

基于 Gauss 伪谱法的空空导弹最优中制导律设计*

杨希祥, 张为华

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:研究 Gauss 伪谱法在空空导弹最优中制导律设计中的应用。建立空空导弹中制导律设计问题最优控制模型,首次提出采用 Gauss 伪谱法求解最优中制导律设计问题的思路,详细阐述了求解流程,通过仿真算例验证了求解方法的有效性,并同比例导引、打靶法等传统方法进行了对比。仿真结果表明,综合考虑性能指标、计算精度、计算效率等因素,Gauss 伪谱法具有明显优势,Gauss 伪谱法求解结果和求解效率与配点个数密切相关。研究结果为空空导弹中制导律设计提供理论参考。

关键词:空空导弹;中制导律;最优控制;Gauss 伪谱法

中图分类号: TJ765 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2013)01-0028-05

Midcourse guidance law optimal design for air-to-air missiles based on gauss pseudospectral method

YANG Xixiang, ZHANG Weihua

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073 China)

Abstract: The optimum design of midcourse guidance law for air-to-air missiles was researched based on Gauss Pseudospectral Method (GPM). The optimal control model for midcourse guidance law of air-to-air missiles was established, the idea to design optimal midcourse guidance law with GPM was proposed, the solving process was described in detail, and effectivity of the proposed method was verified with simulation cases. Simulation results show that GPM is dominant in performance index, computation accuracy and computation efficiency, compared with the traditional methods, such as proportional navigation and shooting method, and the computation accuracy and computation efficiency of GPM are determined by the number of collocation nodes. The above all can provide theoretical reference for research of midcourse guidance law for air-to-air missiles.

Key words: air-to-air missile; midcourse guidance law; optimal design; Gauss Pseudospectral Method (GPM)

空空导弹在现代空战中发挥着举足轻重的作用。空空导弹中制导的目的是,将导弹导引到导引头能够截获目标的区域,它决定了末制导的初始运动参数,因此,空空导弹中制导律设计受到广泛关注。

空空导弹中制导律设计方法大致可分为两类,一类是比例导引规律及其改进形式,另一类则是将中制导律设计问题看作最优控制问题,采用求解最优控制问题的方法求解,得到满足攻击时间最短或燃料最省的最优中制导律。新一代中距空空导弹中制导律设计常常采用后者^[1-2]。

求解最优控制问题的数值方法很多,一般分为间接法和直接法。间接法将最优控制问题转换为 Hamilton 边值问题,然后通过数值方法求解,存在推导过程复杂、难以估计共轭变量初值等诸多不足。直接法采用参数化方法,将连续空间的最优控制问题转化为非线性规划 (Nonlinear

programming, NLP) 问题,通过数值求解非线性规划问题来获得最优解。根据参数化方法不同,直接法分为两种基本类型:仅离散控制变量的打靶法和同时离散控制变量和状态变量的配点法。Gauss 伪谱法 (Gauss Pseudospectral Method, GPM) 是近年来在飞行器最优控制领域备受关注的新技术。Gauss 伪谱法是配点法的一种,它采用全局插值多项式在一系列 Legendre Gauss (LG) 点上近似状态变量和控制变量。与一般的配点法相比,Gauss 伪谱法能够以较少的节点获得较高的求解精度,同时,根据 Gauss 伪谱法共轭变量映射定理^[3-4],采用 Gauss 伪谱法转化得到的 NLP 问题的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件与原最优控制问题一阶最优必要条件的离散形式具有一致性,避免了一般直接法的不足。

本文探索 Gauss 伪谱法在空空导弹中制导律设计问题中的应用,以为空空导弹中制导律设

* 收稿日期:2011-09-08

作者简介:杨希祥(1982—),男,河北阜城人,讲师,博士,E-mail:nkyangxixiang@163.com

计方法和在线制导研究提供有益参考。

$$\min_{a_h, a_v} \int_0^{t_f} dt \quad (10)$$

1 空空导弹中制导律设计问题

1.1 动力学模型

不考虑地球旋转,建立空空导弹平面内三自由度动力学模型

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \gamma \cos \phi \\ \dot{y} = V \cos \gamma \sin \phi \\ \dot{h} = V \sin \gamma \\ \dot{V} = \frac{T-D}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\phi} = \frac{a_h}{V \cos \gamma} \\ \dot{\gamma} = \frac{1}{V} (a_v - g \cos \gamma) \end{cases} \quad (1)$$

式中, V 为导弹飞行速度, γ 为弹道倾角, ϕ 为弹道偏角, T 为导弹发动机推力, 假设其方向与速度矢量方向相同, D 为阻力, m 为导弹质量, 导弹的位置用纵程 x , 横程 y 和高度 h 来描述, 控制变量为加速度的水平分量 a_h 和垂直分量 a_v 。

1.2 阻力模型

导弹飞行过程中受到的气动阻力采用如下计算模型,

$$D = D_0 + D_i \quad (2)$$

$$D_0 = C_{D0} QS \quad (3)$$

$$D_i = \frac{Km^2(a_h^2 + a_v^2)}{QS} \quad (4)$$

$$K = \frac{1}{\pi A_r e} \quad (5)$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (6)$$

式中, C_{D0} 为零升阻力系数, K 为诱导阻力系数, A_r 为长细比, e 为效率因子, ρ 为大气密度, S 为参考面积, Q 为动压。

1.3 中制导律设计问题

空空导弹中制导律设计问题可描述为如下最优控制问题^[5], 对于给定的导弹初始状态 $X_0 = (x_0, y_0, h_0, V_0, \phi_0, \gamma_0)$ 和终端状态 $X_f = (x_f, y_f, h_f, V_f, \phi_f, \gamma_f)$, 寻找最优控制变量 a_h 和 a_v , 在满足 (1) 式所示的 6 个状态方程约束, 以及路径约束和控制变量约束

$$Q \leq Q_{\max} \quad (7)$$

$$a_h \leq a_{\max} \quad (8)$$

$$a_v \leq a_{\max} \quad (9)$$

的前提下, 使得导弹由初始状态达到终端状态的时间最短, 即最优控制问题的目标函数为

2 求解最优控制问题的 Gauss 伪谱法

Gauss 伪谱法将最优控制问题的状态变量和控制变量在一系列 Legendre Gauss (LG) 点上离散, 并以离散点为节点构造 Lagrange 插值多项式来逼近状态变量和控制变量。通过对全局插值多项式求导来近似状态变量对时间的导数, 从而将微分方程约束转换为一组代数约束^[4,6-7]。

2.1 最优控制问题

将空空导弹中制导律设计问题描述为一般的最优控制问题: 寻找控制变量 $u(t) \in \mathbf{R}^m$, 最小化具有一般性的 Bolza 型性能指标

$$J = \Phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (11)$$

其中, 状态变量 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 、初始时间 t_0 和终端时间 t_f (自由) 满足动力学微分方程约束

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad t \in [t_0, t_f] \quad (12)$$

边界条件

$$\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0 \quad (13)$$

路径约束

$$C(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (14)$$

2.2 时域变换

由于 Gauss 伪谱法的配点都分布在区间 $[-1, 1]$ 上, 因此伪谱法的第一步都是将 2.1 节中最优控制问题的时间区间由 $t \in [t_0, t_f]$ 转换到 $\tau \in [-1, 1]$, 对时间变量 t 作变换

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (15)$$

将上述转换应用于最优控制问题的表达式 (11) ~ (14),

最小化性能指标

$$J = \Phi(x(-1), t_0, x(1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(x(\tau), u(\tau), \tau) dt \quad (16)$$

动力学微分方程约束

$$\dot{x}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} f(x(\tau), u(\tau), \tau) \quad \tau \in [-1, 1] \quad (17)$$

边界条件

$$\phi(x(-1), t_0, x(1), t_f) = 0 \quad (18)$$

路径约束

$$C(x(\tau), u(\tau), \tau) \leq 0 \quad (19)$$

2.3 状态变量与控制变量近似

Gauss 伪谱法选取 K 个 LG 点以及 $\tau_0 = -1$ 为节点, 构成 $K + 1$ 个 Lagrange 插值多项式 $L_i(\tau)$ ($i = 0, \dots, K$), 并以此为基函数近似状态变量

$$x(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^K L_i(\tau)x(\tau_i) \quad (20)$$

其中, Lagrange 插值基函数

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (21)$$

使得节点上的近似状态与实际状态相等。

采用 Lagrange 插值多项式 $\tilde{L}_i(\tau)$, ($i = 1, \dots, K$) 作为基函数近似控制变量,

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^K \tilde{L}_i(\tau)\mathbf{U}(\tau_i) \quad (22)$$

其中 τ_i ($i = 1, \dots, K$) 为 LG 点。

2.4 动力学微分方程约束转换为代数约束

对(20)式求导可得状态变量导数, 从而将动力学微分方程约束转换为代数约束, 即

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau_k) &\approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^K \dot{L}_i(\tau_k)\mathbf{X}(\tau_i) \\ &= \sum_{i=0}^K \mathbf{D}_{ki}(\tau_k)\mathbf{X}(\tau_i) \end{aligned} \quad (23)$$

其中微分矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{K \times (K+1)}$ 可离线确定,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ki} &= \dot{L}_i(\tau_k) \\ &= \begin{cases} \frac{(1 + \tau_k)\dot{P}_K(\tau_k) + P_K(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i)[(1 + \tau_i)\dot{P}_K(\tau_i) + P_K(\tau_i)]}, & i \neq k \\ \frac{(1 + \tau_i)\ddot{P}_K(\tau_i) + 2\dot{P}_K(\tau_i)}{2[(1 + \tau_i)\dot{P}_K(\tau_i) + P_K(\tau_i)]}, & i = k \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

其中, τ_k ($k = 1, \dots, K$) 为集合 κ 中的点, 而 τ_i ($i = 0, \dots, K$) 属于集合 $\kappa_0 = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_K\}$ 。

这样, 将最优控制问题的动力学微分方程约束转换为代数约束

$$\sum_{i=0}^K \mathbf{D}_{ki}\mathbf{X}(\tau_i) - \frac{t_f - t_0}{2}f(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k; t_0, t_f) = 0, \quad (k = 1, \dots, K) \quad (25)$$

2.5 离散条件下的终端状态约束

Gauss 伪谱法中的节点包括 K 个配点(τ_1, \dots, τ_K)和初始点 $\tau_0 \equiv -1$ 以及终点 $\tau_f \equiv 1$ 。式(20)未定义终端状态 \mathbf{X}_f , 终端状态也应满足动力学方程约束,

$$\mathbf{x}(\tau_f) = \mathbf{x}(\tau_0) + \int_{-1}^1 f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (26)$$

将终端状态约束条件离散并用 Gauss 积分近似,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\tau_f) &= \mathbf{X}(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K w_k f(\mathbf{X}(\tau_k), \\ &\quad \mathbf{U}(\tau_k), \bar{\tau}, t_0, t_f) \end{aligned} \quad (27)$$

2.6 离散条件下的性能指标

将性能指标函数中的积分项用 Gauss 积分来近似,

$$\begin{aligned} J &= \Phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) \\ &\quad + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K w_k g(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \bar{\tau}_k; t_0, t_f) \end{aligned} \quad (28)$$

基于上述数值近似方法, Gauss 伪谱法将连续最优控制问题离散, 并转换为非线性规划问题: 求离散状态变量 ($\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_K$) 和控制变量 ($\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_K$)、初始时刻 t_0 和终端时刻 t_f (如果 t_0 和 t_f 未知), 使性能指标(28)式最小, 并满足配点处状态约束(23)式, 终端状态约束(27)式, 边界条件

$$\phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) = 0 \quad (29)$$

和路径约束

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \bar{\tau}_k; t_0, t_f) \leq 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (30)$$

3 仿真结果与分析

3.1 仿真条件

假设某空空导弹发动机推力模型可表示为如下简化形式:

$$T = \begin{cases} 33000, & 0 \leq t \leq 1.5 \\ 7500, & 0 < t \leq 8.5 \\ 0, & t > 8.5 \end{cases} \quad (31)$$

质量模型

$$m = \begin{cases} 135 - 14.53t, & 0 \leq t \leq 1.5 \\ 113.205 - 3.31t, & 0 < t \leq 8.5 \\ 90.035, & t > 8.5 \end{cases} \quad (32)$$

零升阻力系数 C_{d0} 和诱导阻力系数 K 采用如下形式:

$$C_{d0} = \begin{cases} 0.02, & M < 0.93 \\ 0.02 + 0.2(M - 0.93), & M < 1.03 \\ 0.04 + 0.06(M - 1.03), & M < 1.10 \\ 0.0442 - 0.007(M - 1.10), & M \geq 0.93 \end{cases} \quad (33)$$

$$K = \begin{cases} 0.2, & M < 1.15 \\ 0.2 + 0.246(M - 1.15), & M \geq 1.15 \end{cases} \quad (34)$$

空空导弹初始状态为

$$\mathbf{X}_0 = (0, 0, 10000, 400, 45, 0)$$

终端状态

$$(x_f, y_f, h_f) = (35000, 0, 8000)$$

即导弹初始高度 10km, 初始速度 400m/s, 初始弹道偏角 45° , 终端高度 8km, 飞过纵程 35km, 终端速度、弹道倾角和弹道偏角自由。

控制变量约束:

$$a_h \leq 50\text{m/s}^2, a_v \leq 50\text{m/s}^2 \quad (35)$$

应用 Gauss 伪谱法时,转换所得 NLP 问题采用序列二次规划(SQP)方法求解^[8]。优化计算所用微机 CPU 为 3.8GHz/Intel 6300,内存为 DDR2.0G,操作系统为 Windows XP,编译环境为 Matlab 7.0。

3.2 仿真结果与分析

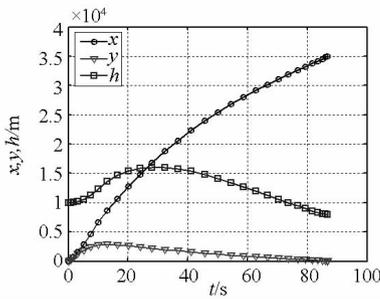
Gauss 伪谱法 LG 点数分别取为 20、30、40 和 50,仿真结果如表 1 所示,为进行对比,表中同时给出了比例导引(Proportional Navigation, PN)、打靶法和奇异摄动(Singular Perturbation, SP)法计算结果^[5]。

表 1 中制导律设计结果

Tab. 1 Design results of midcourse guidance law

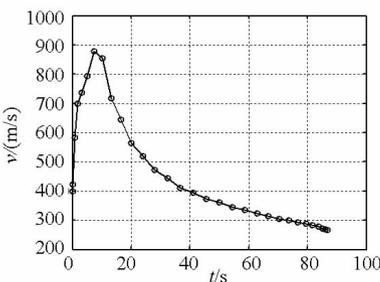
	飞行时间/s	脱靶量/m	计算时间/s
20 个 LG 点	88.84	0.0	38.13
30 个 LG 点	86.82	0.0	139.49
40 个 LG 点	85.20	0.0	262.33
50 个 LG 点	84.64	0.0	316.09
PN	97.82	0.412	0.8
打靶法	84.80	0.082	1019
SP	89.93	0.723	466

由表 1 可以看出,在计算精度方面,采用 Gauss 伪谱法,配点个数取为 20、30 和 40 时,得到的优化目标,即导弹飞行时间均优于比例导引和奇异摄动方法计算结果;配点数取 50 时,飞行时间优于打靶法计算结果。伪谱法具有很高的边界控制精度(脱靶量均为 0)。在计算效率方面,Gauss 伪谱法计算效率虽明显低于比例导引,但优于打靶法和奇异摄动方法,尤其和间接法相比,具有明显优势。



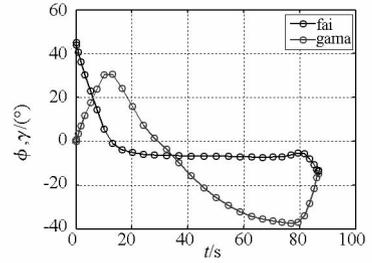
(a) x, y, h 变化曲线

(a) Change curve of x, y, h



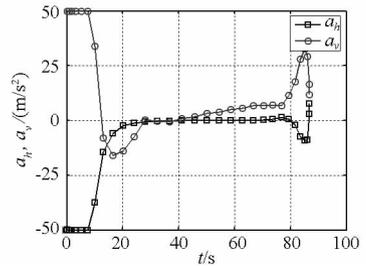
(b) v 变化曲线

(b) Change curve of flight velocity vs. time



(c) ϕ, γ 变化曲线

(c) Change curve of ϕ, γ



(d) a_h, a_v 变化曲线

(d) Change curve of a_h, a_v

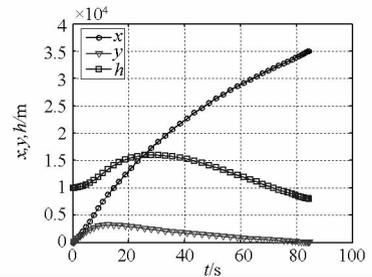
图 1 状态变量和控制变量变化曲线(30 个 LG 点)

Fig. 1 Change curve of state variables and control variables

由表 1 还可以看出, Gauss 伪谱法计算精度和计算时间与配点个数有关,配点数目越多,计算精度越高,计算时间越长。

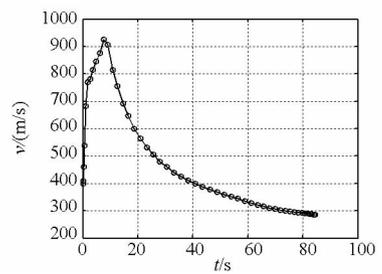
图 1 和图 2 分别给出了 LG 点个数取为 30 和 50 时,状态变量和控制变量变化曲线。

由图 1 和图 2 可以看出,采用 Gauss 伪谱法得到的控制变量过渡平滑,具有较好的工程可实现性。



(a) x, y, h 变化曲线

(a) Change curve of x, y, h



(b) v 变化曲线

(b) Change curve of flight height vs. time

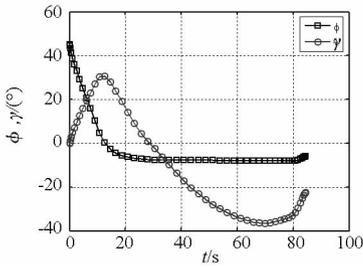
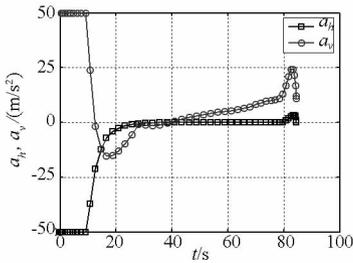
(c) ϕ, γ 变化曲线(c) Change curve of ϕ, γ (d) a_h, a_v 变化曲线(d) Change curve of a_h, a_v

图 2 状态变量和控制变量变化曲线(50 个 LG 点)

Fig. 2 Change curve of state variables and control variables

4 结论

(1)建立了空空导弹最优中制导律设计问题数学模型,包括目标函数、控制变量和约束条件等。

(2)首次采用 Gauss 伪谱法解决空空导弹最优中制导律设计问题,仿真计算结果表明,综合考虑设计的中制导律性能、计算效率和计算精度,相对比例导引、打靶法、奇异摄动等传统中制导律求解方法,Gauss 伪谱法具有较明显优势;配点个数对 Gauss 伪谱法计算精度和计算效率具有一定影响。

(3)本文研究成果为空空导弹先进制导方法

设计提供有益参考,后续将进一步研究提高 Gauss 伪谱法计算效率,以实现空空导弹制导指令在线生成。

参考文献 (References)

- [1] 李峰,王新龙. 空空导弹的中制导律适用性研究[J]. 航空兵器,2009,(6):3-12.
LI Feng, WANG Xinlong. Research on applicability of midcourse guidance law for air-to-air missiles [J]. Aero Weaponry, 2009, (6): 3-12. (in Chinese)
- [2] 祁鹏,杨军,常亮,等. 先进空空导弹最优中制导律研究[J]. 计算机仿真,2010,27(9):75-78.
QI Peng, YANG Jun, CHANG Liang, et al. Optimal midcourse guidance law for advanced air-to-air missiles [J]. Computer Simulation, 2010, 27(9): 75-105. (in Chinese)
- [3] Benson D A, Hunting, ton G T, Thorvaldsen T P, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(6):1435-1440.
- [4] Benson D. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [5] Kee P E, Li D, Siong C J. Near optimal midcourse guidance law for flight vehicle [C]//36th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV, 1998: 1-11.
- [6] 雍恩米,唐国金,陈磊. 基于 Gauss 伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化[J]. 宇航学报,2008,29(6):1766-1772.
YONG Enmi, TANG Guojin, CHEN Lei. Reentry trajectory optimization for hypersonic aircraft based on gauss pseudospectral method [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(6): 1766-1772. (in Chinese)
- [7] 杨希祥,张为华. 基于 Gauss 伪谱方法的固体运载火箭上升段弹道快速优化研究[J]. 宇航学报,2011,32(1):15-21.
YANG Xixiang, ZHANG Weihua. Ascent trajectory rapid optimization for solid launch vehicles based on gauss pseudospectral method [J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(1): 15-21. (in Chinese)
- [8] Gill P E, Murray W, Saunders M A. User's guide for SNOPT version 7: software for large-scale nonlinear programming [R]. University of California, 2007.