Lévy 过程驱动的随机非牛顿流的鞅解*

黄建华，李　劲
（国防科技大学 理学院，湖南 长沙　410073）

摘　要： 研究了 Lévy 过程驱动的随机非牛顿流动力系统。研究有限维近似问题解的分布在选定的 Hilbert 空间中的胎紧性，通过 Skorohod 嵌入定理和鞅表示定理，得到随机非牛顿流鞅解的存在性。

关键词： 随机非牛顿流；鞅解；Lévy 噪声
中图分类号： O175.29　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1001－2486(2012)05－0169－06

Martingale solution of stochastic non-Newtonian fluid driven by Lévy noise

HUANG Jianhua, LI Jin
(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The stochastic non-Newtonian flow driven by Lévy noises was studied. By the tight compactness of distribution of the solution for finite-dimensional approximate in a Hilbert space, and Skorohod embedding theorem and representation of martingale, the existence of the martingale solution was confirmed.

Key words: stochastic non-Newtonian fluid; martingale solution; Lévy noise

非牛顿流体普遍存在于自然界和现实生活中，在通常情况下，其可以流动，可以看做流体，同时它又具有某些固体的特性，如反弹等。数学上，非牛顿流与牛顿流的最大区别在于非牛顿流的应力张量与变形率张量不能通过牛顿线性本构关系表示。Bellout，Bloom 和 Nečas 等在总结多极流模型的基础上，建立了如下非线性、等温、不可压、双极粘性流模型

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \tau(e(u)) = -\nabla \pi + f, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\tau(e(u))$ 代表应力张量的粘性部分，仅依赖于变形率张量，其本构方程为

$$\tau(e(u)) = 2(\varepsilon + \mu_0 |e(u)|^{p-2})e(u) - 2\mu_1 \Delta(e(u)) \tag{2}$$

当式(2)中的 $\mu_0 = \mu_1 = 0$ 时，方程即为不可压 Navier-Stokes 方程。关于非牛顿流的研究文献很多，可参阅文献[5]及[1]，关于非自治非牛顿流动力系统的研究参阅文献[8－9]。高斯噪声驱动的随机非牛顿流动力系统参阅文献[10]，文献[6]利用 Flandoli 和 Gatarek 提出的方法[4]研究了乘性高斯噪声驱动的随机非牛顿流鞅解的存在性。注意到高斯过程的样本轨道是连续的，而 Lévy 噪声的样本轨道是不连续的，具有跳。关于 Lévy 过程驱动的随机偏微分方程的研究很多，可参阅文献[7]等，但研究 Lévy 过程驱动的随机偏微分方程的鞅解的结果并不多。文献[2]研究了带跳的 3D Navier-Stokes 方程鞅解的存在性。注意到由于 Lévy 过程带有跳，在验证鞅解时变得更加复杂和困难。

受文献[2]的启发，研究下面的 Lévy 噪声驱动的随机非牛顿流的鞅解：

$$\begin{cases} du + ((u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \tau(e(u)) + \nabla \pi)dt \\ = f(x)dt + \int_{|x|_K \le 1} F(u(t-,x))\, \tilde{N}_p(dt,dx), \\ \nabla \cdot u = 0, x \in D \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

边值条件

$$u(x,t) = 0, \tau_{ijk} n_j n_l = 0, x \in \partial D, t \in [0,T]$$

其中 $\tau_{ijl} = 2\mu_1 \dfrac{\partial e_{ij}}{\partial x_l}$$(n = 2, i,j,l = 1,2; n = 3, i,j,l = 1,2,3)$。$D$ 是 R^2 中具有光滑边界的有界区域。注意到边值条件中，$u(x,t) = 0$ 表示不滑动条件，$\tau_{ijk} n_j n_l = 0$ 表示压力的一阶动量在边界上为零，π

* 收稿日期：2012－03－09
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10971225)；湖南省自然科学基金资助项目(11JJ3004)；留学回国科研启动基金资助项目
作者简介：黄健华(1968—)，男，湖北随州人，教授，博士，E-mail：jhhuang32@nudt.edu.cn

代表压力，$\tau(e(u))$ 是一个对称压力张量，且满足方程(2)，$e(u)=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})$，$|e(u)|^2=\sum_{i,j=1}^{n}|e_{ij}(u)|^2, n=2,3$。其中 $\mu_0>0, \mu_1>0$。f，$\tilde{N}_{\bar{p}}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 和 F 满足下面的假设：

(i) $u_0\in H, f\in L^2((0,\infty);V')$。

(ii) $\bar{p}=\bar{p}(t), t\in D_{\bar{p}}$ 是在可测空间 K 上具有补偿测度 $t\lambda(U)$ 类(QL)的稳态 F_t - 泊松点过程。$\lambda(\mathrm{d}x)$ 是 $\bar{p}$ 的特征测度，且满足 $\int_K |x|_K^2\wedge 1\lambda(\mathrm{d}x)<\infty$。$N_{\bar{p}}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 是计数测度，定义为

$$N_{\bar{p}}((0,t]\times U)=\#\{s\in D_{\bar{p}}^{-}: s\leqslant t, \bar{p}(s)\in U\},$$
$$t>0, \forall U\in B(K)$$

其中 $D_{\bar{p}}$ 是 $\bar{p}$ 的定义域，$\tilde{N}_{\bar{p}}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=N_{\bar{p}}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)-\mathrm{d}t\lambda(\mathrm{d}x)$。

(iii) $F(\cdot,\cdot)$ 是 $H\times K\to H$ 可测函数，且存在 $0<p<2$ 使得对每个 $u,u_1,u_2\in H$ 及 $x\in K$，都有

$$\int_{|x|\leqslant 1}|F(u_1,x)-F(u_2,x)|_H^2\lambda\mathrm{d}x \leqslant C_1\{|u_1-u_2|_H^2\wedge|u_1-u_2|_H^p\},$$
$$\int_{|x|\leqslant 1}|F(u,x)|_H^2\lambda\mathrm{d}x\leqslant C_2(1+|u|_H^2)。$$

1 泛函框架与引理

定义 $V\times V\to\mathbf{R}$ 上正定的椭圆对称双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 为

$$a(u,v)=\int_D\frac{\partial e_{ij}(u)}{\partial x_k}\frac{\partial e_{ij}(v)}{\partial x_k}\mathrm{d}x, (u,v\in V)$$

由 Lax-Milgram 引理可知，存在线性算子 A，满足

$$\langle Au,v\rangle_{V'\times V}=a(u,v)=\langle f,v\rangle_{V'\times V}, \forall v\in V,$$

则 A 的定义域为 $D(A)=\{u\in V, a(u,v)=(f,v), f\in H\subset V', \forall v\in V'\}$，事实上，$A=P\Delta^2$，$P$ 是从 $L^2(D)$ 到 H 上的投影算子，并且 A^{-1} 在 H 中紧，存在可列个实特征值 λ_n 使得 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\to\infty, n\to\infty$，其相应的特征函数 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 H 中的标准正交基，使得 $A\varphi_n=\lambda_n\varphi_n(x)$，$\varphi_n\in D(A)$。

对 $\forall u\in V$，令 $\gamma(u)=(\varepsilon+|e(u)|^2)^{\frac{p-2}{2}}$，定义算子 $A_p(\cdot): V\to V'$ 为

$$(A_p(u),v)=\int_D\gamma(u)e_{ij}(u)e_{ij}(v)\mathrm{d}x, u,v\in V$$

定义连续的双线性算子 $B(\cdot,\cdot): H^1(D)\times H^1(D)\to H^{-1}(D)$ 为

$$(B(u,v),w)=\int_D u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\mathrm{d}x, u,v,w\in H^1(D)$$

则 $(B(u,v),w)=-(B(u,w),v)$，$(B(u,v),v)=0$。方程(3)可写成 H 中抽象随机发展方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}u+[\mu_1Au+B(u,u)+2\mu_0A_p(u)]\mathrm{d}t\\ =f\mathrm{d}t+\int_{|x|_K\leqslant 1}F(u(t-,x))\tilde{N}_{\bar{p}}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x),\\ u(0)=u_0\in H\end{cases}\tag{4}$$

下面给出方程(4)鞅解的定义。

定义 1 给定 H 中的一个概率测度 μ_0，称空间 (Ω_α,F_α) 中的概率测度 P 为满足初始分布 μ_0 的鞅解，如果

(1) 对任意的 $T>0$，$P(\sup_{t\in[0,T]}|\eta_t|_H^2+\int_0^T\|\eta_s\|_V^2\mathrm{d}s<\infty)=1$。

(2) 对任意的 $\varphi\in V_\alpha$，随机过程 $\langle\eta_t,\varphi\rangle_{V'_\alpha,V_\alpha}$ 是个半鞅，$(M_t^\varphi,F_t^\alpha,P)$ 是平方可积的 càdlàg 鞅，其中 M_t^φ 定义为

$$M_t^\varphi(\eta)\langle\eta_t-\eta_0,\varphi\rangle_H+\mu_1\int_0^t\langle\eta(s),A\varphi\rangle_H\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle B(\eta_s,\varphi),\eta_s\rangle_H\mathrm{d}s-2\mu_0\int_0^t(A_p(u(s)),\varphi)\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle\varphi,f(s)\rangle_{V,V'}\mathrm{d}s$$

且满足

$$M_t^\varphi(\eta)=\sum_{0\leqslant s\leqslant t}\Delta\langle\eta_s,\varphi\rangle_H$$
$$-\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1}\langle F(\eta_s,x),\varphi\rangle_H\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}s。$$

(3) $\mu_0=\Pi_0P$。

引理 1 （文献[6]，引理 2.1 - 2.2）

(1) 如果 $1<p<2(n=2,3)$，或者 $2<p\leqslant 2+\frac{2}{n+2}(n=2,3)$，则 $A_p(\cdot): V\to V'$ 是局部 Lipschitz 连续的，即

$$\|A_p(u)-A_p(v)\|_{V'}$$
$$\leqslant C(\|u\|_V,\|v\|_V,p,\varepsilon)\|u-v\|_V,$$
$$\forall u,v\in V。$$

(2) 假设 $u\in L^2(0,T;V)\subset L^\infty(0,T;H)$，则 $A_p(u)\in L^2(0,T;V')$。

定理 1 （Skorohod 嵌入定理，文献[3]，定理 2.4）对于 $B(E)$ 中的任意概率测度序列 $\{\mu_n\}$，如果弱收敛到概率测度 μ，则存在一个概率空间 (Ω,F,P) 和随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 使得 $L(X_m)=\mu_m$，$L(X)=\mu$ 且

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X, \quad \text{P. a. s.}$$

下面叙述本文的主要结论。

定理 2 假设条件(i) - (iii)成立，且对 H

中任意的概率测度 μ 满足 $\int_H |\chi|_H^2\mu(\mathrm{d}x) < \infty$,则方程 (3) 存在一个鞅解。

2　主要结论的证明

这一节,将用经典 Galerkin 近似方法及在选定的 Hilbert 空间中的胎紧性,通过 Skorohod 嵌入定理和鞅表示定理,通过验证 Marlkov 半群的强 Feller 性和不可约性,得到随机非牛顿流鞅解的存在性。

设 $u_n(t)$ 是下面有限维近似方程在 H_n 的 Càdlàg 适应解:

$$\begin{cases}\mathrm{d}u_n+[\mu_1Au_n+P_nB_n(u_n,u_n)+2\mu_0P_nA_p^n(u_n)]\mathrm{d}t\\ =P_nf\mathrm{d}t+\int_{|x|_K\leqslant1}F_n(u_n(t-,x))\tilde{N}_{\bar p}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x),\\ u_n(0)=P_nu_0\in H_n\text{。}\end{cases}\tag{5}$$

引理 2　假设 $\mathrm{E}|u_n(0)|_H^2<\infty$,则对于每个 $T>0$,有

$$\mathrm{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|u_n(t)|_H^2+\mathrm{E}\int_0^{\mathrm{T}}\|u_n(s)\|_V^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C(T,\mu_1,\int_0^{\mathrm{T}}\|f_n(s)\|\mathrm{d}s,\mathrm{E}|u_n(0)|_H^2)\tag{6}$$

证明　对 $|u_n|_H^2$ 应用 Itô 公式可得

$$|u_n(t)|^2=|u_n(0)|^2+2\int_0^t(Qu_n(s,x),u_n(s,x))\mathrm{d}t$$
$$+2\int_0^t(f_n,u_n(s,x))\mathrm{d}t+\int_0^{t+}\int_{|x|\leqslant1}(|u_n(s-,x)$$
$$+F_n(u_n(s-,x),x)|^2-|u_n(s-,x)|^2)\tilde{N}_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+\int_0^t\int_{|x|\leqslant1}(|u_n(s,x)+F_n(u_n(s,x),x)|^2$$
$$-|u_n(s,x)|^2-2(u_n(s,x),F_n(u_n(s,x)),x))\lambda(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\text{。}$$

其中 $Qu_n=-\mu_1Au_n-2\mu_0P_nA_p^nu_n-P_nB_n(u_n,u_n)$,则有

$$(Qu_n(t),u_n(t))=(-\mu_1\Delta^2u_n,u_n)$$
$$-2\mu_0(P_nA_p^nu_n,u_n)-(P_nB_n(u_n,u_n),u_n)$$

由不可压缩条件 $\nabla\cdot u=0$ 可得 $(B_n(u_n,u_n),u_n)=0$。

注意到

$$2\int_0^t\langle u_n(s,x),f_n(s)\rangle\mathrm{d}s\leqslant\mu_1\int_0^t\|u_n(s,x)\|_V^2\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{\mu_1}\int_0^t|f_n(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$

则有

$$|u_n(t)|^2+\mu_1\int_0^t\|u_n(s)\|_V^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant|u_n(0)|^2+\frac{1}{\mu_1}\int_0^t|f_n(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s,x),x)|^2\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^{t+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),x)|^2$$
$$+2(u_n(s-,x),F_n(u_n(s-,x),x)\tilde{N}_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

由 Burkhold-Davis-Gundy 不等式可得

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|(|F_n(u_n(s-,x),x)|^2+2\langle u_n(s-,x),$$
$$F_n(u_n(s-,x),x)\rangle\tilde{N}_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)|$$
$$\leqslant\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|(|F_n(u_n(s-,x),x)|^2|$$
$$+\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|(|2\langle u_n(s-,x),F_n(u_n(s-,x),$$
$$x)\rangle\tilde{N}_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)|$$
$$\leqslant\mathrm{E}[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),x)|^4N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]^{1/2}$$
$$+\mathrm{E}[[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}(4\langle u_n(s-,x),F_n(u_n(s-,x),$$
$$x)\rangle^2N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]^{1/2}$$
$$\leqslant2\mathrm{E}\{\sup_{t\in[0,T]}|u_n(s)|[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),$$
$$x)|^2N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]^{1/2}\}$$
$$+\mathrm{E}[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),x)|^2N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_n(s)|^2+5\mathrm{E}[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),$$
$$x)|^2N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]$$

直接计算可得

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_n(t)|^2$$
$$\leqslant\mathrm{E}|u_n(0)|^2+E\frac{1}{\mu_1}\int_0^{\mathrm{T}}|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{E}\int_0^t\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),x)|^2\lambda(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}||F_n(u_n(s-,x),x)|^2$$
$$+2\langle u_n(s-),F_n(u_n(s-,x),x)\rangle\tilde{N}_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)|$$
$$\leqslant|u_n(0)|^2+\frac{1}{4}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_n(s)|^2$$
$$+5\mathrm{E}[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),x)|^2N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]$$
$$+\frac{1}{\mu_1}\int_0^{\mathrm{T}}|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{E}[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),x)|^2N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)],$$

这表明

$$\frac{3}{4}\mathrm{E}\,sup_{t\in[0,T]}|u_n(t)|^2$$
$$\leqslant|u_n(0)|^2+\frac{1}{\mu_1}\int_0^{\mathrm{T}}|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$
$$+6\mathrm{E}[\int_0^{T+}\int_{|x|\leqslant1}|F_n(u_n(s-,x),x)|^2N_{\bar p}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]$$

$$|u_n(0)|^2+\frac{1}{\mu_1}\int_0^T|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$
$$+6C\mathrm{E}\int_0^T(1+|u_n(s)|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant|u_n(0)|^2+\frac{1}{\mu_1}\int_0^T|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$
$$+6CT+6C\int_0^T\mathrm{E}(\sup_{l\in[0,s]}|u_n(l)|^2)\mathrm{d}s$$

由 Gronwall 不等式可得

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_n(t)|^2\leqslant C(T,\ \mu_1,|u_n(0)^2,\int_0^T|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s|)$$

类似地

$$\mathrm{E}\int_0^T\|u_n(s)\|_V^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant|u_n(0)|^2+\frac{1}{\mu_1}\int_0^T|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s$$
$$+6CT+6CT\mathrm{E}(\sup_{l\in[0,s]}|u_n(l)|^2)$$

推论 1 设 $\tau\geqslant 0$ 是停时，$(u_n(t))_{t\geqslant0}$ 是 Càdlàg 适应过程，且在 $[0,\tau]$ 上几乎必然满足方程(5)。如果 $\mathrm{E}|u_n(0)|_{H_n}<\infty$，则对于每个 $T>0$，

$$\mathrm{E}(\sup_{t\in[0,T]}|u(t\wedge\tau)|_{H_n}^2)$$
$$\leqslant C(T,\mu_1,\int_0^T|f_n(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s,\mathrm{E}|u_n(0)|_{H_n}^2)$$

引理 3 对每个 F_0 - 可测的 $u_n(0):\Omega\to H_n$，如果对某个常数 $C>0$，$|u_n(0)|_{H_n}\leqslant C$，则方程(5)在 $(\Omega,F,(F_t)_{t\geqslant0},P)$ 上都存在唯一适应的解 $(u_n(t))_{t\geqslant0}$。

证明 对每个 $m>C$，令 $B_n^m(\cdot):H_n\to H_n$ 是 Lipschitz 连续函数，使得对任意的 $|u|_{H_n}\leqslant m$，定义 $B_n^m(u)=B_n(u,u)$。

考虑下面的方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}u_n+[\mu_1Au_n+P_nB_n^m(u_n,u_n)+2\mu_0P_nA_p^n(u_n)]\mathrm{d}t\\ =P_nf\mathrm{d}t+\int_{|x|_K\leqslant1}F_n(u_n(t-,x))\tilde{N}_p^-(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x),\\ u_n(0)=P_nu_0\in H_n。\end{cases}\tag{7}$$

由引理 1 可知，A_p^n,B_n^m,F_n,A_n 都是 Lipschitz 连续的。由标准的讨论可知，方程(7)存在唯一的 càdlàg 适应解 $(u_n^m(t))_{t\geqslant0}$。

定义停时 τ_m 如下

$$\tau_m=inf\{t\geqslant0,|u_n^m(t)|_{H_n}\geqslant m\}\wedge T$$

注意到 $u_n^m(\tau_n)$ 由 $t\in[0,\tau_m)$ 决定，则由推论 1 可知

$$\mathrm{E}(\sup_{t\in[0,T]}|u_n^{(m)}(t\wedge\tau_m)|_{H_n}^2)$$
$$\leqslant C(T,\mu_1,\int_0^T|f_n(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s,\mathrm{E}|u_n(0)|_{H_n}^2)$$

及

$$\mathrm{E}(1_{\tau_m<T}|u_n^{(m)}(\tau_m)|_{H_n}^2)$$
$$\leqslant C(T,\mu_1,\int_0^T|f_n(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s,\mathrm{E}|u_n(0)|_{H_n}^2)$$

这表明

$$P(\tau_m<T)\leqslant\frac{1}{m^2}C(T,\mu_1,\mathrm{E}|u_n(0)|_{H_n}^2,\int_0^T|f(s)|_{V'}^2\mathrm{d}s)$$

注意到在 $\{\tau_m<T\}$ 上，$|u_n^{(m)}(T\wedge\tau_m)|_{H_n}^2\geqslant m^2$，当 $M>m$ 时，$t_M\geqslant\tau_m$，且满足性质：$P(u_n^{(M)}(t)=u_n^{(m)}(t),t\in[0,\tau_m))=1$。当 $\tau_\infty=\sup_{m>C}\{\tau_m\}$ 时，定义随机过程 $u_n^\infty(t)$：$t\in[0,\tau_\infty)$，对任意正整数 m，在区间 $[0,\tau_m)$ 上满足 $u_n^\infty(t)=u_n^{(m)}(t)$，因此 $u_n^\infty(t)$ 为 $[0,\tau_\infty)$ 上的解。

由于对每个 m，$P(\tau_\infty<T)\leqslant P(\tau_m<T)\leqslant\frac{C}{m^2}$，且 $P(\tau_\infty<T)=0$，因此，对每个 $\varepsilon>0$，当 $t\in[0,T-\varepsilon]$ 时，$u_n^\infty(t)$ 是方程(7)的解。再由 T 的任意性可知，该解是整体存在的。

推论 2 对每个 F_0 - 可测的 $u_n(0):\Omega\to H_n$，方程(7)在 $(\Omega,F,(F_t)_{t\geqslant0},P)$ 上都存在唯一的适应解 $(u_n(t))_{t\geqslant0}$。

证明 定义 $\Omega=\{|u_n(0)|_{H_n}\leqslant m\}$，则 $\Omega_m\in F$。定义 $u_n^{(m)}(0)=\begin{cases}u_n(0),u_n(0)\in\Omega,\\ 其他\end{cases}$，设 $(u_n^{(m)}(t))_{t\geqslant0}$ 是方程(7)的满足初始条件 $u_n^{(m)}(0)$ 的唯一解。如果 $M>m$，则

$P(\Omega_m\cap(u_n^{(M)}(t)=u_n^{(m)}(t)),t\geqslant0)=P(\Omega_m)$ 这样可以在 $\Omega'=\bigcup_m\Omega_m$ 上唯一定义 $u_m(t)$，注意到 $P(\Omega')=1$，因此得到整体解。

引理 4 $\{u^n(t)\}_{n=1}^\infty$ 在 $\Omega\cap L^2([0,T];H)$ 中是 D 弱胎紧的。

证明 选择 $\alpha\geqslant1$，令 $D=V_\alpha$，只需证 u_n 是 D - 弱胎紧即可。由文献[2]的引理 2.5 可知，只需证明 $\forall\varphi\in D$，$\{<u_n(\cdot),\varphi>_{D',D}\}$ 在 $D_R[0,T]$ 上胎紧即可。由引理 2 可知，对每个 $T>0$，有

$$\mathrm{E}^\varphi[\sup(u_n(t),\varphi)_{D',D}]\leqslant|\varphi|_H^2\mathrm{E}[\sup|u_n(t)|_H^2]$$
$$\leqslant|\varphi|_H^2C(T,\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^2\mathrm{d}s,\mathrm{E}|u_n(0)|_H^2)。$$

对于任意的 τ_n,δ_n 满足假设

(1) 对每个 n，τ_n 是关于 σ - 域的停时，且取有限多个值。

(2) 对每个 n，常数 $\delta_n\in[0,T]$，且当 $n\to\infty$ 时，$\delta_n\to0$。

则有

$$|\langle u_n(\tau_n+\delta_n)-u_n(\tau_n),\varphi\rangle_{D',D}|$$

$$\leqslant \int_{\tau_n}^{\tau_n+\delta_n} |\langle \varphi, B_n(u^n(s), u^n(s))_H\rangle| \mathrm{d}s$$
$$+ \int_{\tau}^{\tau_n+\delta_n} |\langle \varphi, \mu_1 A u_n(s)\rangle_H| \mathrm{d}s$$
$$+ \int_{\tau}^{\tau_n+\delta_n} |\langle \varphi, 2\mu_0 A_p u_n(s)\rangle_H| \mathrm{d}s$$
$$+ \int_{\tau}^{\tau_n+\delta_n} |\langle \varphi, f_n(s)\rangle_{V,V'}| \mathrm{d}s$$
$$+ \left|\int_0^T \int_{|x|\leqslant 1} 1_{(\tau_n,\tau_n+\delta_n)} \langle F_n(u^n(s-),x),\varphi\rangle_H \widetilde{N}_{\bar{p}}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right|$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$$

由关于 F_n 的假设可知

$$E(I_4) = E\left[\left|\int_0^T \int_{|x|\leqslant 1} 1_{(\tau_n,\tau_n+\delta_n)} \langle F_n(u^n(s-),x),\varphi\rangle_H \widetilde{N}_p(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right|^2\right]$$
$$= E\left[\int_0^T \int_{|x|\leqslant 1} 1_{(\tau_n,\tau_n+\delta_n)} \langle F_n(u^n(s-),x),\varphi\rangle_H^2 \lambda(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right]$$
$$\leqslant E\left[\int_0^T 1_{(\tau_n,\tau_n+\delta_n)} |\varphi|_H^2 C(|u_n(s)|_H^2 + 1)\mathrm{d}s\right]$$
$$\leqslant C|\varphi|_H^2 E\left[\sup_{s\in[0,T]} |u_n(s)|_H^2 + 1\right]\delta_n$$

即 I_4 以概率趋于零。

最后证 $\{u_n\}$ 在 $L^2([0,T];H)$ 上是胎紧的。事实上

$$u_n(t) = u_n(0) - \int_0^t \mu_1 A_n u_n(s)\mathrm{d}s$$
$$- \int_0^t B_n(u_n(s),u_n(s))\mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^t 2\mu_0 A_n^p u_n(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f_n(s)\mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^{t+} F_n(u_n(s-,x),x)\widetilde{N}_{\bar{p}}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$= J_m^1(t) + J_m^2(t) + J_m^3(t) + J_m^4(t) + J_m^5(t) + J_m^6(t)$$

容易证明 $E\|J_m^1\|^2 \leqslant C, E\|J_m^5\|^2 \leqslant C$, $E\|J_m^2\|^2_{H^1(0,T,V')} \leqslant C$。注意到当 $\alpha \in (0,1/2)$ 时,$H^1(0,T;V')$ 嵌入 $W^{\alpha,2}(0,T;V')$ 中。下面估计 J_m^3, J_m^4, J_m^6。注意到对所有的 $v \in H^2(D)$, 有

$$|(B(u,u),v)| \leqslant \|u\| \|u\|_1 \|v\|_\infty \leqslant C\|u\| \|u\|_1 \|v\|_2$$

则有

$$E\|J_m^3\|^2_{H'(0,T;V')} \leqslant C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\|^2 \int_0^T \|u_m(s)\|_1^2\mathrm{d}s \leqslant C$$

当 $n = 2,3, 1 < p < 2$ 时,

$$\|A_m^p(u_m)\|^2_{L^2(0,T;V')} \leqslant C\int_0^T \|u_m(s)\|_2^2\mathrm{d}s;$$

当 $n = 2, 2 < p \leqslant \frac{5}{2}$ 时,

$$\|A_m^p(u_m)\|^2_{L^2(0,T;V')} \leqslant C\int_0^T \|u_m(s)\|_2^2\mathrm{d}s + CT^{\frac{5-2p}{2}}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|u_m(s)\|\left(\int_0^T \|u_m(s)\|_2^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{2p-3}{2}}$$

当 $n = 3, 2 < p \leqslant \frac{12}{5}$ 时,

$$\|A_m^p(u_m)\|^2_{L^2(0,T;V')} \leqslant C\int_0^T \|u_m(s)\|_2^2\mathrm{d}s + CT^{\frac{12-5p}{4}}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|u_m(s)\|^{\frac{4-p}{2}}\left(\int_0^T \|u_m(s)\|_2^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{5p-8}{4}}$$

当 $\theta \in (0,\frac{1}{2})$ 时,直接计算得到

$$E\left[\|J_m^6(\cdot)\|^2_{W^{\theta,2}([0,T],H)}\right]$$
$$= E\left[\int T_0 |J_m^6(t)|_H^2\mathrm{d}t\right] + E\left[\int_0^T\int_0^T \frac{|J_m^6(t) - J_m^6(s)|_H^2}{|t-s|^{1+2\theta}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right]$$
$$= \int_0^T E[|J_m^6(T)|_H^2]\mathrm{d}t + \int_0^T\int T_0 \frac{E|J_m^6(t) - J_m^6(s)|_H^2}{|t-s|^{1+2\theta}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s]$$
$$= \int T_0 E\left[\int t_0 \int_{|x|\leqslant 1} |F_n(u_n(s),x)|_H^2 \lambda(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^T \frac{E\left[\int_s^t\int_{|x|\leqslant 1} |F_n(u_n(z),x)|_H^2\lambda(\mathrm{d}x)\mathrm{d}z\right]}{|t-s|^{1+2\theta}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C(T+\theta)\left\{\int_0^T E[|u_n(s)|_H^2]\mathrm{d}s + \int_0^T\int_0^T \frac{\int_s^t E[|u_n(z)|_H^2]\mathrm{d}z}{|t-s|^{1+2\theta}}\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C\left(T,\theta,\int\|f(s)\|_{V'}^2\mathrm{d}s, m_2\right)$$

因此

$$E\left[\|\xi(\cdot)\|_{W^{\theta,2}([0,T];D(A^{-\gamma}))}\right] \leqslant C\left(m^2,T,\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^2\mathrm{d}s\right)$$

由文献[4]的定理4.6可知,P_n 在 $L^2([0,T];H)$ 是胎紧的,因此在 $\Omega\cup L^2_{Loc}([0,\infty);H)$ 中子序列 $\{P_{n_k}\}$ 存在弱极限 P,其是一个概率测度。

引理 5　P 是鞅解。

证明　定义截断函数 $g(x)\in C(R,R)$, $|g(x)| \leqslant |x|$, $|g'(x)|\leqslant C$ 且 $g(x) = \begin{cases} x, & |x|\geqslant 1,\\ 0, & |x|\leqslant 1/2\end{cases}$。

对任意 $\phi\in D$,选择 $t\in Z$,并令

$$Y_n^m(\xi)(t) = \sum_{s\in[0,t]}\frac{1}{m}g(m\cdot\langle\Delta\xi(s),\phi\rangle_{D',D}) - \int_0^t\int_{|x|\leqslant 1}\frac{1}{m}g(m\cdot\langle F_n(\xi(s),x),\phi\rangle)\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

$$Y^m(\xi)(t) = \sum_{s\in[0,t]}\frac{1}{m}g(m\cdot\langle\Delta\xi(s),\phi\rangle_{D',D}) - \int_0^t\int_{|x|\leqslant 1}\frac{1}{m}g(m\cdot\langle F(\xi(s),x),\phi\rangle)\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

类似文献[2]的讨论可知,(u_m, F_s, P) 是平

方可积鞅，($Y_n^m(\xi)(t),P_n$) 是平方可积 Càdlàg 鞅。由 Skorokhod 嵌入定理，可以证明(Y^m,P) 在 $L^2(\Omega\times[0,T];\mathbf{R})$ 中是柯西序列，且 $\lim\limits_{m\to\infty}Y^m=Y^{\phi}$。下面验证 $\mathrm{E}^P\mathrm{e}^{iu[M_t^{ei}-Y^{ei}(t)]}=1$。固定 n，设(Y_n^m, P_n) 是 $L^2(\Omega\times[0,T];\mathbf{R})$ 中的柯西序列，并记 $Y^m=\lim\limits_{n\to\infty}Y_n^m$，则对任意固定的 $n>i$，令

$$M_m^n(\xi)(t)=\langle\xi_t-\xi_0,e_i\rangle_H+\int_0^t\langle\xi_s,\mu_1Ae_i\rangle_H\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle B(\pi_m\xi_s,e_i),\pi_m\xi_s\rangle_H\mathrm{d}s+\int_0^t\langle\xi_s,2\mu_0A_pe_i\rangle_H\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle e_i,f_n(s)\rangle_{V,V'}\mathrm{d}s,$$

$$M^n(\xi)(t)=\langle\xi_t-\xi_0,e_i\rangle_H+\int_0^t\langle\xi_s,\mu_1Ae_i\rangle_H\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle B(\xi_s,e_i),\xi_s\rangle_H\mathrm{d}s+\int_0^t\langle\xi_s,2\mu_0A_pe_i\rangle_H\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle e_i,f_n(s)\rangle_{V,V'}\mathrm{d}s,$$

$$M_m(\xi)(t)=\langle\xi_t-\xi_0,e_i\rangle_H+\int_0^t\langle\xi_s,\mu_1Ae_i\rangle_H\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle B(\pi_m\xi_s,e_i),\pi_m\xi_s\rangle_H\mathrm{d}s+\int_0^t\langle\xi_s,2\mu_0A_pe_i\rangle_H\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t\langle e_i,f(s)\rangle_{V,V'}\mathrm{d}s。$$

则有

$$\left|\mathrm{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u[M_t^{ei}]-Y^{ei}(t)}-1\right|$$
$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{E}^{P_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u[M_m^n(t)-Y_n^k(t)]}-\mathrm{E}^{P_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u[M^n(t)-{}^nY(t)]}\right|$$
$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mathrm{E}^{P_n}$$
$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u[\int_0^t<B(\xi_s,e_i),\xi>_H-<B(\pi_m\xi_s,e_i),\pi_m\xi_s>_H\mathrm{d}s]+iu[nY(t)-Y_n^k(t)]}-1\right|$$
$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}[\mathrm{E}^{P_n}$$
$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u[\int_0^t<B(\xi_s,e_i),\xi>_H-<B(\pi_m\xi_s,e_i),\pi_m\xi_s>_H\mathrm{d}s]}-1\right|$$
$$+\mathrm{E}^{P_n}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u[{}^nY(t)-Y_n^k(t)]}-1\right|]$$

由文献[2]的定理3.3和定理4.1的证明可知，上式最后一行的两部分均为0，从而 P 是方程的鞅解。

综合引理2至引理5的证明，结合鞅解的定义1即可证得定理2。

参考文献(References)

[1] Bloom F, Hao W. Regularization of a non-Newtonian system in an unbound channel: existence and uniqueness of solutions[J]. Nonlinear Anal., 2001,44: 281-309.

[2] Dong Z, Zhai J. Martingale solutions and Markov selection of stochastic 3D Navier-Stokes equations with jump[J]. J. Differential Equations, 2011,250:2737-2778.

[3] DaPrato G, Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions[M]. Cambridge University Press, 1992.

[4] Flandoli F, Gatarek D. Martingale and stationary solutions for stochastic Navier-Stokes equations[J]. Probab. Theory Relat. Fields,1995,102:367-391.

[5] 郭柏灵,林国广,尚亚东. 非牛顿流动力系统[M]. 北京:国防工业出版社,2006.
GUO Boling, LIN Guoguang, SHANG Yadong. Non-Newtonian fluids dynamical systems[M]. National Defense Industry Press, 2006. (in Chinese)

[6] Guo B L, Guo C X, Zhang J J. Martingale and stationary solutions for stochastic non-Newtonian fluids[J]. Differential and Integral Equations, 2010,23: 303-326.

[7] Peszat S, Zabczyk J. Stochastic partial differential equations with levy noises-evolution equation approach[M]. Cambridge University Press, 2009.

[8] Zhao C, Zhou S. Pullback attractors for a non-autonomous incompressible non-Newtonian fluid [J]. J. Differential Equations. 2007,238:394-425.

[9] Zhao C,Li Y. A note on the asymptotic smoothing effect of solutions to a non-Newtonian system in 2-D unbounded domains[J]. Nonlinear Anal., 2005,60:475-483.

[10] Zhao C, Duan J. Random attractor for the Ladyzhenskaya model with additive noise[J]. J. Math. Anal. Appl., 2010, 362:241-251.