

滑移边界条件的收敛性分析及应用*

曹文斌, 李桦, 高洪贺

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:用速度滑移与温度跳跃边界条件代替通常假定的无滑移边界条件,可有效地提高计算流体力学模型对高空滑移流区域流动的预测精度。应用 Maxwell 滑移边界条件时,通过直接计算速度梯度及温度梯度而得到速度滑移和温度跳跃量的处理方法在网格较密的时候会出现迭代计算发散的问题。理论分析表明,直接计算梯度的方法使边界条件的时间推进过程等价于雅克比迭代过程,因此必须满足相应的收敛性条件。为了消除收敛性条件的限制,给出了一种在任意网格密度下均收敛的边界条件处理方法并通过数值算例验证了该方法的正确性。针对高空高超声速流动,以空天飞机为例,对比了滑移/无滑移边界条件所得结果的差异,分析了滑移效应对飞行器气动特性及热环境的影响。

关键词:滑移边界条件;收敛性;高超声速;计算流体力学

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2013)01-0012-07

Convergence analysis and application of the slip boundary conditions

CAO Wenbin, LI Hua, GAO Honghe

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: By replacing the typical no-slip boundary conditions with velocity slip and temperature jump boundary conditions, the predicting accuracy of the CFD modeling is improved effectively for high altitudes flow in the slip regime. The numerical iterations usually suffer from divergence when the Maxwell slip boundary conditions are implemented with very great number of grid points by the numerical method, which the velocity slip and temperature jump are evaluated through explicit calculation of the velocity and temperature gradient terms. In the theoretical analysis, it is shown that the explicit calculation of gradient terms displays the time advancement process of the Maxwell slip boundary conditions similar to a Jacobian iteration scheme, hence it must satisfy the condition of convergence. In order to remove the limitation from the condition of convergence, a numerical treatment which is convergent for arbitrary grid density was derived for the slip boundary conditions. Numerical tests were calculated to demonstrate the validity of the derived method. A space shuttle model was studied numerically for hypersonic flow at high altitudes. The results disagreement between the slip and no-slip conditions was compared and the influence of slip effects on vehicle aerodynamic characteristics and aerothermodynamic properties was analyzed.

Key words: slip boundary conditions; convergence; hypersonic; computational fluid dynamics

临近空间高超声速飞行器飞行区域覆盖整个大气层,飞行轨迹跨越连续流区、滑移流区、过渡流区和自由分子流区。其高机动高精度打击的特性及含较大的扁平升力面与尖化前缘等外形特征要求在气动布局设计中能够精确获取飞行器在上述各个流域中的气动特性及热环境。滑移流区和过渡流区的流动研究比较困难,在基于地面试验设备的环境中再现这样的流动条件非常昂贵且在技术上具有很大的挑战^[1],因此数值模拟已成为该领域的主要研究手段。目前国内外滑移流领域已有的研究成果主要集中在低速微流动领域^[2-4],高超声速流动领域则相对较少。在低空时,由于空气密度相对较高,稀薄气体效应对飞行器的影响不明显,

连续介质模型假设仍然成立,可采用传统的 Navier-Stokes (N-S) 方程及物面无滑移边界条件进行模拟;随着高度的增加大气密度逐渐降低,当飞行器周围的流动位于滑移流区域时,分子平均自由程的变大使得飞行器壁面附近的努森层内连续介质假设失效,此时速度滑移与温度跳跃现象^[5]显著。值得注意的是,从连续流到稀薄滑移流的变化是一个渐变的过程,飞行器在较低的高度亦可能出现局部滑移现象。滑移效应对飞行器气动力的影响主要反映在摩擦阻力上。对于低空高雷诺数下,飞行器的总阻力中压差阻力占主导地位摩擦阻力相对较小;而高空滑移流雷诺数较小,飞行器所受的摩擦阻力占总阻力的很大部分,因此滑移效应必

* 收稿日期:2012-05-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(91016010)

作者简介:曹文斌(1985—),男,湖南常宁人,博士研究生,E-mail:caowenbin08@163.com;

李桦(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:lihuakd08@tom.com

须考虑。在稀薄流的数值模拟中 DSMC(蒙特卡罗直接模拟)^[6]是常用的且比较精确的方法,但对于气体密度相对较高的滑移流及连续流情况,DSMC 计算耗费巨大,采用求解 N-S 方程加滑移边界条件的方法可提高计算效率,同时可以给出相当精度的模拟结果。

1 计算方法

1.1 控制方程

直角坐标系下,二维可压缩 N-S 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y} \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho Hu \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho Hv \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix}$$

方程组的具体形式见文献[7]。对上述控制方程组运用基于单元中心型的有限体积法求解,无粘通量采用 M-AUSMPW + 格式^[8],通过 MUSCL 方法选用 Vanleer 平均限制器进行空间重构达到二阶精度,粘性通量采用二阶中心格式离散,时间推进为改进的隐式 LU-SGS 方法^[9]。

1.2 滑移边界条件

目前数值模拟中常用的滑移边界条件主要有 Maxwell 滑移边界条件^[10]及其改进形式,如 Gokcen 条件^[11]及 Lockerby 条件^[12]。文献[13]指出 Gokcen 条件所得到的结果优于经典的 Maxwell 条件,但在迭代求解过程中每个时间步都需要确定离开壁面一个分子平均自由程处的速度与温度,其计算量的增加导致 Gokcen 条件难以在多区的复杂外形网格中的应用;Lockerby 条件虽然应用了壁面函数方法提高了努森层内的模拟精度但是其给出的气动力/热结果并不优于 Maxwell 条件所得。因此,从适用范围及精度来看经典的 Maxwell 滑移边界条件具有重要的工程应用价值。

Maxwell 滑移边界条件中速度滑移和温度跳跃由下列表达式给出^[14]:

$$V_s = A \left(\frac{2 - \sigma}{\sigma} \right) \lambda \frac{\partial V_x}{\partial n} + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

$$T_0 - T_w = \frac{2 - \alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)pr} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_0 \quad (3)$$

式中 n 代表垂直壁面的方向, x 代表与壁面相切的方向, μ 为气体的粘性系数, γ 为气体比热比, pr 为普朗特数。常系数 A 、动量调节系数 σ 和能量适应系数 α 由壁面的物理特性及气体的属性决定,一般需要实验来确定。分子平均自由程 λ 由式(4)给出:

$$\lambda = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2RT}} \quad (4)$$

对于等温壁情况,可以忽略式中的温度梯度项得到滑移速度的简化形式。

$$V_s = A \left(\frac{2 - \sigma}{\sigma} \right) \lambda \frac{\partial V_x}{\partial n} \Big|_0 \quad (5)$$

2 滑移边界条件的收敛性分析

应用 Maxwell 滑移边界条件时,往往直接按式(3)及式(5)的形式进行数值离散处理,即首先计算壁面法向的速度梯度及温度梯度然后得到速度滑移和温度跳跃量,为方便起见,将此数值处理方法定义为梯度法。计算中发现,上述梯度法在网格尺度较密的情况下会出现计算发散的问题。下面以速度滑移边界条件为例对梯度法进行具体分析:

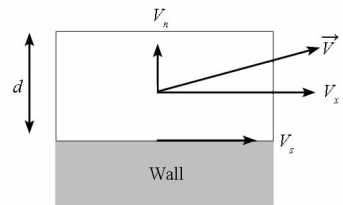


图1 速度梯度的计算

Fig. 1 Velocity gradient calculation

如图1所示,已知某个 n 时间层的流场信息,求解控制方程可得到 $n+1$ 时间层的物理量,此时壁面第一层网格中心处切向速度 V_x^{n+1} 为已知量,但壁面处的物理量都为未知量。为了求得滑移速度 V_s^{n+1} ,首先要确定式(5)中的 λ ,而壁面处 $n+1$ 时间层的密度和温度未知,考虑两个相邻时刻分子平均自由程变化不大,故可取 n 时间层计算。其次,因 V_s^{n+1} 为待求量,在壁面法向网格垂直于壁面的假设下, $n+1$ 时间层的速度梯度通常可由下式得到

$$\frac{\partial V_x}{\partial n} \Big|_0^{n+1} = \frac{2(V_x^{n+1} - V_x^n)}{d} \quad (6)$$

求得速度梯度之后,通过式(5)即可得到滑移速度 V_s^{n+1} 。

实际上,若将式(6)代入式(5),则上述梯度法求解过程等价于下面式子

$$V_s^{n+1} = 2A \left(\frac{2-\sigma}{\sigma} \right) \frac{\lambda}{d} (V_x^{n+1} - V_s^n) \quad (7)$$

式(7)对整个时间推进来说,其等价于雅克比迭代式,须满足一定的条件才能保证解的存在性,其收敛性条件为

$$\frac{\lambda}{d} < \frac{\sigma}{2A(2-\sigma)} \quad (8)$$

对于温度跳跃边界条件,梯度法相应的收敛性条件为

$$\frac{\lambda}{d} < \frac{\alpha(\gamma+1)pr}{(2-\alpha)4\gamma} \quad (9)$$

因系数 A 、动量调节系数 σ 和能量适应系数 α 均为常数,故当壁面附近的分子平均自由程 λ 与网格尺度 d 之比大于某个临界值时收敛性条件不满足。实际上,网格尺度 d 即第一层网格高度需根据网格无关性要求事先给定;分子平均自由程 λ 与当地的稀薄程度有关,在稀薄程度相差较大的流场中 λ 的值相差很大,网格尺度往往因局部网格分布过密而使上述收敛性条件不满足。

下面给出在任意网格密度下均收敛的边界条件处理方法。实际上式(6)中的速度梯度应取当前时间层的滑移速度计算,将式(6)中 V_s^n 替换为 V_s^{n+1} 再代入式(5),可以求解出滑移速度

$$V_s^{n+1} = \frac{\theta V_x^{n+1}}{1+\theta} \quad (10)$$

其中

$$\theta = 2A \left(\frac{2-\sigma}{\sigma} \right) \frac{\lambda}{d} \quad (11)$$

同理,相应的温度跳跃表达式为

$$T_0^{n+1} = \frac{T_w + \varepsilon T^{n+1}}{1+\varepsilon} \quad (12)$$

式中, T 为第一层网格单元中心的温度

$$\varepsilon = \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{(\gamma+1)pr} \frac{2\lambda}{d} \quad (13)$$

为方便起见,本文将此处理方法定义为求解法。分析式(10)及式(12)可知:若 V_x 与 T 随着时间步的推进逐渐收敛,则滑移速度 V_s 及壁面处的温度 T_0 也必收敛;当 θ 与 ε 趋于 0 时,滑移边界条件趋于无滑移边界条件,当 θ 与 ε 趋于 ∞ 时,滑移边界条件趋于无粘滑移边界条件。应用求解法后,Maxwell 滑移边界条件由第三类边值问题转换为第一类边值问题。该方法避免了对梯度项的直接计算,保证了任意网格尺度下解的存在性。

3 数值验证与分析

本文选取了文献[14]中二维圆柱算例为验证算例,以考察所给出的边界条件处理方法的正

确性及本文发展的计算方法的精度。文献提供了在稀薄气体领域中比较认可的 DSMC 方法的结果。计算条件如下:圆柱半径为 0.1524m,氩气, $\gamma = 4/3$, $pr = 2/3$, 来流温度 200K, 马赫数 10, 壁面温度 500K, 来流密度及努森数 Kn 见表 1; 粘性系数公式对应 DSMC 的变径硬球模型的幂次式, 其幂次指数 $\omega = 0.734$, 参考温度为 1000K。常系数 A 、动量调节系数 σ 和能量适应系数 α 都取定为 1.0, 其余参数见文献[14]。

为了说明网格尺度对边界条件处理方法的影响及确保计算结果的网格无关性,如表 2 所示,对表 1 中的两个状态生成了五套具有对比性的网格,各套网格对壁面法向进行了不同程度的加密,周向网格均匀分布。本文中圆柱角度 Φ 的定义与文献一致,即以驻点为零点顺时针旋转为正。表中列出了各套网格的网格量(圆柱整体 -180° 至 180° 范围)、壁面法向第一层网格高度 d 。

表 1 2 维圆柱算例来流条件

Tab. 1 Flow condition for 2D cylinder cases

状态编号	努森数 Kn	来流密度 (kg/m^3)
Case1	0.002	1.408×10^{-4}
Case2	0.05	5.636×10^{-6}

表 2 计算网格

Tab. 2 Computational grids

网格 编号	整体网格量 (周向 \times 径向)	d (m)
Grid 1	201×101	1×10^{-2}
Grid 2	201×101	5×10^{-3}
Grid 3	201×151	1×10^{-3}
Grid 4	201×201	5×10^{-4}
Grid 5	201×251	1×10^{-4}

表 3 给出了 case1 状态从自由来流开始计算,五套网格下梯度法与求解法的收敛情况。对于整体网格情况,梯度法在所有网格下都计算发散;若仅考虑前体网格(圆柱 $-90^\circ \sim 90^\circ$),梯度法可以在 Grid 1 和 Grid 2 下得到收敛的结果;求解法在各套网格下均能得到收敛的结果。对于 Grid 1 和 Grid 2 情况梯度法在整体网格时计算发散是由于后体网格分布过密的原因。圆柱前体部分气流受压缩气体密度相对较高,而后体部分为尾流区域气流膨胀气体密度相对稀薄,按前述分析,气体越稀薄则分子平均自由程 λ 越大,因此圆柱后体需要较大的网格尺度才能满足收敛性条件。表中的结果表明,梯度法的应用受到了网格尺度的限制。

表 3 不同网格下两种方法的应用

Tab.3 Application of the two methods on different grids

网格编号	梯度法 (整体网格)	梯度法 (前体网格)	求解法 (整体网格)
Grid 1	发散	收敛	收敛
Grid 2	发散	收敛	收敛
Grid 3	发散	发散	收敛
Grid 4	发散	发散	收敛
Grid 5	发散	发散	收敛

图 2 为 Case2 状态下 Maxwell 滑移边界条件应用求解法得到的表面摩擦系数与热流系数分布在不同网格下的对比。因对称只给出了圆柱表面 0° 至 180° 区间的结果。由图可知,随着网格的加密,表面摩擦系数与热流系数逐渐接近收敛解;圆柱表面后体即 $\Phi = 90^\circ$ 之后的部分各套网格所对应的值都相差较小,可认为 Grid 1 为结果收敛所需的网格,而 $\Phi = 90^\circ$ 之前的前体部分到 Grid 3 才为收敛网格。相对于后体,圆柱表面前体需要较密的网格才能达到收敛。图中的结果表明,在滑移流区应用求解法可以得到网格无关的计算结果。

界条件应用求解法及无滑移边界条件所得到的摩擦系数及热流系数分布与文献滑移边界条件及 DSMC 所得结果的对比。Case 1 状态处于连续流区,由图可知:此状态下本文滑移边界条件的结果与无滑移边界条件的结果相差较小,与文献的滑移边界条件及 DSMC 的结果都非常接近。Case 2 状态位于滑移流区,从图可以看出:对于驻点附近之外的区域,无滑移边界条件所得的摩擦系数分布明显高于 DSMC 所得结果;整个圆柱表面无滑移边界条件所得的热流系数分布与 DSMC 的结果相比有较大的差异;滑移边界条件所得的摩擦系数及热流系数分布都与 DSMC 的结果比较接近。两个状态下,本文应用滑移边界条件所得的表面摩擦系数及热流系数分布与文献的结果都吻合较好。

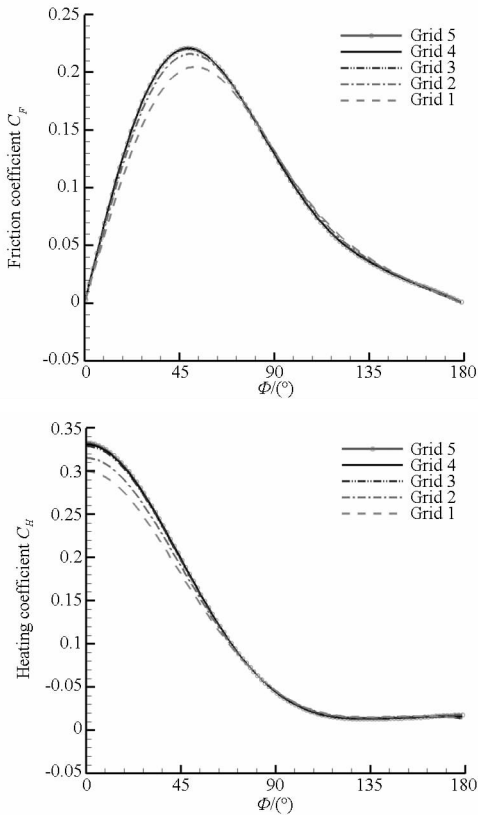
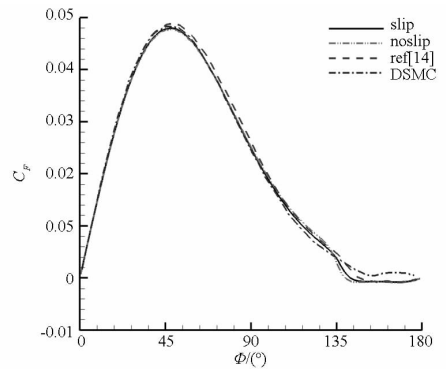
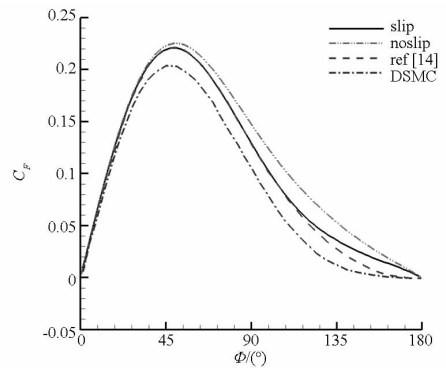


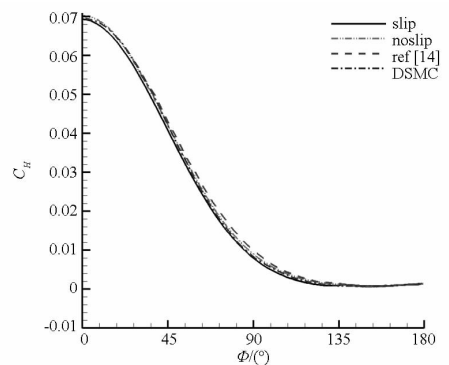
图 2 不同网格下表面摩擦系数与热流系数的对比
Fig.2 Comparison of friction coefficient and heating coefficient on different grids



(a) case1 摩擦系数

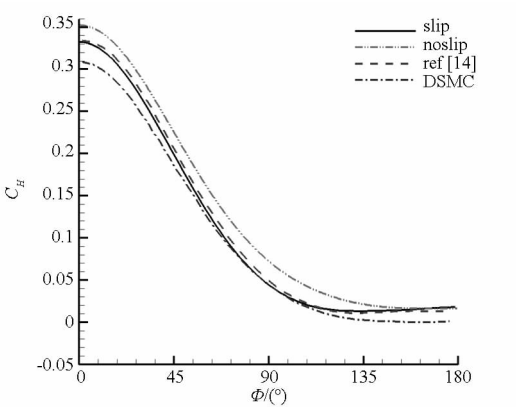


(b) case2 摩擦系数



(c) case1 热流系数

图 3 给出了 Case 1 及 Case 2 状态下滑移边



(d) case2 热流系数

图 3 摩擦系数及热流系数的比较

Fig. 3 Comparison of friction coefficient and heating coefficient

4 空天飞机的计算与分析

针对文献[15]所述的空天飞机模型,本文给出了马赫数 15,攻角 20°,飞行高度 60km - 90km 的情况下 Maxwell 滑移边界条件应用求解法得到的模拟结果。由于实验模型尺寸较小与实际的飞行器大小有所差距,本文计算中将原始模型放大了 10 倍,此时空天飞机的长度 $L = 2.9\text{m}$ 。计算方法如前所述,按层流状态考虑,壁温 1000K,粘性系数由 Surtherland 公式得到。

图 4 所示为空天飞机的表面及空间网格,网格总量为 300 万左右,壁面第一层网格高度满足网格无关性要求。计算坐标系如图 4 所示, $x = 0\text{m}$ 的位置位于机身转折处。

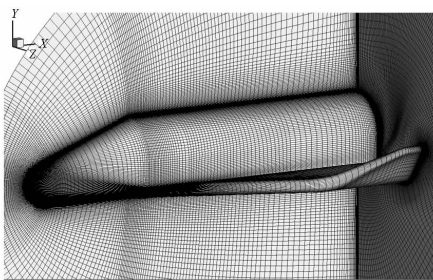
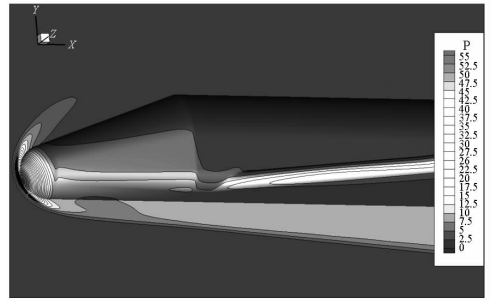


图 4 空天飞机计算网格

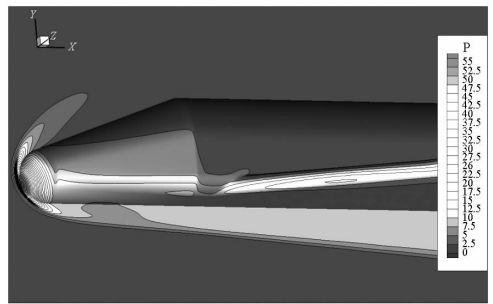
Fig. 4 The computational grid for the space shuttle

图 5 给出了空天飞机在 90km 处滑移/无滑移边界条件的表面及对称面上的压力分布。从头部激波的形状与位置来看,两种边界条件的结果基本无差异;从机身表面的压力分布及机翼上的压力峰值来看,两种边界条件所得的结果差异较小。由此可见滑移效应对压力的影响不明显。

图 6 给出了不同高度下空天飞机模型对称面的摩擦阻力系数分布。由图可知,60km 与 70km 时,无论是处于迎风的下表面(lower)还是处于背



(a) 滑移边界条件

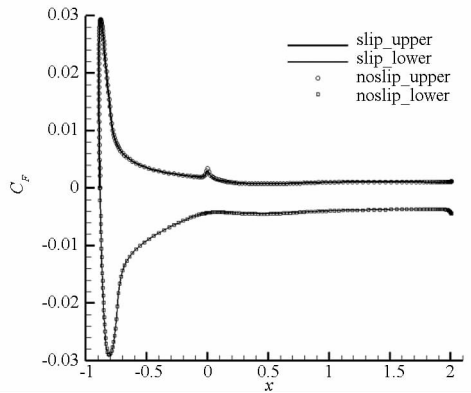


(b) 无滑移边界条件

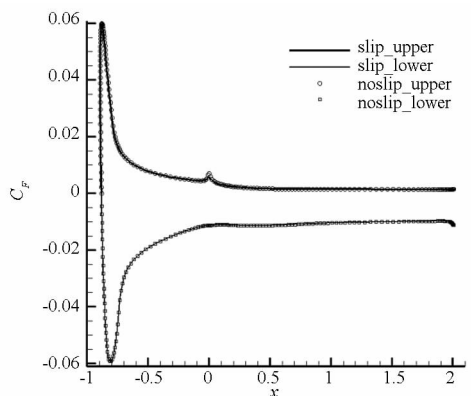
图 5 90km 滑移/无滑移边界条件压力分布

Fig. 5 Pressure distribution of the slip/no-slip boundary conditions at 90km

风的上表面(lower)滑移边界条件得到的结果与无滑移边界条件的结果十分接近;随着高度的增加两者的差距越来越大,90km 处背风的上表面无滑移边界条件所对应的摩擦阻力系数明显大于滑



(a) 60km



(b) 70km

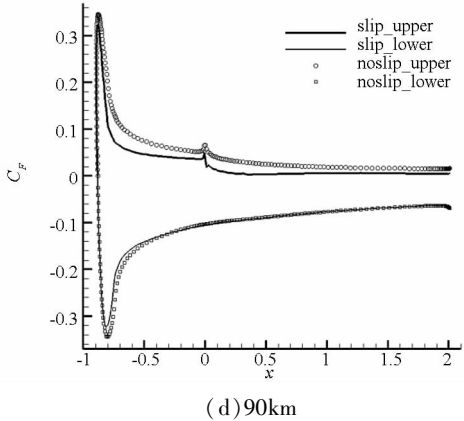
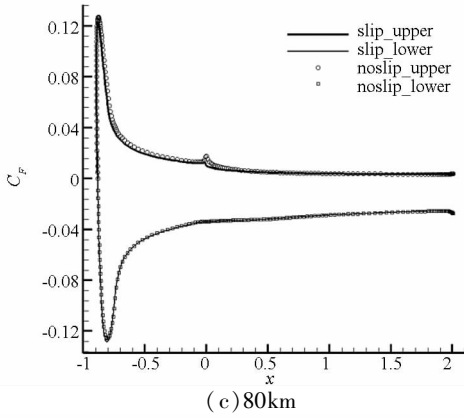
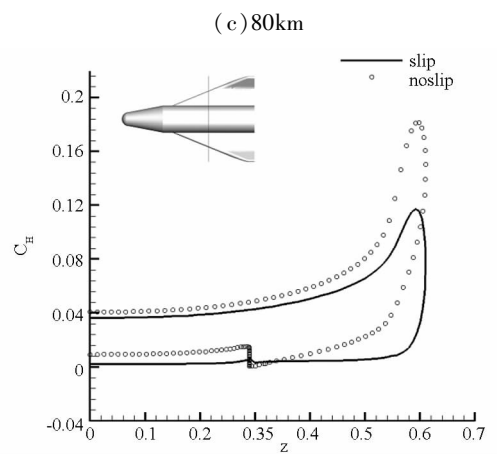
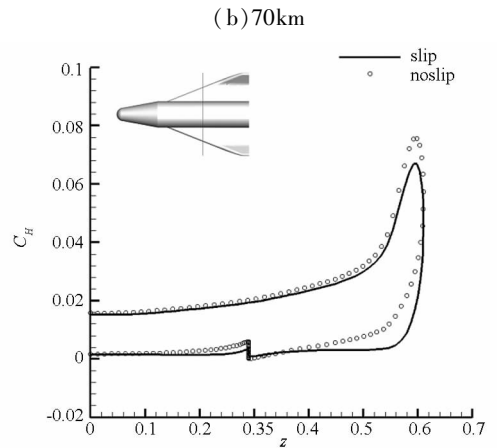
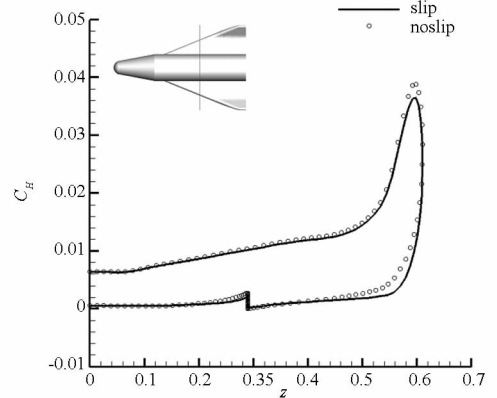
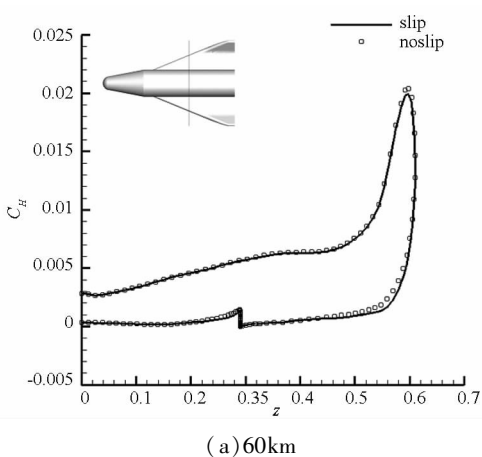


图 6 对称面的摩擦阻力系数分布

Fig. 6 Distribution of friction coefficient on the plane of symmetry

移边界条件的值,其中局部位位置的偏差高达 400%。对比可知下表面摩擦阻力系数的差异随高度的变化相差不大,相对上表面而言,由于下表面气流受压缩气体的密度相对较高,因此滑移效应对它的影响不显著。

图 7 给出了不同高度下 $x = 1\text{m}$ 处的热流系数分布。由图可知,在相对较低的高度,滑移边界条件与无滑移边界条件所得结果较为一致,随着高度的增加,两者所得结果的差距逐渐增大。同时也可看出空天飞机沿翼展方向翼前缘的气动加热最为严重。



(d) 90km

图 7 $x = 1\text{m}$ 处的热流系数分布

Fig. 7 Distribution of heating coefficient at the position of $x = 1\text{m}$

5 结论

(1) 针对高空高超声速滑移流动的数值模拟,本文给出了一种在任意网格密度下均收敛的边界条件处理方法,解决了 Maxwell 滑移边界条件在应用时出现的迭代计算发散的问题。二维圆柱算例及空天飞机算例的数值模拟结果显示了该方法的正确性及适用性。

(2) 滑移效应对飞行器的压力部分影响不明显,对摩擦阻力及热流影响较大,且影响区域主要为飞行器的背风面。

(3) 计算结果表明,空天飞机的翼前缘气动加热严重,80km ~ 90km 高度下滑移边界条件所预测的热流峰值明显低于无滑移边界条件的结果。

(4) 在相对较低的高度,滑移边界条件与无滑移边界条件所得结果较为一致,随着高度的增加,两者所得结果的差距逐渐增大。气体稀薄效应的增加致使传统的无滑移边界条件不能正确描述飞行器的气动特性及热环境。

参考文献 (References)

- [1] 叶友达. 近空间高速飞行器气动特性研究与布局设计优化 [J]. 力学进展, 2009, 39(6): 683 - 694.
YE Youda. Study on aerodynamic characteristics and design optimization for high speed near space vehicles [J]. Advances in Mechanics, 2009, 39(6): 683 - 694. 2009. (in Chinese)
- [2] Nie X B, Chen S Y, et al. A continuum and molecular dynamics hybrid method for micro-and-nano-fluid flow [J]. J. Fluid Mech, 2004(1).
- [3] Maurer J, Tabeling P, et al. Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen [J]. Physics of Fluids, 2003, 15: 2613 - 2621.
- [4] 谢翀, 樊菁. Navier-Stokes 方程二阶速度滑移边界条件的检验 [J]. 力学学报, 2007, 39(1).
XIE Chong, FAN Jing. Assessment of second-order velocity slip boundary conditions of the Navier-Stokes equations [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(1). (in Chinese)
- [5] 沈青. 稀薄气体动力学 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
SHEN Qing. Rarefied gas dynamics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003. (in Chinese)
- [6] Bird G A. Gas Dynamics and the direct simulation of gas flows [M]. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [7] 张涵信, 沈孟育. 计算流体力学差分方法的原理与应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 1 - 9.
ZHANG Hanxin, SHEN Mengyu. Computational fluid dynamics-fundamentals and applications of finite difference methods [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003: 1 - 9. (in Chinese)
- [8] Kim K H, Kim C. Accurate efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows part I: spatial discretization [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 208.
- [9] Michael J W, Graham V. C, et al. Data-parallel lower-upper relaxation method for the navier-stokes equations [J]. AIAA Journal, 1996, 34(1): 1371 - 1377.
- [10] Maxwell J C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature [J]. Philosophical Transactions of The Royal Society, 1879, 2(1).
- [11] Gokcen T, MacCormack R W. Nonequilibrium effects for hypersonic transitional flows using continuum approach [R]. AIAA Paper 1989 - 0461, 1989.
- [12] Lockerby D A, Reese J M, et al. Velocity boundary condition at solid walls in rarefied gas calculations [J]. Physical Review E, 70(017303), 2004.
- [13] Lofthouse A J, Scalabrin L C, et al. Velocity slip and temperature jump in hypersonic aerothermodynamics [R]. AIAA 2007 - 208, 2007.
- [14] Lofthouse A J. Nonequilibrium hypersonic aerothermodynamics using the direct simulation monte carlo and navier-stokes models [D]. The University of Michigan, 2008.
- [15] 李素循. 典型外形高超声速流动特性 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
LI Suxun. Hypersonic flow characteristics around typical configuration [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007. (in Chinese)