

# GPS 接收信号中线性扫频干扰的抑制\*

周柱<sup>1</sup>, 卢树军<sup>1</sup>, 张尔扬<sup>1</sup>, 李耀明<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073;  
2. 空军装备研究院通信所, 北京 100085)

**摘要:**研究了阵列接收的 GPS 接收信号中线性扫频(LFM)干扰的抑制问题。LFM 信号瞬时频率的估计是抑制干扰的关键, 而要准确估计信号瞬时频率, 必须抑制接收信号时频分布中交叉项干扰。本文对接收信号矢量进行白化, 得到信号矢量白化后的空时频分布(STFD)矩阵。文中推出一个与传统方法获得的判决变量不同的判决变量, 用该判决变量可以更加清晰地选出 LFM 信号在时频分布中的自项。根据时频脊点的分布估计 LFM 信号频率参数以及信号瞬时频率, 之后即可根据瞬时频率构建陷波器滤除干扰。仿真表明该方法能够将受交叉项严重干扰的接收信号时频分布映射为清晰的接收信号自项的时频分布, 在数据快拍数满足一定要求时可以很好地抑制掉 LFM 干扰。

**关键词:** LFM 信号; 空时频分布矩阵; 白化矩阵; 判决变量; 陷波器

**中图分类号:** TN911.72   **文献标志码:** A   **文章编号:** 1001-2486(2013)01-0070-07

## LFM interference mitigation in GPS received signal

ZHOU Zhu<sup>1</sup>, LU Shujun<sup>1</sup>, ZHANG Eryang<sup>1</sup>, LI Yaomin<sup>2</sup>

(1. College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;  
2. Communication Institute, Equipment Academy of Air Force, Beijing 100085, China)

**Abstract:** Linear Frequency Modulation (LFM) interference mitigation in received GPS signal by antenna array was studied. The pivotal problem of LFM interference suppression is the instantaneous frequency estimation. With this conception, the cross-term in the time-frequency distribution must be suppressed. Thus the received signal vector was whitened and the Spatial-Time-Frequency Distribution (STFD) matrix was formed by utilizing the whitened signal vector. A decision variable which is different from traditional one was deduced. By using the decision variable, the auto-term in the time-frequency distribution of the LFM signal can be selected clearly. Based on the time-frequency distribution of the auto-terms, the parameters and the instantaneous frequency of the LFM signals can be estimated. According to the instantaneous frequency, corresponding notch filters can be formed, which can mitigate the interferences. Through simulation, it can be viewed that the time-frequency distribution of the received signal which is interfered seriously by the cross-term can be mapped into a clear time-frequency distribution of auto-terms of the signal. Under the condition that the number of snap is enough, the LFM interferences can be suppressed clearly.

**Key words:** LFM signal; spatial-time-frequency distribution; whitening matrix; decision variable; notch filter

线性扫频(LFM)信号是一种典型的非平稳信号, 当 LFM 信号作为干扰存在于扩频信号中时, 通常的时频域、空域或者空时域抗干扰均效果不佳。非平稳信号的主要特性是时频局部性质, 在短时间内占据的频带较窄, 可视作窄带干扰进行抑制。对于所选取时间段内, 估计出 LFM 信号的瞬时频率, 即可设计滤波器对干扰进行滤除。用 Wigner-Hough 变换<sup>[1]</sup>检测 LFM 信号参数可以得到精确的结果, 但运算量很大, 不适于实际应用。

在估得信号参数情况下对 LFM 干扰有三种抗干扰方法: 文献[2]中用到一种方法, 估得瞬时

频率, 然后据此设计滤波器滤除干扰; 文献[3]提出的子空间投影方法, 在估得信号参数之后构建干扰子空间, 将接收信号投影到干扰子空间正交子空间内从而完成干扰抑制; 文献[4]提出的自适应捷变滤波方法, 估得某 LFM 信号的参数之后, 实时对 LFM 信号进行相位补偿, 使之成为直流信号, 然后通过高通滤波滤除干扰。

在参数估计准确的情况下, 子空间投影法抗干扰性能优于滤波法, 但是子空间投影法对于信号参数估计精度的要求很高, 见于文献[3]的仿真, 信号调制参数估计稍有偏差就不能抗干扰。

\* 收稿日期: 2012-05-01

基金项目: 国家部委资助项目(9140C0202011003)

作者简介: 周柱(1980—), 男, 湖南长沙人, 博士研究生, E-mail: brusezhou@163.com;

张尔扬(通信作者), 男, 教授, 博士生导师, E-mail: ezyzhang@nudt.edu.cn

文献[4]提出的方法则要求整个工作系统准确同步,否则就无法抵消掉 LFM 信号的瞬时相位。这两种方法在实际中是难以实现的,因此本文采用第一种思路,但是避免用运算量巨大的 Wigner-Hough 变换估计 LFM 信号参数。

本文对阵列接收的信号矢量进行白化,产生相应的空时频分布(STFD)矩阵<sup>[5]</sup>,对白化矩阵的产生进行了推导,在此基础上得出一个判决变量用于判决任意时频点是否属于时频分布的自项。文献[5]将不同时频点对应 STFD 矩阵的迹除以矩阵范数作为归一化的判决变量,用该判决变量可以区分时频分布中的自项和交叉项,然而该方法忽视了一个重要因素,也就是既不是自项也非交叉项的时频点,其对应矩阵的迹和矩阵范数均很小,其比值不一定是一个接近于零的小数,因此用该方法不能可靠地从所有时频点中选出自项。文献中[6]提出了一种判决变量的计算方法,也没有避免这个归一化的问题。而用本文推导的判决变量则可以在时频分布中清晰的选出信号自项,这样就得到了 LFM 信号的时频分布脊线,从而可以估计 LFM 信号参数并在此基础上得出瞬时频率。估得瞬时频率之后,用零限位置时变的 IIR 陷波器即可完成干扰抑制。

## 1 接收信号的数学形式

设接收天线为  $M$  元均匀线阵, GPS 信号采用 C/A 码,  $P$  个 LFM 信号从不同方向入射。LFM 信号带宽相对于载频来说可以看作窄带信号,不同阵元接收到信号的相位差仅仅取决于信号入射方向,认为不同阵元间接收信号的时差内信号频率不会发生变化。因此接收信号矢量的数学形式可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{a}_c \cdot c(t) + \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t) \\ &= \mathbf{a}_c \cdot c(t) + \mathbf{A}s(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1) \end{aligned}$$

其中  $c(t)$ ,  $\mathbf{a}_c$  分别表示 GPS 信号及其天线阵响应;  $\mathbf{v}(t)$  为零均值加性高斯白噪声,  $\mathbf{y}(t)$  表示 LFM 信号矢量。  $\mathbf{A}$  为混合矩阵(mixing matrix)<sup>[5]</sup>,  $\mathbf{A} = [A_1 \mathbf{a}(\theta_1), A_2 \mathbf{a}(\theta_2), \dots, A_p \mathbf{a}(\theta_p)]^T$ , 其中  $A_i$  表示第  $i$  个 LFM 信号幅度,  $\mathbf{a}(\theta_i)$  为该信号的导向矢量,表示该信号在各个阵元上相对于参考阵元的相位差,  $\theta_i$  为信号的到达角。  $s(t)$  表示 LFM 信号的合集,只包含信号的相位,可写为  $s(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_p(t)]^T$ 。

## 2 信号的时频域分析

对非平稳信号进行时频分析能反映信号的时

频局部性质,时频分析中最基本的是 Wigner-Ville 分布(WVD), WVD 具有良好的局部性质,是一种最基本、也是应用最多的时频分布,接收信号中任意一路信号  $x(t)$  的 Wigner-Ville 分布定义为

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t + \frac{\tau}{2}) \mathbf{x}^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (2)$$

通常时频分布的性能是从时频聚集性和交叉项两个关键角度评价的, Wigner-Ville 分布具有理想的时频聚集性,但是对于多分量信号, WVD 的交叉项是比较严重的。交叉项是二次型或者双线性时频分布的固有结果,它们来自多分量信号中不同信号分量之间的交叉作用。令  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , 有

$$\begin{aligned} W_x(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t + \frac{\tau}{2}) x_1^*(t - \frac{\tau}{2}) \\ &\quad + x_1(t + \frac{\tau}{2}) x_2^*(t - \frac{\tau}{2}) \\ &\quad + x_1^*(t + \frac{\tau}{2}) x_2(t - \frac{\tau}{2}) \\ &\quad + x_2(t + \frac{\tau}{2}) x_2^*(t - \frac{\tau}{2})] e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= W_{x_1}(t, f) + W_{x_2}(t, f) + 2\text{Re}\{W_{x_1 x_2}(t, f)\} \quad (3) \end{aligned}$$

由上式可知一般多分量 LFM 信号交叉项的影响是很复杂的。

将单通道信号的时频分析扩展为接收信号为矢量形式,就得到了各通道信号的自 Wigner-Ville 分布和通道之间的互 Wigner-Ville 分布,这就得到了接收信号矢量的空时频分布(STFD)矩阵。对于如式(1)中的接收信号矢量  $\mathbf{x}(t)$ , 其 STFD 矩阵可表示如下

$$\mathbf{D}_{xx}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t + \frac{\tau}{2}) \mathbf{x}^H(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (4)$$

根据文献[7], STFD 矩阵的离散表示式为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{xx}(t, f) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t+l+k) \\ &\quad \mathbf{x}^H(t+l-k) \exp(-j4\pi f k) \quad (5) \end{aligned}$$

实际中的信号序列为有限长度,设为  $L$ , 则可以得到基于离散时间伪 Wigner-Ville 分布的 STFD 矩阵,可写为下面的形式:

$$\mathbf{D}_{xx}(n, \omega) = \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} \mathbf{x}(n+l) \mathbf{x}^H(n-l)$$

$$\exp(-j2\omega l) \quad (6)$$

由(4)~(6)式可知,每个时频点均对应一个 STFD 矩阵,不同时频点对应的 STFD 矩阵有不同的特性,根据白化后 STFD 矩阵的迹在不同时频点上的显著区别可以区分信号时频分布的自项和交叉项,自项和交叉项对应的点分别称为自源点和互源点,下面对此进行分析。

### 3 LFM 信号瞬时频率估计

#### 3.1 白化矩阵的推导

要突出时频分布的交叉项,首先需要将接收信号矢量进行白化,接收信号采用(1)式的数学形式,忽略微弱的有用信号(下文同),则离散形式不含白噪声的接收信号矢量记为  $y(n)$ , 设其对应白化矩阵为  $\mathbf{W}$ , 白化矩阵的定义为<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{W} y(n) y^*(n) \mathbf{W}^H &= \mathbf{W} \mathbf{R}_y \mathbf{W}^H \\ &= \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{W}^H = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{R}_y = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L y(n) y^*(n)$  为不考虑噪声时 LFM 信号矢量的自相关矩阵。

上式表明,如果  $\mathbf{W}$  为白化矩阵,则  $\mathbf{W}\mathbf{A}$  为一个酉矩阵<sup>[8]</sup>,令该酉矩阵为  $\mathbf{U}$ , 则有

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^* \mathbf{U} \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{W}^*$  表示  $\mathbf{W}$  的 Moore-Penrose 逆矩阵<sup>[8]</sup>, 白化过程中将阵列流形矩阵转化为了酉矩阵,矩阵维数从阵列的维数  $M$  降到了子空间维数  $P$ 。

下面推导白化矩阵  $\mathbf{W}$  的求解方式,对含有白噪声的接收信号求自相关矩阵,有

$$\mathbf{R}_x = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L x(n) x^*(n) = \mathbf{R}_y + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (9)$$

对于纯粹 LFM 信号,不进行白化,则有

$$\mathbf{R}_y = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L y(n) y^*(n) = \mathbf{A} \mathbf{A}^H \quad (10)$$

结合(9)、(10)两式,有

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^H = \mathbf{R}_x - \sigma^2 \mathbf{I} \quad (11)$$

式中  $\sigma^2$  为白噪声方差。因为  $\mathbf{A} = \mathbf{W}^* \mathbf{U}$ , 则有

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^H = (\mathbf{W}^* \mathbf{U})(\mathbf{W}^* \mathbf{U})^H = \mathbf{W}^* (\mathbf{W}^*)^H \quad (12)$$

将(12)式代入(11)式,有

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}^* (\mathbf{W}^*)^H \\ &= \mathbf{R}_x - \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H - \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \mathbf{U} (\mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U} \text{diag}[\lambda_1 - \sigma^2, \lambda_2 - \sigma^2, \dots, \lambda_p - \sigma^2] \mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U} \text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, (\lambda_2 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}$$

$$\text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, (\lambda_2 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}] \mathbf{U}^H \quad (13)$$

式中  $\mathbf{A}$  是由  $\mathbf{R}_x$  的前  $P$  阶特征值组成的对角矩阵,即  $\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$ 。由上式可以推出

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{U} \text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, (\lambda_2 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}] \quad (14)$$

令  $\mathbf{A}' = \text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, (\lambda_2 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}]$ , 将(14)式简写为  $\mathbf{W}^* = \mathbf{U} \mathbf{A}'$ 。

根据 Moore-Penrose 逆矩阵的定义<sup>[8]</sup> 可推得

$$\mathbf{W} = (\mathbf{A}')^{-1} \mathbf{U}^H = [(\lambda_1 - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_1, (\lambda_2 - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_2, \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_p]^H \quad (15)$$

式中  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p]$ , 可见只要求得接收信号矢量自相关矩阵的特征值和特征矢量构成的酉矩阵,就可以据此构造所需要的白化矩阵。

#### 3.2 时频分布中自源点选取

算得白化矩阵之后,可将接收信号矢量白化,将白化后的信号矢量记为  $z(n)$ , 则有

$$\begin{aligned} z(n) &= \mathbf{W} x(n) \\ &= \mathbf{W} (\mathbf{A} s(n) + \mathbf{v}(n)) \\ &= \mathbf{U} s(n) + \mathbf{W} \mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (16)$$

根据(6)式可得出有限长度形式下  $z(n)$  对应空时频分布矩阵的表达式

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \{ \mathbf{D}_{zz}(n, \omega) \} \\ &= \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} \mathbf{E} \{ z(n+l) z^H(n-l) \} \exp(j2\omega l) \end{aligned} \quad (17)$$

将白化信号的表示式(15)代入(17)式可得

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \{ \mathbf{D}_{zz}(n, \omega) \} \\ &= \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} \mathbf{E} \{ (\mathbf{U} s(n+l) + \mathbf{W} \mathbf{v}(n+l)) (\mathbf{U} s(n-l) + \mathbf{W} \mathbf{v}(n-l))^H \} \exp(j2\omega l) \\ &= \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} (\mathbf{U} s(n+l) s^H(n-l) \mathbf{U}^H + \mathbf{W}^E \{ v(n+l) v^H(n-l) \} \mathbf{W}^H) \exp(j2\omega l) \\ &= \mathbf{U} \left( \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} s(n+l) s^H(n-l) \exp(j2\omega l) \right) \mathbf{U}^H + \sigma^2 \mathbf{W} \mathbf{W}^H \end{aligned} \quad (18)$$

式中  $\sigma^2$  为白噪声方差,将确定性信号矢量  $s(n)$  的空时频分布矩阵记为

$$\mathbf{D}_{ss}(n, \omega) = \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} s(n+l) s^H(n-l) \exp(j2\omega l) \quad (19)$$

将推得的白化矩阵表达式(15)代入(18)式,有

$$\mathbf{E}\{\mathbf{D}_{zz}(n, \omega)\} = \mathbf{U}\mathbf{D}_{ss}(n, \omega)\mathbf{U}^H + \sigma^2\mathbf{W}\mathbf{W}^H \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma^2\mathbf{W}\mathbf{W}^H &= \sigma^2\mathbf{U}\{\text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{-1}, (\lambda_2 - \sigma^2)^{-1}, \\ &\quad \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{-1}]\}\mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U}\{\sigma^2\{\text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{-1}, (\lambda_2 - \sigma^2)^{-1}, \\ &\quad \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{-1}]\}\}\mathbf{U}^H \end{aligned} \quad (21)$$

令

$$\mathbf{A}'' = \{\text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{-1}, (\lambda_2 - \sigma^2)^{-1}, \dots, (\lambda_p - \sigma^2)^{-1}]\}$$

则有

$$\mathbf{E}\{\mathbf{D}_{zz}(n, \omega)\} = \mathbf{U}(\mathbf{D}_{ss}(n, \omega) + \sigma^2\mathbf{A}'')\mathbf{U}^H \quad (22)$$

式(22)为任意时频点上白化信号的 STFD 矩阵。

将自源点对应的 STFD 矩阵记为  $\mathbf{E}\{\mathbf{D}_{zz}^a(n, \omega)\}$ ; 将互源点对应的 STFD 矩阵记为  $\mathbf{E}\{\mathbf{D}_{zz}^c(n, \omega)\}$ 。自源点对应 STFD 矩阵的迹可推算如下

$$\begin{aligned} &\text{Trace}(\mathbf{E}[\mathbf{D}_{zz}^a(n, \omega)]) \\ &= \text{Trace}(\mathbf{U}[\mathbf{D}_{ss}^a(n, \omega) + \sigma^2\mathbf{A}'']\mathbf{U}^H) \\ &= \text{Trace}(\mathbf{U}\mathbf{D}_{ss}^a(n, \omega)\mathbf{U}^H) + \sigma^2\text{Trace}(\mathbf{U}\mathbf{A}''\mathbf{U}^H) \\ &= \text{Trace}[\mathbf{D}_{ss}^a(n, \omega)] + \sigma^2\text{Trace}(\mathbf{A}'') \\ &= \sum_{i=1}^P D_{s_i s_i}^a(n, \omega) + \sum_{i=1}^P \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} \\ &= D_{s_q s_q}^a(n, \omega) + \sum_{i=1}^P \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)中假设时频点处在第  $q$  个信号的自项上,因此除  $D_{s_q s_q}^a(n, \omega)$  外,其余对角元素均为 0。

$D_{s_q s_q}^a(n, \omega)$  就是信号的 Wigner 变换,记为  $D_{s_q s_q}^a(n, \omega) = W_{s_q}(n, \omega)$ , 不妨设信号为  $s_q = \exp(j\varphi_q(n))$ , 其有限长度序列下的 Wigner 分布可表示如下

$$\begin{aligned} &W_{s_q}(n, \omega) \\ &= \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} s_q(n+l)s_q^*(n-l)\exp(j2\omega l) \\ &= \sum_{l=-\frac{(L-1)}{2}}^{\frac{(L-1)}{2}} \exp\{[j(\varphi(n+l) - \varphi(n-l) + 2\omega l)]\} \end{aligned} \quad (24)$$

根据随机信号处理的理论,对于  $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(j\phi)$ ,

当且仅当  $\phi = 0$  时,  $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(j\phi) \neq 0$ 。现假设  $L$  足够大,使得上述条件接近于满足,则式(24)当且仅当

$$\varphi(n+l) - \varphi(n-l) + 2\omega l = 0 \quad (25)$$

时不为 0, 此时  $W_{s_q}(n, \omega) \equiv 0$ 。由此可知,时频平面中任何非时频脊线范围之外的点其幅度理论值约为零。式(25)也决定了各信号时频分布脊线的方程,对于本文研究的 LFM 信号,其时频分布脊线方程为直线。

设时频分析中所取的数据段长度为  $L$ , 则只有当时间点  $n$  处于数据段的最中央时,才可能向两端取到长度为  $L$  的数据段。容易推知,当  $n_i = n \pm i$  时,在时频点满足(25)式的情况下,  $W_{s_q}(n_i, \omega) \equiv L - 2i$ , 同理,当  $n_i = n \pm n$  时,  $W_{s_q}(n_i, \omega) \equiv 0$ 。因此可以推得下面的表达式

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^P \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} &\leq \text{Trace}(\mathbf{E}\{\mathbf{D}_{zz}^a(n, \omega)\})/L \\ &\leq 1 + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^P \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} \end{aligned} \quad (26)$$

按照同样的方法推算互源点对应 STFD 矩阵的迹,如下:

$$\begin{aligned} &\text{Trace}(\mathbf{E}\{\mathbf{D}_{zz}^c(n, \omega)\})/L \\ &= \text{Trace}(\mathbf{U}\{\mathbf{D}_{ss}^c(n, \omega) + \sigma^2\mathbf{A}'\}\mathbf{U}^H)/L \\ &= \text{Trace}(\mathbf{D}_{ss}^c(n, \omega))/L + \sigma^2\text{Trace}(\mathbf{A}')/L \\ &\approx 0 + \frac{\sigma^2}{L} \sum_{i=1}^P (\lambda_i - \sigma^2)^{-1} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^P \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (27)$$

协方差矩阵的前  $P$  个特征值远大于白噪声方差,  $\lambda_i \gg \sigma^2, i = 1, 2, \dots, P$ , 因此  $\frac{1}{L} \sum_{i=1}^P \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} \approx 0$ 。

由此可知,接收信号矢量经白化后,其 STFD 矩阵的迹对于信号自项来说约为一个 0 到 1 之间的数,而交叉项对应 STFD 矩阵的迹约等于 0, 因此可以设置一个门限  $\varepsilon = 0.1$ , 当 STFD 矩阵的迹大于  $\varepsilon$  时,认为此矩阵对应的时频点属于 LFM 信号的自项。部分矩阵的迹小于  $\varepsilon$  的自项对应的时频点未选入对结果影响很小,可以忽略不计。

### 3.3 信号调制参数估计

用本文方法可将接收 LFM 信号的时频分布图映射为几条清晰直线的散点图,估计 LFM 信号调制参数也就转化为了在图中分辨出直线,方法步骤如下:

第一步,任取一自源点,过该点作一条直线,倾角  $\alpha$  在  $0^\circ \sim 180^\circ$  中变化,按照点到直线的距离选取该直线的邻域,设为  $\Omega_1$ , 统计  $\Omega_1$  中自源点的数量,如果直线处于某一倾角时,  $\Omega_1$  中自源点的数量远大于直线处于其余倾角上所得的邻域,则认为直线倾角寻找正确。

第二步,按照同样的方式选取所有其他直线及相应的区域  $\Omega_i$ ,  $i = 2, \dots, P$ 。

第三步,将各区域  $\Omega_i$  中与其他区域有交集的部分去除,将经此操作后的区域记为  $\Omega'_i$ , 然后在  $\Omega'_i$  中用最小二乘法拟合最终的直线方程即可精确估计出 LFM 信号频率调制参数。

设最终得到的各直线方程为  $y = f_i + g_i x$ ,  $i = 1, 2, \dots, P$ , 则  $f_i$  为各 LFM 信号的初始频率,  $g_i$  为调频指数。得到各 LFM 信号的频率参数也就可以估算出信号在任意时刻的瞬时频率。

### 3.4 运算量及处理难度分析

传统估计 LFM 信号频率的方法是使用 Wigner-Hough 变换,对接收信号的 Wigner 变换再作 Hough 变换,如下式所示。

$$\begin{aligned} WH_x(f_0, \mu_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) \\ &\quad \exp(-j2\pi(f_0 + \mu_0 t)\tau) d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, f_0 + \mu_0 t) dt \end{aligned} \quad (28)$$

可见 Wigner-Hough 变换是一种双重积分的结构。在完成 Wigner 变换之后,对于任意一对  $(f_0, \mu_0)$  均需要作一次积分。而使用本文方法在 Wigner 变换之后不需要再作积分,所需要用到的运算都比积分运算易于实现,因此本文所提方法的运算量比 Wigner-Hough 变换要小很多。

LFM 干扰信号频率一般从有用信号频段一端扫到另一端之后,又重新回到原始频率。LFM 信号在长时间看来一般是周期信号,但是周期难以准确估计。选取一段持续时间较短的序列,周期性体现不明显,同一扫频信号的多个周期可以看作多个 LFM 信号,但是在同一时刻不会体现为多个干扰信号,不会增加处理难度,因此可以采取分段分析、分段处理的方法。

## 4 时域滤波

在估得任意干扰信号的瞬时频率之后,利用适时调整陷波器零点就可以滤除干扰。陷波器是无限冲击响应(IIR)数字滤波器,滤波器在零点处频率响应出现极小值;在极点处,频率响应出现极大值。不妨设某个零点  $z_i$  在第 1 象限单位圆上,极点  $p_i$  在单位圆内靠近零点的径向上。为了防止滤波器系数出现复数,必须在  $z$  平面第 4 象限对称位置配置相应的共轭零点  $z_i^*$ , 共轭极点  $p_i^*$ 。这样零极点配置的滤波器为单一频率陷波器,陷波器的传递函数为:

$$H(z) = \frac{(z - z_i)(z - z_i^*)}{(z - p_i)(z - p_i^*)} \quad (29)$$

设陷波器在频率  $\omega_i$  处出现凹陷,则零点  $z_i = e^{zj\omega_i}$ , 极点应该在单位圆内,理论上来说,极点越靠近单位圆,则对频率  $\omega_i$  处的限制越深,但是抑制带宽会变窄。因为实际设计中,频点  $\omega_i$  处的干扰谱峰不可能无限窄,总有一定宽度,所以极点不能无限接近单位圆。可设  $p_i = re^{zj\omega_i}$ , 其中  $0 < r < 1$ , 最终可将(26)式化为

$$H(z) = \frac{1 - 2\cos\omega_i z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_i z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (30)$$

用差分方程表示有

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) - 2\cos\omega_i x(n-1) + x(n-2) \\ &\quad + 2r\cos\omega_i y(n-1) - r^2 y(n-2) \end{aligned} \quad (31)$$

以上为针对某个频率进行陷波的滤波器传输函数以及差分方程,当要对几个频率同时进行带陷滤波时,把几个单独频率的带陷滤波器(28)式串接在一起即可。

以上的抗干扰过程实际分为两个部分:频率估计和滤波,其中频率估计是辅助滤波的,不会对信号流程产生影响;而 IIR 滤波对于信号的幅频响应影响不大,对 GPS 信号的解扩影响很小。

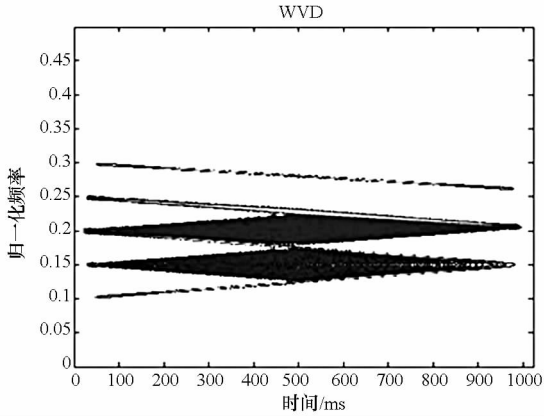
时域滤波方法的缺点是不能适应频率快变的干扰,当接收信号时频分布图中信号时频分布脊线的斜率较高的时候,干扰抑制效果会比较差,解决这个问题的办法是提高采样率,这样同样的调频率在采样率高的情况下对应的时频分布脊线斜率会降低。此外,还有一种方法就是加宽零陷,在预期的频率零陷的临近两侧各设置一个零陷,这样受到抑制的频率范围加宽,也就更能适应频率快变的 LFM 干扰。

## 5 仿真

采用 4 元加芯圆阵天线阵,阵元间距  $d = \lambda/2$ ,  $\lambda$  为接收信号波长,接收 GPS 信号信噪比为  $-20\text{dB}$ 。接收信号中含有 3 个 LFM 信号,设为  $x_i(t) = A_i \exp(j(2\pi f_i t + g_i/2t^2))$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 其中  $f_1 = 0.1$ ,  $g_1 = 0.05$ ,  $f_2 = 0.3$ ,  $g_2 = -0.04$ ,  $f_3 = 0.2$ ,  $g_3 = -0.05$ 。下面用三步仿真说明整个干扰抑制过程,前两步仿真中均设干扰噪声比为  $20\text{dB}$ , 数据快拍数为 1024, 第三步仿真测试最终抗干扰效果时需要变化这两个参数。

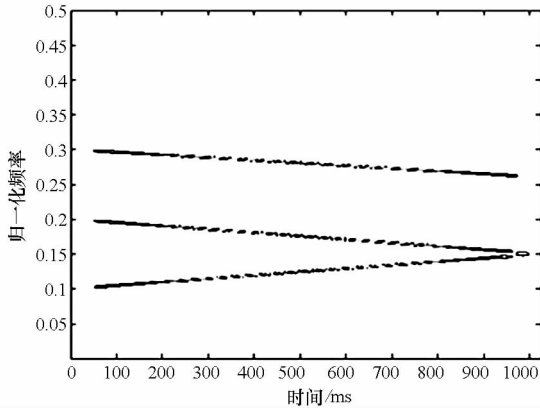
仿真试验一:

展示接收信号时频分布自项检测效果。图 1 为接收信号的时频分布图,各时频点对应矩阵迹的分布图以及依照矩阵的迹选出的自源点分布图。



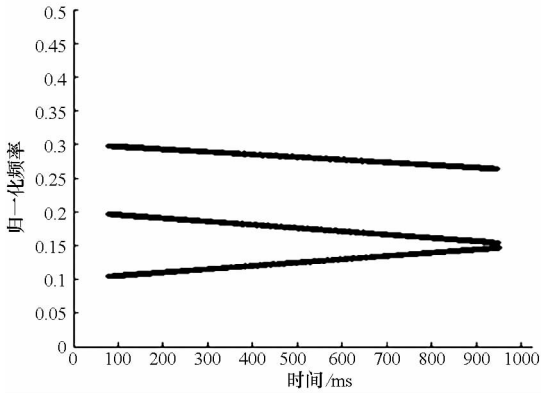
(a) 接收信号时频分布图

(a) TFD of the received signal



(b) STFD 矩阵迹的时频分布图

(b) TFD of the trace of the STFD matrix



(c) 信号自项分布的散点图

(c) The scatter graph of the auto-terms of the signal

图 1 接收信号时频分布自项检测示意图

Fig. 1 Auto-terms detection of time-frequency distribution of the received signal

由图 1 可知,接收信号的时频分布图存在严重的交叉分布,而通过本文的方法算得各时频点处 STFD 矩阵的迹,可以很清晰地反映信号自项的位置,用门限  $\varepsilon$  进行检测可以清楚地选出自源点所在的位置,很好地反映了 LFM 信号的时频脊线。

仿真试验二:

调制参数估计。假设任取一自源点,不妨设所选

为第一个 LFM 信号的自源点,过此点作直线,倾角  $\alpha$  从  $0^\circ \sim 180^\circ$  变化,选择直线邻域内的点,统计每个倾角下直线邻域内自源点的数目,如图 2 所示。

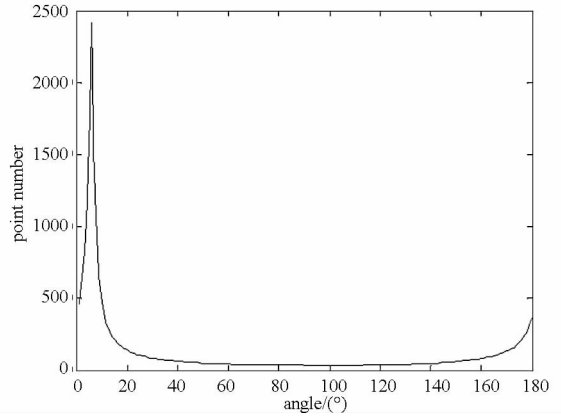


图 2 不同倾角的直线邻域内自源点数目

Fig. 2 Auto-term number of the neighborhood of the lines in different inclination angles

由图 2 可知,通过本文方法可以估出某 LFM 信号时频分布在时频面上的倾角。

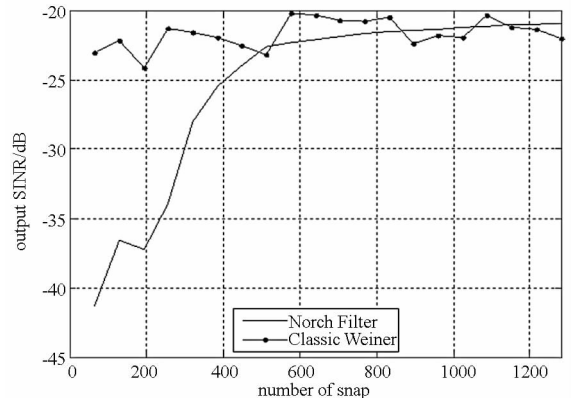
用文中第一步的方法估得的直线倾角是粗略的,要准确估计 LFM 信号的初始频率和调频率。还需要按照文中第二、第三步的方法去除各直线对应的区域  $\Omega_i$  的交集之后,重新用最小二乘法拟合直线,得到 LFM 信号的频率调制参数,如表 1 所示。

表 1 最终拟合估计出的 LFM 信号调制参数

Tab. 1 The finally fitted modulation parameter of LFM signals

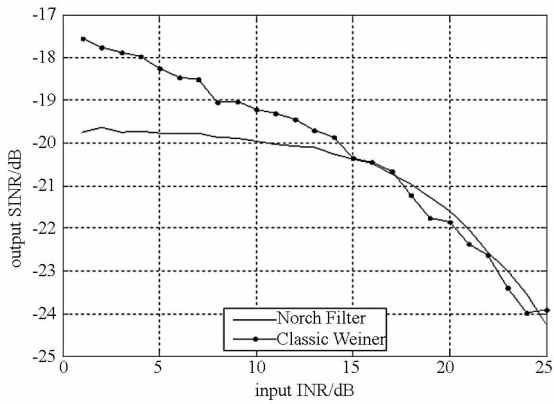
$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
$\hat{f}_1 = 0.1002$	$\hat{f}_2 = 0.3003$	$\hat{f}_3 = 0.2003$
$\hat{g}_1 = 0.05$	$\hat{g}_2 = -0.04$	$\hat{g}_3 = -0.05$

由表 1 可知,用本文方法可准确估计调频斜率,初始频率的估计稍有误差。在估得 LFM 信号的调制参数之后可以方便地算得任意时刻每个信号的瞬时频率。



(a) 输出信噪比与快拍数的关系

(a) The output SINR versus number of snaps



(b) 输出信噪比与干噪比的关系

(b) The output SINR versus JNR (Jammer to Noise Ratio)

图 3 抗干扰性能

Fig. 3 Anti-jamming performance

### 仿真试验三:

抗干扰效果。测试两种情况:(1) 设 3 个 LFM 信号干噪比均为 20dB, 用本文方法进行瞬时频率检测及滤波, 在不同的数据快拍数的情况下测试其最终的输出信噪比;(2) 假设 3 个 LFM 干扰干噪比(INR) 相同, 测试不同干噪比情况下最终的输出信噪比。

图 3 中加点的实线表示使用本文方法进行滤波之后得到的输出信噪比, 点划线为与本文方法相对照的用经典维纳滤波方法滤除干扰之后的输出信噪比。由图 3 可知:(1) 经典维纳滤波的抗干扰性能受数据快拍数的影响不大;(2) 本文方法在数据快拍数达到 512 以上时滤波性能与经典维纳滤波接近, 而且比经典维纳滤波稳定;(3) 在干噪比小于 23dB 时, 本文提出的抗干扰方法均能获得良好效果, 因为在信噪比大于 -23dB 时, GPS 信号均能准确无误地解扩。经典维纳滤波需要获取期望信号, 而实际情况中期望信号难以获得, 相比较而言本文方法更实际有效。

## 6 结论

本文对矢量形式的非平稳信号进行了时频分

析, 得到了空时频分布矩阵, 根据不同时频点对应空时频矩阵的迹的分布选出自源点, 在此基础上估计 LFM 信号频率参数。根据估得的频率参数算得信号在任意时间的瞬时频率, 从而根据瞬时频率设计陷波器滤出干扰。仿真证明该方法能够准确地估计出信号的频率参数, 从而完成抗干扰滤波。通过与经典维纳滤波方法相比较可知, 本文方法能够取得稳定可靠的抗干扰效果。

## 参考文献 (References)

- [1] Barbarossa S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1995, 43(6): 1511 - 1515.
- [2] 张春海. 直接序列扩频通信系统抗干扰技术研究[D]. 国防科技大学博士学位论文, 2006.  
ZHANG Chunhai. The research of interference suppression technologies in DSSS communication system [D]. National University of Defense technology, 2006. (in Chinese)
- [3] Amin M G, Zhao L, Lindsey A R. Subspace array processing for the suppression of FM jamming in GPS receivers[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2004, 40(1): 80 - 92.
- [4] Barbarossa S, Scaglione A. Adaptive time-varying cancellation of wideband interferences in spread - spectrum communications based on time-frequency distributions [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1999, 47(2): 957 - 965.
- [5] Belouchrani A, Amin M G. Blind source separation based on time-frequency signal representations [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(11): 2888 - 2897.
- [6] Cirillo L, Zoubir A, Amin M G. Blind source separation in the time-frequency domain based on multiple hypothesis testing [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(6): 2267 - 2279.
- [7] Belouchrani A, Amin M G. Time-frequency MUSIC[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6: 109 - 110.
- [8] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004:P145, P82.  
ZHANG Xianda. Matrix analysis and applications [M]. Beijing, Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)