

# 基于相关熵的 MACH 滤波器\*

袁 宵, 唐 涛, 李 禹, 粟 毅

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**最大平均相关高度(MACH; Maximum Average Correlation Height)滤波器是一种重要的基于相关的模式识别方法。滤波器由训练数据线性构造而成,具有良好的畸变容忍能力,在线性高斯噪声条件下具有理论最优性。为将算法适用于广泛的非线性、非高斯情形,本文引入一种新的度量函数相关熵,可隐性地输入数据通过非线性变换映射到特征空间;并在新的空间中提出了基于相关熵的 MACH 滤波器构造方法。最后将此方法应用于合成孔径雷达(SAR; Synthetic Aperture Radar)图像目标分类进行了实验,在接收机工作性能曲线和峰值旁瓣比的比对中,本文算法的性能均有所提升。

**关键词:**最大平均相关高度;相关熵;图像目标识别;合成孔径雷达

**中图分类号:**TN713 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2012)06-0153-05

## The correntropy based maximum average correlation height filter

YUAN Xiao, TANG Tao, LI Yu, SU Yi

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Maximum average correlation height (MACH) filter is formulated by linearly combining the training data, which is statistically optimum and fairly robust for finding targets in clutter when the Gaussian assumption holds. This research proposes a nonlinear extension to the MACH filter by correntropy function which can induce a new feature space. Thus it is possible to construct linear filter equations in the new space, and the proposed filter has an improved performance due to the nonlinear relation between the feature space and input space. The algorithm is applied to synthetic aperture radar image recognition and exhibits better performance under peak-sidelobe-ratio and receiver-operating-characteristic criteria.

**Key words:** maximum average correlation height; correntropy; image recognition; synthetic aperture radar

在图像目标识别中,模板匹配<sup>[1]</sup>是一种广泛使用的方法。对于多个模板,综合鉴别函数<sup>[2]</sup>(SDF; Synthetic discriminant function)通过指定训练图像在相关平面原点的值来控制匹配性能。但是在实际应用中常因高旁瓣而产生误判,拒判能力也较差。最小方差 SDF<sup>[3]</sup>(MVSDf; minimum variance SDF)通过加入噪声响应的约束,在零均值输入噪声情形下保证输出方差最小,但是其实现时要求噪声的协方差矩阵已知。最小平均相关能量<sup>[4]</sup>(MACE; Minimum Average Correlation Energy)加入平均相关能量的约束,能获得尖锐的相关峰,并降低错误概率。MACH<sup>[5]</sup>滤波器则同时降低噪声的方差和目标的均方差,提高图像的相关高度,而且由于在准则中加入了均方差约束,具有良好的畸变容忍性能。可以证明,当数据满足线性高斯条件时,MACH 是统计最优的。

但是由于实际应用中常不满足假设的线性高

斯条件,一直以来研究人员就在试图构造适用于非线性、非高斯情形的匹配滤波器,其中,核方法扮演了重要角色。Xie 等<sup>[6]</sup>提出了基于相关核的滤波器方法,应用于人脸特征分析;Jeong 等<sup>[7]</sup>提出了基于核方法的 SDF 滤波器,并将其应用于图像目标识别。核方法的主要思想为通过映射函数将原始数据变换到新的特征空间,使变换后的数据在新的特征空间具有更好的线性可分性。这个特征空间被称作可再生核希尔伯特空间(RKHS; Reproducing Kernel Hilbert Space)。相关熵度量<sup>[8]</sup>被提出以后,Pokhadrel<sup>[9]</sup>提出了基于相关熵的匹配滤波器改进算法,Jeong 等<sup>[10]</sup>提出了基于相关熵的 MACE 滤波器并将其应用到图像识别中,随后又提出了其快速算法<sup>[11]</sup>,并在详细 RKHS 解释的基础上建立了完整的 CMACE 滤波器理论<sup>[12]</sup>。

本文提出一种基于相关熵的 MACH 滤波器

\* 收稿日期:2012-04-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61171135,40901230,61002023);国家部委资助项目

作者简介:袁宵(1984—),男,湖北钟祥人,博士研究生,E-mail:yuanxiao@nudt.edu.cn;

粟毅(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:y.su@yeah.net

(CMACH: Correntropy MACH) 设计方法,在不显式地定义空间映射规则的情况下,根据相关熵函数计算测试样本的输出。并将算法应用于 SAR 图像车辆目标进行验证。

## 1 线性 MACH 滤波器算法

设一组数量为  $N$ , 大小为  $d_1 \times d_2 = d$  的训练图像  $x_i(m, n)$ ,  $h$  为包含  $d$  个值的滤波器, 滤波器对对应训练图像的输出为  $g_i(m, n)$ ,  $\bar{g}(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(m, n)$  为训练图像的平均相关表面。对  $g_i(m, n)$  和  $\bar{g}(m, n)$  作傅里叶变换并将其向量形式分别记作  $g_i$  和  $\bar{g}$ 。令  $x_i$  为第  $i$  个训练图像的傅里叶变换向量,  $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  为所有训练图像的平均, 再定义  $M$  和  $X_i$  为主对角线元素分别为  $m$  和  $x_i$  对应元素的对角矩阵, 则第  $i$  个训练图像的相关平面经傅里叶变换后为:  $g_i = X_i^* h$ , 其中  $h$  为滤波器向量的频域表示。同样地:  $\bar{g} = M^* h$ 。定义平均相关高度 (ACH: Average Correlation Height) 和平均相似性 (ASM: Average Similarity Measure) 测度:

$$\text{ACH} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^* h = m^* h \quad (1)$$

$$\text{ASM} = \frac{1}{N \cdot d} \sum_{i=1}^N |X_i^* h - M^* h|^2 = h^* S h \quad (2)$$

其中  $S = \frac{1}{N \cdot d} \sum_{i=1}^N (X_i - M)(X_i - M)^*$ 。

滤波器设计准则为使 ACH 大的同时 ASM 最小:

$$J(h) = \frac{|m^* h|^2}{h^* S h} = \frac{h^* m m^* h}{h^* S h} \quad (3)$$

其解为  $S^{-1} m m^*$  的主特征向量, 或者:

$$h = \gamma S^{-1} m \quad (4)$$

其中  $\gamma$  为归一化的标量因子, 并不影响滤波器性能。式(4)即为 MACH 滤波器的表达式。为获对噪声的抑制能力, 得到尖锐的相关峰, 可在 ASM 上加入平均相关能量项和噪声能量项, 即可得到 MACH 滤波器的最优均衡 (Optimal Trade-off) 形式。本文将仅基于式(4)中的表达式进行推广。

## 2 互相关的推广

互相关是 MACH 滤波器中的一个基础操作, 它利用了变量之间的二阶统计量表示了对象之间的相似性, 其最优性也仅局限于高斯分布的数据。Santamaria 等<sup>[8]</sup> 提出了一个推广的相似性度量,

定义为相关熵。对任意两个随机变量的向量  $X, Y$ , 其相关熵定义为

$$V(X, Y) = E[k_\sigma(X - Y)] \quad (5)$$

其中  $E$  表示数学期望, 其中  $\sigma$  表示核宽的大小,  $k_\sigma$  为高斯核函数

$$k_\sigma(X - Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\|X - Y\|^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (6)$$

在实际情况下, 给定有限数据样本,  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^d$ , 可得到相关熵的估计:

$$\hat{V}(X, Y) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d k_\sigma(x_i - y_i) \quad (7)$$

可以由相关熵函数定义一个 RKHS, 并在其所诱导的空间中, 对给定数据样本  $\{x_i\}_{i=1}^d$ , 相关熵可产生新的数据集  $\{f(x_i)\}_{i=1}^d$ , 并使  $x_i$  的相关熵成为  $f(x_i)$  的互相关:

$$V(i, j) = E[k_\sigma(x_i - x_j)] = E[f(x_i)f(x_j)] \quad (8)$$

式(8)即可通过输入空间的相关熵函数来计算特征空间的互相关。

## 3 CMACH 算法

设相关熵所定义的 RKHS 与数据空间的关系由映射  $f$  将数据  $x$  映射到新的特征空间  $x: \rightarrow f(x)$ 。令第  $i$  个图像向量为  $x_i = [x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(d)]^T$ , 滤波器为  $h = [h(1), h(2), \dots, h(d)]^T$ 。则变换后的  $d \times N$  阶训练图像和  $d \times 1$  阶滤波器, 分别记作  $F_X = [f_{x_1}, \dots, f_{x_N}]$  和  $f_h = [f(h(1)), \dots, f(h(d))]^T$ , 其中  $f_{x_i} = [f(x_i(1)), \dots, f(x_i(d))]^T$ 。第  $i$  幅图像与滤波器之间的相关熵可估计为

$$v_i[m] = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^d f(h(n))f(x_i(n-m)) \quad (9)$$

式中间隔  $m = -d + 1, \dots, d - 1$ 。则相关熵向量可写作

$$v_i = U_i f_h \quad (10)$$

其中  $U_i$  为  $(2d - 1) \times d$  维矩阵:

$$U_i = \begin{pmatrix} f(x_i(d)) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & f(x_i(d)) & & \vdots \\ f(x_i(1)) & f(x_i(2)) & \dots & f(x_i(d)) \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(x_i(1)) \end{pmatrix} \quad (11)$$

在 RKHS 空间中的平均相关高度  $\text{ACH}_V$  为

$$|\text{ACH}_V|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{x_i}^T \cdot f_h \right|^2 = |m_v \cdot f_h|^2 \quad (12)$$

同时平均相似性测度  $ASM_V$  的表达式为

$$\begin{aligned} ASM_V &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| v_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^T v_i - \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i=1}^N v_i \right)^T \left( \sum_{i=1}^N v_i \right) \quad (13) \end{aligned}$$

将式(10)代入(13)中可得特征空间中的训练样本均方差矩阵:

$$S_v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^T U_i - \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i=1}^N U_i^T \right) \left( \sum_{i=1}^N U_i \right) \quad (14)$$

将  $U_i^T U_i$  记作  $C_i$ , 则  $C_i$  为  $d \times d$  阶 Toeplitz 矩阵:

$$C_i = \begin{pmatrix} c_i(0) & c_i(1) & \cdots & c_i(d-1) \\ c_i(1) & c_i(0) & \cdots & c_i(d-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_i(d-1) & \cdots & c_i(1) & c_i(0) \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中元素可在不显式地知道映射  $f$  的条件下通过核函数计算:

$$c_i(l) = \sum_{n=1}^d k_{\sigma}(x_i(n) - x_i(n+l)) \quad (16)$$

同理, 训练样本之间的互相关熵, 即  $S_v$  中的

$\frac{1}{N^2} \left( \sum_{i=1}^N U_i^T \right) \left( \sum_{i=1}^N U_i \right)$  项, 也可通过核函数计算获得。

对测试图像  $z(m, n)$ , 将其字典排序成长为  $d$  的向量, 经过滤波器的峰值输出为

$$f_y = f_z^T = f_h = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_z^T \cdot S_v^{-1} \cdot f_{x_i} \quad (17)$$

CMACH 滤波器是 RKHS 空间中的线性滤波器, 但是由于原始数据空间到 RKHS 空间之间的非线性变换, 因此也能够刻画出非线性的性质。通过在测试样本的输出上加上合适的阈值, 即可在不给出频域滤波器表达式的条件下检测并识别测试样本。本文中所推导的滤波器输出为一个单点的峰值, 对整个响应平面, 可对测试图像构造如式(11)中的矩阵, 以平移的方式获得全部响应。

## 4 实验

本文采用运动与静止目标获取与识别(MSTAR: Moving and Stationary Target Acquisition/Recognition)数据库的车辆目标图像作为实验数据, 分别训练 MACH 和 CMACH 滤波器并进行测试。数据集中包含了三类目标的七个子类, 以  $17^\circ$  俯仰角成像条件下的图像为训练样本,  $15^\circ$  俯仰角条件下的目标为测试样本。在实验中, 截取图像中心部分, 分别得到  $64 \times 64$  的训练样本  $x_i(m, n)$  和  $z(m,$

$n)$ , 经过去斑处理, 再按照字典排序成  $4096 \times 1$  的向量。

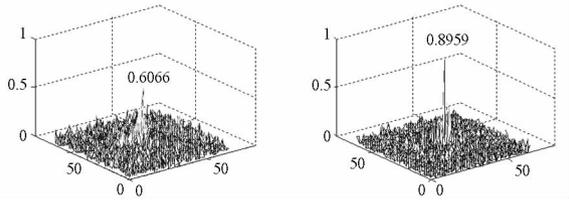
### 4.1 CMACH 滤波器峰值响应评估

为考察滤波器的峰值响应平面的性能, 即算法对单个目标响应的峰值锐利度。首先选取一个方位角区间的 BMP2(SN\_9563) 训练图像合成 MACE、CMACE、MACH 和 CMACH 滤波器, 然后选取一个正确类 BMP2 和一个虚假类 T72 目标, 以平移的方式获得全部响应平面。对最大幅值归一化到 1 之后的数据, 在构造 CMACE 和 CMACH 滤波器时使用高斯核宽度  $\sigma = 0.1$ , 在测试阶段使用  $\sigma = 0.5$ 。

在此以峰值旁瓣比(PSR: Peak to Sidelobe Ratio)作为峰值锐利度的评估标准:

$$PSR = \frac{(\text{peak} - \text{mean})}{\text{std}} \quad (18)$$

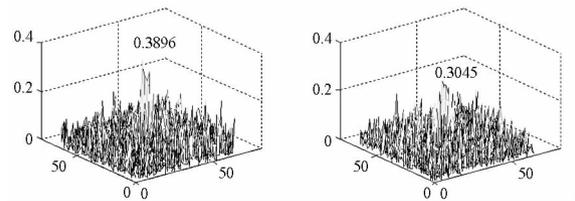
其中“peak”为最大的相关值, “mean”和“std”为以峰值为中心的一个环形区域内的相关输出的均值和标准差。本文选取去除了峰值点周围  $5 \times 5$  邻域点的  $20 \times 20$  邻域来计算旁瓣。图中为分别选取真实目标与虚假目标经过滤波器输出的结果。图 1 为真实目标的响应平面, 其中 MACH 滤波器输出峰值的  $PSR = 4.66$ , CMACH 滤波器输出峰值的  $PSR = 6.50$ 。均无明显旁瓣。图 2 为虚假目标的响应平面, 其中 MACH 滤波器输出峰值的  $PSR = 3.18$ , CMACH 滤波器输出峰值的  $PSR = 2.27$ 。



(a) MACH 滤波器 (b) CMACH 滤波器

图 1 各滤波器对 BMP2 的响应

Fig. 1 The output planes of a BMP2 image



(a) MACH 滤波器 (b) CMACH 滤波器

图 2 各滤波器对 T72 的响应

Fig. 2 The output planes of a T72 image

可以看出, CMACH 滤波器能获得比 MACH 滤波器更高的最大幅值, 使目标响应更强, 更易于与混淆目标区分开; 同时具有更大的 PSR, 使目标相关输出的能量更集中, 易于检测目标。

### 4.2 快速 CMACH 算法

通过分析可知,CMACH 算法的计算复杂度非常高,为获得式(17)中的权重矩阵  $S_v^{-1}$ ,包含了计算自相关熵矩阵  $O(Nd^2)$  次,互相关熵矩阵  $O(N^2d^2)$  次, $d \times d$  阶矩阵求逆  $O(d^2)$  次,共进行操作  $O((N^2 + N + 1)d^2)$  次。而在测试阶段,计算  $M$  个训练样本与  $N$  个测试样本的加权互相关熵,计算复杂度为  $O(MNd^2)$ 。为提高运算效率,可通过快速高斯变换(FGT: Fast Gauss Transform)<sup>[13]</sup>来改善测试阶段的计算效率。FGT 可进行快速加权高斯求和,在工程中应用于提高核方法的计算效率,如用高斯方法估计图像的互信息等<sup>[14]</sup>。高斯变换的定义如下:

$$G(t_i) = \sum_{j=1}^N w_j e^{-\frac{(t_i - s_j)^2}{2\sigma^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (19)$$

式中  $w_j$  为对应权重矩阵  $S_v^{-1}$  的行向量,  $t_i$  与  $s_j$  分别为测试图像与训练图像中的像素点,  $\sigma$  为式(6)中的核宽度。FGT 算法可将  $O(NM)$  的计算复杂度降低为  $O(N + M)$ 。在互相关熵的计算中,则是将  $O(NMd^2)$  的计算复杂度降低为  $O(NMd)$ 。表 1 中给出了在测试阶段对 62 个目标进行 FGT 快速算法与直接计算的理论以及实际效率。实验在 AMD 2.9G 处理器和 2G 内存的 Windows 系统中利用 Matlab 进行。

表 1 快速算法与直接计算的比较

Tab.1 The comparison of FGT and original method

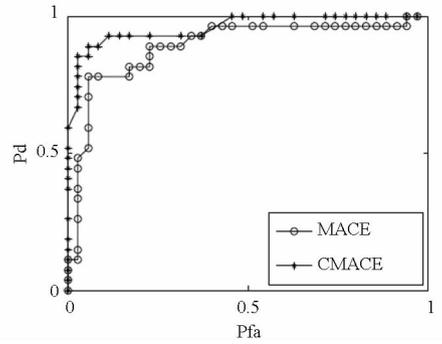
	复杂度	耗时(s)	平均耗时(s)
直接	$O(NMd^2)$	5936.32	95.75
FGT	$O(NMd)$	124.04	2

从表中发现,实际计算中 FGT 所提高的效率并不到  $d = 4096$  倍,这是由于在 FGT 计算中,对数据的预处理包含了聚类,以及设计到多项式的阶数选择等问题,消耗了一定时间,效率提高约 50 倍。但是 2s 的测试时间,已可近似满足实时目标识别的要求。

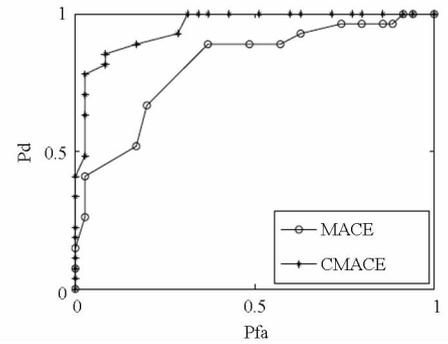
### 4.3 目标判别结果

在将 CMACH 应用到目标检测与识别时,本文将训练所得滤波器应用到 BMP2、BTR70 和 T72 三类目标的混合测试集合上,并以接收机工作性能(ROC: Receiver Operating Characteristic)曲线作为推广能力的评估标准。对包含了真实类、虚假类目标的 ROC 曲线如图 3 所示。

可以看出,CMACH 滤波器的检测能力相比 MACE 和 MACH 滤波器有了显著提升。在保持



(a) MACE 与 CMACE 滤波器



(b) MACH 与 CMACH 滤波器

图 3 各滤波器的 ROC 曲线

Fig.3 The ROC curves of filters

零虚警时,CMACH 可以使检测率达到 0.4,而 MACE 和 MACH 分别只能保持到 0.1 和 0.15;当虚警率为 0.1 时,CMACH 即可达到 0.8 以上的检测概率,而 MACE 仅不到 0.5;当虚假概率提高到 0.3 时,CMACH 的检测概率可保持 1 的检测概率,而 MACH 需要将虚警率提高到 0.9,才能获得 1 的检测概率。相对于 CMACE 滤波器,CMACH 虽然在零虚警情形下检测概率偏低,但总体性能仍有所改善,这表现在可通过低虚警达到较高的检测概率。以面积为指标,不同 ROC 曲线下的面积为:

$$\begin{cases} Area_{MACE} = 0.8598 & Area_{MACH} = 0.8111 \\ Area_{CMACE} = 0.9285 & Area_{CMACH} = 0.9497 \end{cases} \quad (20)$$

## 5 结论

本文提出了一种基于相关熵的非线性 MACH 滤波器构造方法,并通过 SAR 图像实验验证,该算法适用于图像目标识别。通过相关熵的概念,CMACH 滤波器可在新的 RKHS 空间推导实现,同时由于相关熵核函数所隐含的非线性映射,CMACH 也具有刻画数据非线性结构的能力,从而克服了 MACH 滤波器仅对线性高斯噪声情形最优的限制。因为相关熵函数的 Taylor 展开中不仅包含了数据的二阶统计量,同时还包含更高阶的统计量,并可以通过高斯核的宽度因子调节不

同统计量的权重,CMACH 滤波器对数据的信息利用更为全面。在 MSTAR 数据集上的实验也表明,CMACH 算法的推广能力要优于经典的 MACE 和 MACH 算法,在整体性能上也优于改进后的 CMACE 算法。在引入快速算法之后,CMACH 可以达到实时分类的效果,适用于目标检测与识别。

## 参考文献 (References)

- [1] Turin G L. An introduction to matched Filters [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1960, 6: 311 - 329.
- [2] Casasent D. Unified synthetic discriminant function computation formulation[J]. Applied Optics, 1984, 23: 1620 - 1627.
- [3] Kumar B V K V. Minimum variance synthetic discriminant functions[J]. Journal Of Optical Society of America, 1986, 3 (10): 1579 - 1584.
- [4] Mahalanobis A, Kumar B V K V, Casasent D. Minimum average correlation energy filters [J]. Applied Optics, 1987, 26(17): 3633 - 3640.
- [5] Mahalanobis A, Kumar B V K V, Song S, et al. Unconstrained correlation filters [J]. Applied Optics, 1994, 33 (17): 3751 - 3759.
- [6] Xie C, Savvides M, Kumar B V K V. Kernel correlation filter based redundant class dependence feature analysis (KCFA) on FRGC 2.0 data [C]//Proceedings of 2nd International Workshop on Analysis Modeling of Face Gesture (AMFG). 2005, 32 - 43.
- [7] Jeong K-H, Pokharel P P, Xu J-W, et al. Kernel based synthetic discriminant function for object recognition [C]// Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP). 2006, 4: 765 - 768.
- [8] Santamaría I, Pokharel P P, Principe J C. Generalized correlation function: definition, properties and application to blind equalization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(6): 2187 - 2197.
- [9] Pokharel P P, Agrawal R, Principe J C. Correntropy based matched filtering [C]//Proceedings of IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP), 2005: 148 - 155.
- [10] Jeong K-H, Principe J C. The correntropy MACE filter for image recognition [C]//Proceedings of IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP), 2006: 9 - 14.
- [11] Jeong K-H, Han S, Principe J C. The fast correntropy mace filter [C]//Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP). 2007, 2: 613 - 616.
- [12] Jeong K-H, Liu W, Han S, et al. The correntropy MACE filter [J]. Pattern Recognition, 2009, 42 (5): 871 - 885.
- [13] Greengard L, Strain J. The fast gauss transform [R]. Yale University, 1989.
- [14] 蒋鸿, 胡永祥, 朱文球. 应用快速高斯变换估计图像互信息 [J]. 计算机应用, 2008, 28 (3): 680 - 682.  
JIANG Hong, HU Yongxiang, ZHU Wenqiu. Estimation mutual information of image by fast gaussian transform [J]. Computer Applications, 2008, 28 (3): 680 - 682. (in Chinese)