证据推理方法中不完备信息影响因素分析*

常雷雷[1],李孟军[1],项成安[2]
(1. 国防科技大学 信息系统与管理学院,湖南 长沙 410073;
2. 重庆通信学院 基础部,重庆 400035)

摘　要:不确定条件下的不完备信息分析是多属性决策中的主要内容之一,Yang提出的证据推理方法可以较好地处理这类信息。研究了证据推理方法中不完备信息的影响因素,包括规则中的不完备信息,规则的权重以及规则的一致性,并以此为基础分析了评估结果中不完备信息的取值范围,得出了初步结论:评估结果中不完备信息的信度必然小于作为输入的规则中不完备信息中的较大者,但不一定大于其中的较小者。进一步分析了规则一致性的逻辑意义和几何意义,指出规则的一致性实际描述了规则之间的冲突程度。

关键词:证据推理方法;不完备信息;冲突程度
中图分类号: TP39　　**文献标志码:** A　　**文章编号:**1001-2486(2013)01-0175-05

Analysis on influential factors to inadequate information using evidential reasoning approach

CHANG Leilei[1], *LI Mengjun*[1], *XIANG Chengan*[2]
(1. College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Department of Foundation, Chongqing Communication Institute, Chongqing 400035, China)

Abstract: Inadequate information under uncertainty is indispensable to multiattribute analysis, which can be well handled by the Evidential Reasoning Approach. The factors which bring about influence on the belief of the inadequacy in the assessment results were studied, including the belief of the inadequacy in the rules as input, the weights and the consistency of the rules. The domain of the inadequacy in the assessment results was determined and a preliminary result was drawn: the belief of the inadequate information in the assessment result can be less than the bigger one of the belief of inadequate information in the rules as input, but may not be more than the smaller one of the belief of inadequate information in the rules as input. The logical and geometry meaning of consistency of the rules was illustrated. The link between the consistency of the rules and the concept of "degree of conflict" was studied.

Key words: Evidential Reasoning Approach; inadequate information; degree of conflict

不确定条件下的决策问题是管理学和决策理论研究中的重要问题。不确定性的产生可以分为两个原因,一是客观事物内在本质的随机不确定性,一是人们对客观世界的认识不足、信息缺失或知识缺乏而导致的认知不确定性[1-3]。不完备信息(Inadequate Information)是一类更特别的不确定性,它指的是人对事物无知(Ignorance)的认识,是不确定条件下的一种特殊情况。不确定性条件下的不完备信息的描述、建模和评估对管理学和决策理论提出了新的挑战[4]。分析与确定影响不完备信息的因素具有重要的理论意义。

Yang[5-10]在传统的D-S证据理论(Dempster-Shafer Theory of Evidence)[11-12]基础上提出了一种使用信度结构(Belief Structure)和规则(Rule)的证据推理方法(the Evidential Reasoning Approach),将专家经验、知识转化为同一信度结构的规则,然后再将具有同样信度结构的规则进行融合。在定义信度结构的过程中,不完备信息表示为信度结构中的一个级别(Grade)。因此,以(包含不完备信息的)信度结构和规则为基础,证据推理方法可以较好地描述和处理不确定条件下的不完备信息。

但是证据推理方法的步骤繁多、计算过程复杂,可操作性差。本文研究了应用证据推理方法进行规则融合后结论中不完备信息的影响因素,分析了将规则作为输入时评估结果中不完备信息取值范围,指出在某些情况下证据推理方法也不能克服"概率不足"的假设[4]。本文讨论了规则

* 收稿日期:2012-05-09
基金项目:国家自然科学基金项目(71201168,71001104)
作者简介:常雷雷(1985—),男,河北沧州人,博士研究生,E-mail:leileichang@hotmail.com;
李孟军(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:mzli11260744@sina.cm

一致性的逻辑意义和几何意义以及与规则的“冲突程度(Degree of Conflict)”[13-16]之间的关系。为了将问题及计算简化,本文仅讨论两个规则进行融合的情况,指出了将“两个规则”的约束推广到“L 个规则”的可行性。

1　证据推理方法

证据推理方法的输入是具有相同信度结构的规则,输出的结果也具有同样的信度结构。证据推理方法模型所涉及的变量定义如下:

两个规则具有同样的信度结构,都有 N 个等级,第 n 个等级的信度分别是 β_n^1 和 β_n^2,相应的不完备信息的信度是 β_D^1 和 β_D^2,权重分别是 w_1 和 w_2。评估结果也具有同样的信度结构(也具有 N 个等级),对于第 n 个等级的信度是 β_n,相应的不完备信息的信度是 β_D。则有

$$w_1 + w_2 = 1;\ \sum_{n=1}^{N} \beta_n^1 + \beta_D^1 = 1;\ \sum_{n=1}^{N} \beta_n^2 + \beta_D^2 = 1 \tag{1}$$

在信度综合之前,先将置信度 β_n^k 转换为基本可信度[5-10]:

$$\begin{cases} m_{n,k} = w_k \beta_n^k \qquad n = 1,\cdots,N \\ \bar{m}_{D,k} = 1 - w_k \\ \tilde{m}_{D,k} = w_k \left(1 - \sum_{n=1}^{N} \beta_n^k\right) \bar{m}_{R,k} \end{cases} \tag{2}$$

$m_{n,k}$ 表示第 n 个等级的基本可信度;$\bar{m}_{D,k}$ 和 $\tilde{m}_{D,k}$ 表示没有分配到 N 个等级的基本可信度,包括两部分,$\bar{m}_{D,k}$ 通过相对权重进行计算,$\tilde{m}_{D,k}$ 反映信息的不完全性。

然后,将基本可信度进行综合,采用下面的解析算法[5-10]:

$$\begin{cases} \tilde{m}_D = \mu\left[\prod_{k=1}^{L} (\bar{m}_{D,k} + \tilde{m}_{D,k}) - \prod_{k=1}^{L} \bar{m}_{D,k}\right] \\ \bar{m}_D = \mu\left[\prod_{k=1}^{L} \bar{m}_{D,k}\right] \\ \mu^{-1} = \left[\sum_{n=1}^{N} \prod_{k=1}^{L} (m_{n,k} + \bar{m}_{D,k} + \tilde{m}_{D,k}) \right.\\ \qquad \left. - (N-1)\prod_{k=1}^{L} (\bar{m}_{D,k} + \tilde{m}_{D,k})\right] \\ \beta_D = \dfrac{\tilde{m}_D}{1 - \bar{m}_D} \end{cases} \tag{3}$$

根据式(1) ~ (3),不完备信息的表达形式如下,其推导过程见附 A。

$$\beta_D = \frac{w_1 w_1 \beta_D^1 + w_2 w_2 \beta_D^2 + w_1 w_2 \beta_D^1 \beta_D^2}{w_1 w_2 \sum_{n=1}^{N} \beta_n^1 \beta_n^2 + 1 - w_1 w_2 - w_1 w_2 (1 - \beta_D^1)(1 - \beta_D^2)} \tag{4}$$

根据式(4),决定评估结果的因素有三个:规则的权重 w_1 和 w_2;规则中的不完备信息 β_D^1 和 β_D^2,代表专家的对于待评价事物的认知程度,以及规则的一致性 $\sum_{n=1}^{N} \beta_n^1 \beta_n^2$。第 3 节将对规则一致性的含义进行分析。

区分两个概念,专家的认知程度指的是在多大程度上认识事物,即对事物认识完备性的程度,用不完备信息的信度 β_D 表示,规则一致性指的是专家对同一事物的看法是否一致,用 $\sum_{n=1}^{N} \beta_n^1 \beta_n^2$ 来表示。认知程度描述的对象是个体,而规则一致性描述的是整体对同一事物进行的认知之间的相似/匹配关系。

例如,两个专家对于同一事物的四个等级(“差”、“一般”、“好”、“很好”)进行判断,给出的判断分别是{“好,90%”},{“不好”,90%},两个专家的认知程度是一样的,$\beta_D^1 = \beta_D^2 = 10\%$,但专家的意见是完全冲突的 $\sum_{n=1}^{N} \beta_n^1 \beta_n^2 = 0$。

2　评估结果中不完备信息的取值范围

本节重点分析 β_D^1 和 β_D^2 是如何影响评估结果中不完备信息 β_D 的,最终获得 β_D 的大致取值范围。

将两个规则的不完备信息置于同一个 X-Y 平面坐标系中,见图 1,则可按照以下四个条件进行讨论。

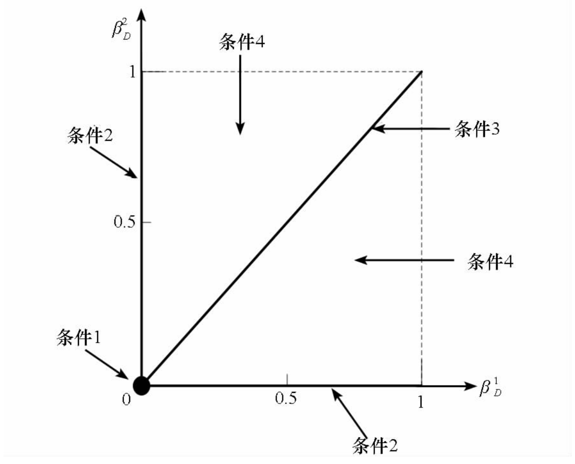

图 1　分四种条件讨论两个规则中不完备信息

Fig. 1　Inadequate information of two rules in four conditions

条件 1:β_D^1 和 β_D^2 都为 0;

条件 2:β_D^1 和 β_D^2 中有且仅有一者为 0;

条件 3:β_D^1 和 β_D^2 都不为 0,但 $\beta_D^1 = \beta_D^2$;

条件 4:β_D^1 和 β_D^2 既不为 0,也不相等。

条件 1 ~ 3 分别描述了图 1 中原点、X/Y 轴和对角线上的特殊情况,条件 4 描述了一般情况。

2.1　β_D^1 和 β_D^2 都为 0

当 $\beta_D^1 = \beta_D^2 = 0$ 时,由式(3) 可以获得

$$\beta_D = 0$$

即

$$\min(\beta_D^1, \beta_D^2) = \beta_D = \max(\beta_D^1, \beta_D^2)$$

2.2　β_D^1 和 β_D^2 中有且仅有一者为 0

假设

$$\beta_D^1 = 0, \beta_D^2 \neq 0$$

可证得

$$\beta_D^2 > \beta_D$$

由于

$$\beta_D > \beta_D^1 = 0$$

故

$$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) > \beta_D > \min(\beta_D^1, \beta_D^2) = 0$$

2.3　β_D^1 和 β_D^2 都不为 0,但 $\beta_D^1 = \beta_D^2$ 相等

假设

$$\beta_D^1 = \beta_D^2 \neq 0$$

可证得

$$\beta_D^1 = \beta_D^2 > \beta_D$$

即

$$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) = \min(\beta_D^1, \beta_D^2) > \beta_D$$

2.4　β_D^1 和 β_D^2 既不为 0,也不相等

假设

$$\beta_D^1 > \beta_D^2 > 0$$

可证得

$$\beta_D - \beta_D^1 < 0$$

即

$$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) > \beta_D$$

亦可证明,存在阈值

$$(\beta_D^1)^* = \frac{w_1 + w_2\beta_D^2}{w_1 + w_2\beta_D^2\beta_D^2}\beta_D^2 \tag{5}$$

当 $\beta_D^1 < (\beta_D^1)^*$ 时,$\beta_D^1 > \beta_D^2 > \beta_D$;当 $\beta_D^1 > (\beta_D^1)^*$ 时,$\beta_D^1 > \beta_D > \beta_D^2$。

对式(5) 进行变换,得到

$$\Delta\beta_D = (\beta_D^1)^* - \beta_D^2 = \frac{w_2\beta_D^2\beta_D^2(1 - \beta_D^2)}{w_1 + w_2\beta_D^2\beta_D^2} \tag{6}$$

式(6) 中 $\Delta\beta_D$ 的含义是,当两个专家对同一事物的认知程度差距不超过 $\Delta\beta_D$ 时,则评估的结果中的不完备信息小于 β_D^1 和 β_D^2,$\beta_D^2 > \beta_D^1 > \beta_D$;当两个专家对同一事物的认知程度的差异超过 $\Delta\beta_D$ 时,评估的结果是对两个专家的认知的折中,因此结果中的不完备信息介于 β_D^1 和 β_D^2 之间,$\beta_D^2 > \beta_D > \beta_D^1$。

以上条件、假设及结论总结见表 1。

表 1　规则中不完备信息与评估结果中不完备信息关系

Tab. 1　Correlation between inadequate information in rules and in assessment results

条件及假设	结论	一般性结论
条件 1 ($\beta_D^1 = \beta_D^2 = 0$)	$\beta_D = 0$	$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) = \beta_D = \min(\beta_D^1, \beta_D^2)$
条件 2 ($\beta_D^1 = 0, \beta_D^2 \neq 0$)	$\beta_D^2 > \beta_D$	$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) > \beta_D > \min(\beta_D^1, \beta_D^2)$
条件 3 ($\beta_D^1 = \beta_D^2 \neq 0$)	$\beta_D^1 (= \beta_D^2) > \beta_D$	$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) = \min(\beta_D^1, \beta_D^2) > \beta_D$
条件 4 ($\beta_D^1 > \beta_D^2 > 0$)　$\beta_D^1 < (\beta_D^1)^*$	$\beta_D^1 > \beta_D^2 > \beta_D$	$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) > \min(\beta_D^1, \beta_D^2) > \beta_D$
$\beta_D^1 > (\beta_D^1)^*$	$\beta_D^1 > \beta_D > \beta_D^2$	$\max(\beta_D^1, \beta_D^2) > \beta_D > \min(\beta_D^1, \beta_D^2)$

对于条件 2 和条件 4(第二种情况) 下的结论,评估结果中的不完备信息的信度介于输入规则中不完备信息信度之间,这实际上违反"概率不足" 的假设[4]:"如果不同的信息都肯定了某一事件出现的可能性较大,那么该事件出现的信度就应该增大,且比每个信息提供的信度都大"。

3　规则一致性的含义

由式(4) 可得,$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 对评估结果中的不完备信息有影响。本节说明 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 的逻辑意义、几何解释及其与规则的"冲突程度(Degree of Conflict)"之间的关系。

$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 的逻辑意义是两个规则的一致性。当其他条件(w_1, w_2, β_D^1 和 β_D^2) 不变时,两个专家的意见越一致,$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 越大,β_D 也就越小,相应地,两个专家的意见分歧越大,$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 也就越小,β_D 也就越大。

$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 的几何意义是在两个规则作为向量

的内积。由于 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n^k = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 是两向量间的夹角的余弦。

要说明 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 的几何意义首先需要构造一个向量空间。

假设有相同信度结构的规则（$P(\Theta)$，β），视其为一组独立随机变量。B 是 $P(\Theta)$ 的一个子集，且 $\forall A \in B$，都有一个固定值 $\beta(A)$，则可以忽略其随机性，进而使用下面的几何解释。

设 $P(\Theta)$ 由内的所有元素构成空间 $\varepsilon_{P(\Theta)}$，如果 $\varepsilon_{P(\Theta)}$ 内的元素的任何线性组合仍在空间 $\varepsilon_{P(\Theta)}$ 内，则空间 $\varepsilon_{P(\Theta)}$ 是一个向量空间。也就是说，

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{2^N}\alpha A_i \in \varepsilon_{P(\Theta)} \tag{7}$$

其中 A_i 是中的 $P(\Theta)$ 一个元素，且 $\alpha_i \in \mathscr{R}$，$\mathscr{R}$ 是一个真集。$A_1,\cdots,A_2^N$ 组成空间 $\varepsilon_{P(\Theta)}$ 的一个基。由于条件(5) 是很容易满足的，因此可以说 $\varepsilon_{P(\Theta)}$ 是 $\mathscr{R}$ 上得一个向量空间。因此，一条规则（$P(\Theta)$，β）也就是向量空间 $\varepsilon_{P(\Theta)}$ 中的一个向量。在该定义中，为了保持一般性，并不要求 $\beta(\varnothing) = 0$。

对于待融合的两个规则，$\beta_n^k = (\beta_1^k,\beta_2^k,\cdots,\beta_N^k)$，视其为空间 $\varepsilon_{P(\Theta)}$ 中的两个向量，则 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 等于这两个向量的内积。

假设两个向量之间有夹角 θ，则夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \cos\langle\beta^1,\beta^2\rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2}{\|\beta_n^1\|\cdot\|\beta_n^2\|} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(\beta_n^1)^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(\beta_n^2)^2}} \tag{8}$$

由于 $\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(\beta_n^1)^2} \leqslant 1$，$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(\beta_n^2)^2} \leqslant 1$，根据式(8)，可以推导出，规则构成的向量的余弦值不小于 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$，如图 2(a) 所示：

$$\cos\theta = \frac{\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(\beta_n^1)^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(\beta_n^2)^2}} \geqslant \sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2 \tag{9}$$

结合式(8) 与式(9)，可以得出以下结论：当两条规则完全一致时，即两个向量有且仅有同一个等级信度为 100%，其他等级信度都为 0 时，有

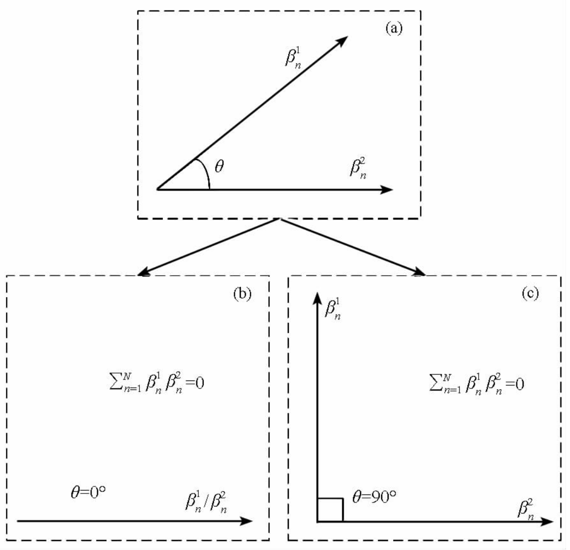

图 2　向量空间中两个规则的几何意义

Fig. 2　Geometry meaning of two rules in a vector space

$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1 = \sum_{n=1}^{N}\beta_n^2 = 1$，$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2 = 1$，此时 $\cos\theta = 1$，$\theta = 0°$，如图 2(b)；当两条规则完全不一致时，即两个向量在任一等级上总有一个信度为 0 时，$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2 = 0$，此时 $\cos\theta = 0$，$\theta = 90°$，如图 2(c)。

在文献[11] 中的集成方法（Dempster's Rule of Combination）中将 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 定义为两个规则的"冲突程度"。目前使用"距离(Distance)"这一概念来衡量"冲突程度"，"来表征两个事物的不同(Dissimilarity)"。

由式(4) 确定的影响不完备信息的因素共有三个，下面从这三个因素的角度探讨将两个规则的前提拓展到 L 个规则的可行性。

首先，对于不完备信息的信度，β_D^1 和 β_D^2，规则的权重，w_1 和 w_2，来说，两个规则与 L 个规则是同质的。

其次，对于规则的一致性来说，当把 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2$ 推广到 L 个规则进行融合的前提下，相应的表达式为 $\sum_{n=1}^{N}\prod_{k=1}^{L}\beta_n^k$，虽然本节中阐述的逻辑意义、几何意义、与规则的冲突程度之间的关系等都是从两个规则进行融合的前提下获得的，但当推广到 L 个规则时，其逻辑意义与几何意义等不变。

因此，根据本文分析的结果，将两个规则推广到 L 个规则的前提是可行的。

4　结束语和讨论

本文对应用证据推理方法融合两个具有同样

信度结构的规则的情况进行了讨论,得出了影响评估结果中不完备信息的信度的三个条件:专家给出规则中的不完备信息的信度,专家给出规则的权重,规则的一致性。得出结论:两个规则中的不完备信息的信度相差较小时,评估结果中的不完备信息小于两者;两个规则中的不完备信息的信度相差较大时,评估结果中的不完备信息介于两者之间。这间接证明了:当规则中不完备信息的信度相差较大时,证据推理方法也不能克服概率不足的问题。

下一步的工作包括三个方面:一是将本文的前提假设推广到 L 个规则进行融合的情况下;二是将分析的对象推广到对信度结构中 N 个等级;三是考虑采用变权的方法处理规则权重,进而可以有效地处理概率不足的问题。

附 A:β_D 的推导

假设

$$w_1 + w_2 = 1;\ \sum_{n=1}^{N}\beta_n^1 + \beta_D^1 = 1;$$

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n^2 + \beta_D^2 = 1$$

则有

$$\beta_D = \frac{\mu\left(\prod_{k=1}^{2}\left(1 - w_k\sum_{n=1}^{N}\beta_n^k\right) - \prod_{k=1}^{2}(1-w_k)\right)}{1-\mu\prod_{k=1}^{2}(1-w_k)}$$

$$= \frac{\mu\{[(1-w_1(1-\beta_D^1))(1-w_2(1-\beta_D^2))]-(1-w_1)(1-w_2)\}}{1-\mu(1-w_1)(1-w_2)}$$

$$= \frac{\mu(w_1w_1\beta_D^1 + w_2w_2\beta_D^2 + w_1w_2\beta_D^1\beta_D^2)}{1-\mu w_1w_2}$$

其中

$$\mu^{-1} = \sum_{n=1}^{N}\prod_{k=1}^{2}[w_k\beta_n^k + 1 - w_k(1-\beta_D^k)] - (N-1)\prod_{k=1}^{2}[1-w_k(1-\beta_D^k)]$$

$$= \sum_{n=1}^{N}w_1w_2\beta_n^1\beta_n^2 + (w_2 + w_1\beta_D^1)w_2(1-\beta_D^2) + (w_1 + w_2\beta_D^2)w_1(1-\beta_D^1) + (w_2 + w_1\beta_D^1)(w_1 + w_2\beta_D^2)$$

$$= w_1w_2\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2 + 1 - w_1w_2 + w_1w_2\beta_D^1 + w_1w_2\beta_D^2 - w_1w_2\beta_D^1\beta_D^2$$

$$= w_1w_2\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2 + 1 - w_1w_2(1-\beta_D^1)(1-\beta_D^2)$$

则有

$$\beta_D = \frac{w_1w_1\beta_D^1 + w_2w_2\beta_D^2 + w_1w_2\beta_D^1\beta_D^2}{w_1w_2\sum_{n=1}^{N}\beta_n^1\beta_n^2 + 1 - w_1w_2 - w_1w_2(1-\beta_D^1)(1-\beta_D^2)}$$

参考文献(References)

[1] Oberkampf W L, Helton J C, Joslyn C A, et al. Challenge problems: uncertainty in system response given uncertain parameters[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 85 (1-3): 11-19.

[2] Helton J C, Oberkampf W L. Special issue on alternative representations of epistemic uncertainty [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 85 (1-3): 1-369.

[3] 左振宇,江红莉,叶春华. 基于证据理论的战时军械维修器材供应链性能评价[J]. 国防科技大学学报, 2012(1):94-99.
ZUO Zhenyu, JIANG Hongli, YE Chunhua. Performance evaluation of ordnance maintenance supply chain based on evidence theory during wartime [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2012, 1: 94-99. (in Chinese)

[4] 姜江. 证据网络建模、推理及学习方法研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2011.
JIANG Jiang. Modeling, reasoning and learning approach to evidential network [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2011. (in Chinese)

[5] Yang J B, Singh M G. An evidential reasoning approach for multiple-attribute decision making with uncertainty[J]. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 1994, 24:1-18.

[6] Yang J B, Sen P. A general multi-level evaluation process for hybrid MADM with uncertainty [J]. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 1994, 24:1458-1473.

[7] Yang J B. Rule and utility based evidential reasoning approach for multiple attribute decision analysis under uncertainty[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 131:31-61.

[8] Yang J B, Xu D L. On the evidential reasoning algorithm for multiattribute decision analysis under uncertainty[J]. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 2002, 32: 289-304.

[9] Yang J B, Liu J, Sii H S, et al. Belief rule-base inference methodology using the evidential reasoning approach-RIMER [J]. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 2006, 36: 266-285.

[10] Jiang J, Li X, Zhou Z J, et al. Weapon system capability assessment under uncertainty based on the evidential reasoning approach[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38: 13773-13784.

[11] Dempster A. Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping [J]. Annual mathematics statistics, 1967, 38: 325-339.

[12] Shafer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[13] Jousselme A L, Grenier D, Bosse E. A new distance between two bodies of evidence[J]. Information Fusion, 2001 (2): 91-101.

[14] Liu W R. Analyzing the degree of conflict among belief functions[J]. Artificial Intelligence, 2006, 170: 909-924.

[15] Florea M C, Jousselme A L, Bosse E, et al. Robust combination rules for evidence theory [J]. Information Fusion, 2009 (10): 183-197.

[16] Jousselme A L, Maupin P. Distance in evidence theory: Comprehensive survey and generalizations[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53: 118-145.