systems [M]. Society for Industrial and Applied mathematics, 1997.

[21] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems [J]. Society for Industrial and Applied mathematics, 2000.

[22] Wu Q, Tan S B, Zhai H J, et al. SentiRank: cross –domain graph ranking for sentiment classification[C] //Proceedings of the IEEE/WIC/ACM International Joint Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology, 2009: 309 –314.

[23] Pang B, Lee L L, Vaithyanathan S. Thumbs up Sentiment classification using machine learning techniques [C] // Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP), Philadelphia, 2002: 79 –86.

[24] Hu M Q, Liu B. Mining opinion features in customer reviews[C]// Proceedings of Nineteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI –2004), 2004.