基于欧拉角观测模型的航天器姿态确定方法*

张力军[1],张士峰[1],杨华波[1],钱　山[2]
(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073;
2. 西安卫星测控中心 宇航动力学国家重点实验室,陕西 西安 710043)

摘　要:针对基于乘性误差四元数的EKF姿态确定技术,系统研究了姿态敏感器常用的欧拉角观测模型,从两个方面证明了目前许多文献中所构造的欧拉角误差相对于误差四元数矢部的测量灵敏度矩阵存在缺陷,从理论上剖析了这一问题的成因,并推导了正确的测量灵敏度矩阵形式,数值仿真进一步验证了本文的结论。

关键词:航天器;姿态确定;欧拉角观测模型;乘性误差四元数
中图分类号:TP316　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001-2486(2012)06-0084-05

Spacecraft attitude determination based on Euler angle measurement model

ZHANG Lijun[1], *ZHANG Shifeng*[1], *YANG Huabo*[1], *QIAN Shan*[2]
(1. College of Aerospace and Materials Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. The State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043, China)

Abstract: For the multiplicative quaternion-error attitude determination approach, the attitude sensors for Euler angle measurements are studied. Two different methods were used to demonstrate that the measurement sensitivity matrix of Euler angle error with respect to error quaternion solved in many references is false. The correct measurement sensitivity matrix is presented and the reason for this mistake is analyzed in detail, and the numerical examples are given for the validation and verification of the conclusions.

Key words: spacecraft; attitude determination; Euler angle measurement model; multiplicative error quaternion

航天器上应用的姿态敏感器种类很多,这些敏感器通常可将其测量值转换为单位矢量形式,进而可利用基于矢量观测的姿态确定方法来获取航天器的姿态,这类问题一般可归结为Wahba问题[1]。倘若姿态敏感器的数据处理单元利用这些观测矢量直接求解出当前姿态信息,并以欧拉角或四元数形式作为测量输出,那么对于该敏感器而言,它的观测量可认为是欧拉角或四元数。因此,常用的姿态敏感器观测模型包括矢量观测模型、四元数观测模型和欧拉角观测模型。

目前,乘性扩展卡尔曼滤波[2-3](Multiplicative Extended Kalman Filter, MEKF)技术常被用于航天器实时姿态确定,其基本思想是估计无约束的三分量姿态误差参数并利用四元数乘法为航天器提供全局非奇异姿态描述。通常,可选取两倍的误差四元数矢部用来描述姿态误差矢量,或者直接对误差四元数矢部进行估计,对于这类常见的乘性误差四元数的EKF姿态确定问题,在对其观测方程线性化时往往需要计算姿态敏感器测量值相对于误差四元数矢部的测量灵敏度矩阵。针对姿态敏感器常用的欧拉角观测模型,大多数文献认为其构造的姿态角测量残差与乘性误差四元数矢部的关系是一个两倍关系,但经研究发现该测量灵敏度矩阵存在不合理性。

1　姿态确定状态方程

1.1　姿态描述与运动学方程

目前,最常用的姿态参数是姿态四元数[12],其优点是用其表示的姿态运动学方程为线性形式,计算量小,且不存在奇异性。四元数是一个四维矢量,定义为 $\boldsymbol{q}=[\varrho^{\mathrm{T}} q_4]^{\mathrm{T}}$,其中 $\varrho\equiv[q_1\ q_2\ q_3]^{\mathrm{T}}=e\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$,$q_4=\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$,这里,$\boldsymbol{e}$ 为单位欧拉旋转轴,ϕ 为旋转角,且四元数满足正交性约束条件

* **收稿日期**:2012-06-01
基金项目:国家863计划资助项目;航天科技创新基金资助项目(CASC201105);国防科技大学优秀研究生创新资助项目(S100104, S110103)
作者简介:张力军(1988—),男,江西鹰潭人,博士研究生,E-mail:alijun_007@163.com;
张士峰(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,Zhang_shifeng@hotmail.com

$\|\boldsymbol{q}\|=1$。姿态矩阵可用四元数描述为[13]

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_1q_2+q_3q_4) & 2(q_1q_3-q_2q_4) \\ 2(q_1q_2-q_3q_4) & -q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_2q_3+q_1q_4) \\ 2(q_1q_3+q_2q_4) & 2(q_2q_3-q_1q_4) & -q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2 \end{bmatrix}$$
$$=(q_4^2-\|\varrho\|^2)\boldsymbol{I}_{3\times3}+2\varrho\varrho^T-2q_4[\varrho\times] \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{I}_{3\times3}$是 3 ×3 的单位阵,$[\varrho\times]$是反对称阵,有如下形式

$$[\varrho\times]\equiv\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

四元数另外一个优点是连续的姿态旋转可用四元数乘法描述,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}')\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}'\otimes\boldsymbol{q})$。其中,符号“$\otimes$”表示四元数乘法,满足

$$\boldsymbol{q}'\otimes\boldsymbol{q}\equiv\begin{bmatrix} q_4'\varrho+q_4\varrho'-\varrho'\times\varrho \\ q_4'q_4-\varrho'\cdot\varrho \end{bmatrix} \tag{3}$$

定义从惯性系到航天器体系的四元数为 $\boldsymbol{q}$,则四元数运动学方程为

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\0\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{q} \tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{\omega}$ 为体系中定义的惯性角速度矢量。

1.2　姿态误差矢量的动力学模型

MEKF 通常以四元数乘积形式对真实姿态进行描述,即[14]

$$\boldsymbol{q}=\delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi})\otimes\hat{\boldsymbol{q}} \tag{5}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{q}}$ 为估计四元数,$\delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi})$为四元数真值 $\boldsymbol{q}$ 与四元数估值 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 之间的误差四元数,可用三分量矢量 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 描述。事实上,$\Delta\boldsymbol{\phi}$ 为航天器体坐标系下定义的姿态误差矢量,它可用多种参数进行描述,如无穷小旋转矢量[15],两倍的四元数矢部[2],两倍的罗德里格(Rodrigues)参数或吉布斯(Gibbs)向量[3],四倍的修正罗德里格参数[16]等。根据小角近似条件可以得到

$$\delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi})\approx\begin{bmatrix}\dfrac{\Delta\boldsymbol{\phi}}{2}\\ 1-\Delta\dfrac{\boldsymbol{\phi}^2}{8}\end{bmatrix} \tag{6}$$

以及姿态误差矩阵

$$\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q})\approx\boldsymbol{I}_{3\times3}-[\Delta\boldsymbol{\phi}\times] \tag{7}$$

假设航天器的惯性姿态角速度通过陀螺仪测量得到,采用如下测量模型

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}_v$$
$$\dot{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\eta}_u \tag{8}$$

其中,$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 是陀螺的测量输出,$\boldsymbol{\beta}$ 是漂移量,$\boldsymbol{\eta}_v$ 和 $\boldsymbol{\eta}_u$ 是独立的零均值高斯白噪声过程。

线性化 Bortz 方程可得到姿态误差矢量的动力学模型[15]

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\phi}}=-[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]\Delta\boldsymbol{\phi}-(\Delta\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}_v) \tag{9}$$

若用两倍的误差四元数矢部对姿态误差矢量 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 进行描述,则式(7)和(9)可分别转化为

$$\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q})\approx\boldsymbol{I}_{3\times3}-2[\Delta\varrho\times] \tag{10}$$

$$\Delta\dot{\varrho}=-[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]\Delta\varrho-\frac{1}{2}(\Delta\beta+\eta_v) \tag{11}$$

选取误差状态变量 $\Delta\boldsymbol{x}\equiv[\Delta\varrho^T\Delta\beta^T]^T$,可得有陀螺姿态确定系统的误差状态方程

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\Delta x+\boldsymbol{G}\boldsymbol{w} \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times] & -\frac{1}{2}\boldsymbol{I}_{3\times3}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_{3\times3}\end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{w}\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_v\\ \boldsymbol{\eta}_u\end{bmatrix} \tag{15}$$

2　欧拉角观测模型

目前,工程上应用的姿态敏感器种类很多,如三轴磁强计、太阳敏感器和地平仪等,常用的观测模型包括矢量观测模型,四元数观测模型和欧拉角观测模型。本文主要研究欧拉角观测模型,在定义了从惯性系到体系的欧拉角转序后,可利用姿态敏感器的数据处理单元直接计算出三个姿态角作为测量输出。通常,定义姿态敏感器的测量残差为其测量输出与估计输出之差,即

$$\begin{bmatrix}\Delta\tilde{\vartheta}\\ \Delta\tilde{\psi}\\ \Delta\tilde{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\vartheta}\\ \tilde{\psi}\\ \tilde{\varphi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\hat{\vartheta}\\ \hat{\psi}\\ \hat{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta\vartheta\\ \Delta\psi\\ \Delta\varphi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_\vartheta\\ v_\psi\\ v_\varphi\end{bmatrix} \tag{16}$$

式中,$\tilde{\varphi},\tilde{\vartheta},\tilde{\psi}$ 为姿态角的测量输出,$\hat{\varphi},\hat{\vartheta},\hat{\psi}$ 为姿态角的估计输出,$\Delta\tilde{\varphi},\Delta\tilde{\vartheta},\Delta\tilde{\psi}$ 为姿态敏感器的测量残差,$v_\varphi,v_\vartheta,v_\psi$ 为相应的测量噪声。

本文以常见的“312”欧拉角转序为例,依次旋转的欧拉角为 φ,ϑ,ψ,对应称为偏航角、滚转角、俯仰角。在建立式(16)中的测量残差与乘性误差四元数矢部的关系时,国内不少文献[4-7]建立了如下观测方程

$$\begin{bmatrix}\Delta\vartheta\\ \Delta\psi\\ \Delta\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta q_1\\ \Delta q_2\\ \Delta q_3\end{bmatrix} \tag{17}$$

值得注意的是,方程(17)的右边实际上就是姿态误差矢量,而上式却将欧拉角误差(这里指欧拉角测量残差的真值部分)等同于姿态误差矢量,故方程(17)是不正确的,下面将从两个方面予以证明。

2.1 证明方法 1

假设 $\hat{\varphi}, \hat{\vartheta}, \hat{\psi}$ 为姿态角的估值,$\Delta\varphi, \Delta\vartheta, \Delta\psi$ 为相应的欧拉角误差,那么对应于式(5)可用姿态角描述如下

$$\boldsymbol{M}_2(\hat{\psi}+\Delta\psi)\boldsymbol{M}_1(\hat{\vartheta}+\Delta\vartheta)\boldsymbol{M}_3(\hat{\varphi}+\Delta\varphi) = \boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}_2(\hat{\psi})\boldsymbol{M}_1(\hat{\vartheta})\boldsymbol{M}_3(\hat{\varphi}) \tag{18}$$

式中,$\boldsymbol{M}_1(\cdot), \boldsymbol{M}_2(\cdot), \boldsymbol{M}_3(\cdot)$ 为分别绕 x, y, z 轴的坐标转换矩阵,$\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q})$ 为姿态误差矩阵,则将式(18)展开并忽略二阶小量后可得

$$\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q}) \approx \begin{bmatrix} 1 & \Delta\varphi\cos\hat{\vartheta}\cos\hat{\psi}+\Delta\vartheta\sin\hat{\psi} & -\Delta\varphi\sin\hat{\vartheta}-\Delta\psi \\ -\Delta\varphi\cos\hat{\vartheta}\cos\hat{\psi}-\Delta\vartheta\sin\hat{\psi} & 1 & -\Delta\varphi\cos\hat{\vartheta}\sin\hat{\psi}+\Delta\vartheta\cos\hat{\psi} \\ \Delta\varphi\sin\hat{\vartheta}+\Delta\psi & \Delta\varphi\cos\hat{\vartheta}\sin\hat{\psi}-\Delta\vartheta\cos\hat{\psi} & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

另一方面,根据式(7)可得

$$\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q}) \approx \boldsymbol{I}_{3\times3} - [\Delta\boldsymbol{\phi}\times] = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\phi_3 & -\Delta\phi_2 \\ -\Delta\phi_3 & 1 & \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 & -\Delta\phi_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

对比式(19)和(20)可得

$$\Delta\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\hat{\vartheta}\sin\hat{\psi} & \cos\hat{\psi} & 0 \\ \sin\hat{\vartheta} & 0 & 1 \\ \cos\hat{\vartheta}\cos\hat{\psi} & \sin\hat{\psi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\vartheta \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \tag{21}$$

对式(21)求逆可进一步得

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\vartheta \\ \Delta\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\hat{\psi}\sec\hat{\vartheta} & 0 & \cos\hat{\psi}\sec\hat{\vartheta} \\ \cos\hat{\psi} & 0 & \sin\hat{\psi} \\ \sin\hat{\psi}\tan\hat{\vartheta} & 1 & -\cos\hat{\psi}\tan\hat{\vartheta} \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\phi} \tag{22}$$

由关系式 $\Delta\boldsymbol{\phi} = 2\Delta\varrho$ 可得测量残差与误差四元数矢部的关系为

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\vartheta \\ \Delta\psi \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -\sin\hat{\psi}\sec\hat{\vartheta} & 0 & \cos\hat{\psi}\sec\hat{\vartheta} \\ \cos\hat{\psi} & 0 & \sin\hat{\psi} \\ \sin\hat{\psi}\tan\hat{\vartheta} & 1 & -\cos\hat{\psi}\tan\hat{\vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

2.2 证明方法 2

另一方面,从欧拉运动学方程出发,可得

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}(\varphi, \vartheta, \psi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{24}$$

其中,φ, ϑ, ψ 为依次旋转的欧拉角,$\boldsymbol{M}(\varphi, \vartheta, \psi)$ 是关于 φ, ϑ, ψ 的函数矩阵,其形式由欧拉角转序决定。从变化率的角度出发,根据方程(24)可得姿态误差矢量与欧拉角误差的关系式

$$\Delta\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{M}(\varphi, \vartheta, \psi) \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\vartheta \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \tag{25}$$

对于“312”的欧拉角转序而言,式(24)中的函数矩阵 $\boldsymbol{M}_{312}(\varphi, \vartheta, \psi)$ 为

$$M_{312}(\varphi, \vartheta, \psi) = \begin{bmatrix} -\cos\vartheta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & 1 \\ \cos\vartheta\cos\psi & \sin\psi & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

对比式(26)和(21)可以发现,这两种证明方法的结论是一致的,于是,可得欧拉角的测量残差相对于误差状态量 $\Delta\boldsymbol{x}$ 的测量灵敏度矩阵为

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{H}_{\Delta\varrho} \quad \boldsymbol{0}_{3\times3}] \tag{27}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_{\Delta\varrho} = 2\boldsymbol{M}_{312}^{-1}(\hat{\varphi}, \hat{\vartheta}, \hat{\psi}) = 2\begin{bmatrix} -\sin\hat{\psi}\sec\hat{\vartheta} & 0 & \cos\hat{\psi}\sec\hat{\vartheta} \\ \cos\hat{\psi} & 0 & \sin\hat{\psi} \\ \sin\hat{\psi}\tan\hat{\vartheta} & 1 & -\cos\hat{\psi}\tan\hat{\vartheta} \end{bmatrix} \tag{28}$$

2.3 理论分析

事实上,若用“312”转序的欧拉旋转角小量 $\Delta\varphi', \Delta\vartheta', \Delta\psi'$ 描述式(7)中的姿态误差矩阵 $\boldsymbol{A}$,则对应于式(5)又可描述成如下形式

$$\boldsymbol{M}_2(\hat{\psi}+\Delta\psi)\boldsymbol{M}_1(\hat{\vartheta}+\Delta\vartheta)\boldsymbol{M}_3(\hat{\varphi}+\Delta\varphi) = \boldsymbol{A}_{312}(\Delta\varphi', \Delta\vartheta', \Delta\psi')\boldsymbol{M}_2(\hat{\psi})\boldsymbol{M}_1(\hat{\vartheta})\boldsymbol{M}_3(\hat{\varphi}) \tag{29}$$

式中,$\hat{\varphi},\hat{\vartheta},\hat{\psi}$ 为姿态角的估值,$\Delta\varphi,\Delta\vartheta,\Delta\psi$ 为相应的欧拉角误差,忽略 $\boldsymbol{A}_{312}(\Delta\varphi',\Delta\vartheta',\Delta\psi')$ 中的高阶小量后可得

$$\boldsymbol{A}_{312}(\Delta\varphi',\Delta\vartheta',\Delta\psi')=\boldsymbol{M}_2(\Delta\psi')M_1(\Delta\vartheta')\boldsymbol{M}_3(\Delta\varphi')$$
$$\approx\begin{bmatrix}1 & \Delta\varphi' & -\Delta\psi'\\ -\Delta\varphi' & 1 & \Delta\vartheta'\\ \Delta\psi' & -\Delta\vartheta' & 1\end{bmatrix}\quad(30)$$

对比式(30)和(10)可以发现,这里的欧拉旋转角小量与误差四元数矢部存在如下关系

$$\begin{bmatrix}\Delta\vartheta'\\ \Delta\psi'\\ \Delta\varphi'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta q_1\\ \Delta q_2\\ \Delta q_3\end{bmatrix}\quad(31)$$

显然,从式(29)中可以看出欧拉旋转角小量 $\Delta\varphi',\Delta\vartheta',\Delta\psi'$ 与欧拉角误差 $\Delta\varphi,\Delta\vartheta,\Delta\psi$ 是两个不同的概念,理论上前者是不可能被测量的,而构造的欧拉角测量残差提供的是后者的测量值,只有在极限情况 $\hat{\varphi}=0,\hat{\vartheta}=0,\hat{\psi}=0$ 时,这二者才会相等,其他任何时候它们都是两个不同量。

文献[4-11]中之所以得到形如式(17)的观测方程,其理论基础是利用四元数与欧拉角的转换关系以及小量近似条件得到一组欧拉角小量与四元数矢部的关系。过程如下:对于“312”欧拉角转序,欧拉角与四元数之间的转换关系为

$$\vartheta=\arcsin[2(q_2q_3+q_1q_4)]$$
$$\psi=\arctan\left[\frac{-2(q_1q_3-q_2q_4)}{-q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2}\right]$$
$$\varphi=\arctan\left[\frac{-2(q_1q_2-q_3q_4)}{-q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2}\right]\quad(32)$$

当 φ,ϑ,ψ 为小角度时,有如下近似关系:

$$\vartheta\approx2q_1,\psi\approx2q_2,\varphi\approx2q_3,q_4\approx1\quad(33)$$

文献[4-11]正是由于受到式(33)的影响,才建立出如式(17)的姿态角测量残差与误差四元数矢部的关系。值得注意的是,从式(33)中近似得到的实际上是一组欧拉角小量,是一组能够用于描述坐标系连续旋转的欧拉角,如姿态误差矩阵 $\boldsymbol{A}$;而根据式(18)或(29)可以看出欧拉角误差(欧拉角测量残差的真值)$\Delta\varphi,\Delta\vartheta,\Delta\psi$ 并不是一组有意义的能够描述坐标系连续旋转的欧拉角。因此,不能够因为欧拉角的测量残差通常比较小,就把欧拉角误差与一组描述坐标系连续旋转的欧拉角小量等同。另外,从坐标系转换的过程来看,欧拉角测量残差 $\Delta\varphi,\Delta\vartheta,\Delta\psi$ 理应产生于旋转瞬时的坐标系中,如图 1 所示,因此,可通过欧拉角速率 $\dot{\varphi},\dot{\vartheta},\dot{\psi}$ 对 Δt 积分得到,这也是证明方法 2 的基本思路。

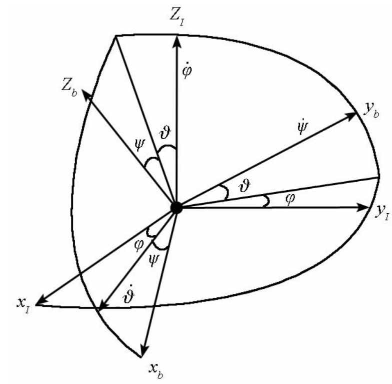

图 1　坐标系转换示意图

Fig. 1　The coordinate transformation

另外,若定义欧拉角列向量为 $\theta=[\varphi\ \vartheta\ \psi]^{\mathrm{T}}$,则由式(28)可得欧拉角估计误差的方差阵为

$$\boldsymbol{P}_{\theta\theta}=4\boldsymbol{M}_{312}^{-1}\boldsymbol{P}_{\varrho\varrho}(\boldsymbol{M}_{312}^{-1})^{\mathrm{T}}\quad(34)$$

分析可知,$\boldsymbol{P}_{\varrho\varrho}$ 是相对独立的,而 $\boldsymbol{P}_{\theta\theta}$ 大小则依赖于函数矩阵 $\boldsymbol{M}$,因此非常大的 $\boldsymbol{P}_{\theta\theta}$ 并不代表姿态估计误差很大,对于某些特定的欧拉角来说,$\boldsymbol{M}$ 阵甚至可能是奇异的,此时 $\boldsymbol{P}_{\theta\theta}$ 为无穷大,而姿态估计误差有可能很小,利用该公式在进行滤波时可实时计算欧拉角估计误差的 3σ 边界。对于仅能观测两个姿态角的姿态敏感器,如红外地平仪,其姿态角测量残差与误差四元数矢部的关系均为上述观测模型的特例,因此,文献[8-11]中的地平仪测量模型也是不合理的。

3　仿真分析

仿真条件:陀螺仪常值漂移为 $5^{\circ}/\mathrm{h}$,角度随机游走 $\sigma_v=5\times10^{-5}\mathrm{rad/s}^{1/2}$,漂移斜率随机游走 $\sigma_u=1\times10^{-10}\mathrm{rad/s}^{3/2}$,输出频率为 100Hz;欧拉角测量噪声均方差为 20″,输出频率为 1Hz;航天器的惯性姿态角速度为 $\boldsymbol{\omega}=[0.001\quad0.001\quad-0.001]^{\mathrm{T}}\mathrm{rad/s}$,航天器相对于惯性系的姿态角定义采用“312”转序,偏航角、滚动角、俯仰角初始偏差分别为 10°、-10°、10°。陀螺常值漂移的初始估值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(0)=[0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$,滤波变量初值 $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}(0)=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$,仿真时间 100s。本节针对第 2 节中两种欧拉角观测方程进行仿真分析,其中,图 2 为采用正确的观测方程(式(23))的姿态角估计误差曲线图,图 3 为采用错误的观测方程(式(17))的姿态角估计误差曲线图。

从仿真结果可以看出,只有采用正确的观测方程,才能进行准确的姿态估计,而采用错误的观测方程,并不能够有效地进行航天器姿态确定,进一步验证了本文关于欧拉角测量模型的结论。

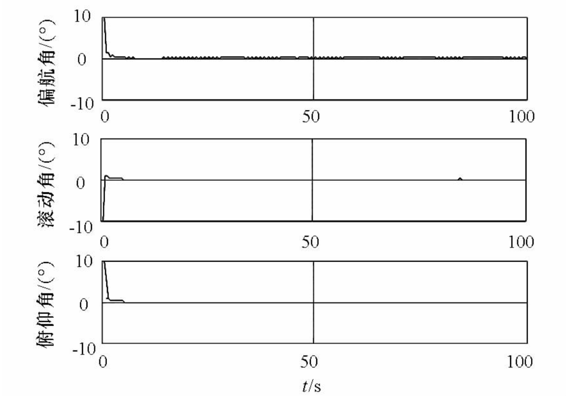

图2 姿态角估计误差曲线图(正确的观测方程)

Fig. 2 Attitude error (correct measurement equation)

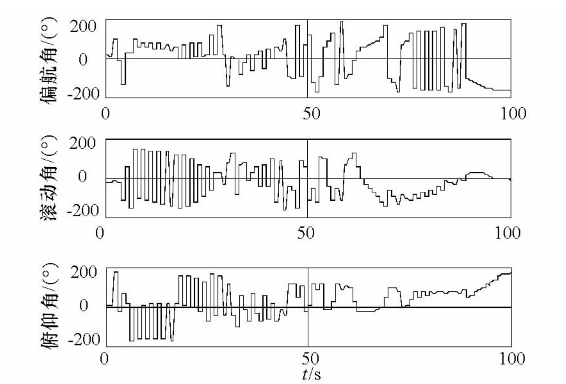

图3 姿态角估计误差曲线图(错误的观测方程)

Fig. 3 Attitude error (false measurement equation)

4 结论

本文研究了以"陀螺 + 姿态敏感器(欧拉角观测模型)"为配置模式的航天器姿态确定问题，主要结论如下：

(1)利用两种不同方法证明了目前许多文献中基于欧拉角观测模型所构造的测量灵敏度矩阵存在不合理性,并推导了正确的测量灵敏度矩阵;

(2) 从理论上剖析了这一错误(欧拉角误差等同于姿态误差矢量)产生的成因,并利用数值仿真进一步验证了本文关于欧拉角测量模型的结论,并且该结论同样适用于无陀螺姿态确定系统。

参考文献(References)

[1] Wahba G. A least squares estimate of spacecraft attitude[J]. SIAM Review, 1965, 7(3): 409 – 411.

[2] Lefferts E J, Markley F L, Shuster M D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1982, 5(5): 417 – 429.

[3] Markley F L. Attitude error representations for kalman filtering [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26 (2): 311 – 317.

[4] 吴廷元, 刘建业, 郁丰, 等. 基于陀螺/星敏感器的微小卫星姿态确定方法研究[J]. 计算机测量与控制, 2008, 16 (5): 6354 – 636.
WU Tingyuan, LIU Jianye, YU Feng, et al. Satellite attitude determination based on redundant gyro system and star sensor[J]. Computer Measurement & Control, 2008, 16(5): 634 – 636. (in Chinese)

[5] 杨锋,周宗锡,刘曙光. 基于星敏感器/光纤陀螺的卫星定姿算法[J]. 控制工程, 2006, 13(4):374 – 376.
YANG Feng, ZHOU Zongxi, LIU Shuguang. Satellite attitude determination algorithm based on star-sensor and FOG [J]. Control Engineering of China, 2006, 13(4): 374 – 377. (in Chinese)

[6] 袁彦红, 耿云海, 陈雪芹. 利用高精度陀螺对星敏感器在轨标定算法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30 (1): 120 – 123.
YUAN Yanhong, GENG Yunhai, CHEN Xueqin. Autonomous on-orbit calibration algorithm of star sensors with gyros [J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(1): 120 – 123. (in Chinese)

[7] 钱山, 李鹏奎, 张士峰,等. 基于改进陀螺漂移模型的卫星姿态确定算法[J]. 宇航学报, 2009, 30(2): 585 – 590.
QIAN Shan, LI Pengkui, ZHANG Shifeng, et al. Satellite attitude estimation based on improved model of the gyro random drift[J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(2): 585 – 590. (in Chinese)

[8] 张春青, 李勇, 刘良栋. 卫星多敏感器组合姿态确定系统中的信息融合方法研究[J]. 宇航学报, 2005, 26(3): 314 – 320.
ZHANG Chunqing, LI Yong, LIU Liangdong. Research on information fusion method in satellite multi-sensor attitude determination systems[J]. Journal of Astronautics, 2005, 26 (3): 314 – 320. (in Chinese)

[9] 顾东晴, 王岩, 周文君, 等. 多敏感器卫星姿态确定的联邦滤波器设计[J]. 中国空间科学技术, 2004, (3): 7 – 13.
GU Dongqing, WANG Yan, ZHOU Wenjun, et al. Federated filter design for multi-sensors satellite attitude determination [J]. Chinese Space Science and Technology, 2004, (3): 7 – 13. (in Chinese)

[10] 钱勇. 高精度三轴稳定卫星姿态确定和控制系统研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002.
QIAN Yong. Studies on the attitude determination and control system of high precision three-axis stabilized satellite[D]. Xi' an: Northwestern Polytechnical University, 2002. (in Chinese)

[11] 王志胜. 信息融合估计理论及其在航天器控制中的应用研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002.
WANG Zhisheng. Information fusion estimation theory and its applications to spacecraft control [D]. Xi' an: Northwestern Polytechnical University, 2002. (in Chinese)

[12] Shuster M D. A survey of attitude representations[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1993, 41(4): 439 – 517.

[13] Wertz J R. Spacecraft attitude determination and control[M]. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1978.

[14] Markley F L, Crassidis J L, Cheng Y. Nonlinear attitude filtering methods [C] // AIAA Guidance, Navigation, and Control Con-ference, San Francisco, CA, United states, 2005: 753 – 784.

[15] Pittelkau M E. Rotation vector attitude estimation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(6): 855 – 860.

[16] Oshman Y, Markley F L. Sequential attitude and attitude-rate estimation using integrated-rate parameters [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(3): 385 – 394.