

基于脉冲串信号的无源定位系统频差估计误差 CRLB 分析*

黄龙¹, 郭树人², 徐昂², 王飞雪¹

(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073;

2. 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094)

摘要:频差估计是无源定位系统中的关键部分,其估计精度直接决定了无源定位系统的性能。本文对单频脉冲信号频差估计误差方差的 Cramer-Rao 下限(CRLB)进行了理论分析研究。在建立数学模型的基础上,定量分析了频差估计误差 CRLB 与接收信号参数的数学关系。通过直接公式推导和数值仿真归纳,分别得出了相参/非相参单频脉冲信号频差估计误差 CRLB 的解析表达式,该结论可用于指导基于频差估计的无源定位系统设计。

关键词:无源定位;脉冲信号;频差估计;CRLB

中图分类号:TN958 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2013)02-0109-06

CRLB analysis of FDOA estimation accuracy based on pulse trains in passive location system

Huang Long¹, Guo Shuren², Xu Ang², Wang Feixue¹

(1. College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Institute of Tracking and Telecommunication Technology, Beijing 100094, China)

Abstract: The frequency difference of arrival (FDOA) estimation is the key point in a passive location system, and the estimation accuracy of FDOA determines the location performance. The FDOA estimation methods have been widely studied, but theoretical maximal accuracy of FDOA estimation is barely referred. To explore the ultimate performance of the FDOA estimation, the CRLB of frequency FDOA estimation accuracy was studied. On the basis of building a mathematical model, the quantitative relationship between the FDOA estimation accuracy and the parameters of received signal was investigated. By the means of mathematical deduction and numerical simulation, the algebraic expression of the CRLB was conducted in different application modes. Finally the characteristic of the CRLB was evaluated, and the conclusion can be used to direct the design of passive location system based on FDOA.

Key words: passive location; pulse signal; FDOA; CRLB

无源定位系统在自身不发射任何信号的条件
下,完全被动地接收目标辐射源的电磁波(包括
可见光和红外线),测量其各项参数,确定目标辐
射源的位置及运动状态,具有很好的隐蔽性^[1-3]。
从平台数量上划分,无源定位系统分为单站无源
定位系统、多站无源定位系统。从定位方法上划
分,无源定位方法包括时差定位、频差定位、时差/
频差联合定位等。频差估计在无源定位中有着广
泛的应用,其估计精度直接决定了无源定位的
性能。

Stein 于 1981 年首先提出使用互模糊函数
CAF(Cross Ambiguity Function)法进行接收信号
间频差 FDOA 的估计,互模糊函数最大峰值对应
的频差就是 FDOA 的估计结果^[4]。随后 Johnson、

J. Ulman 等人对互模糊函数法进行了各种改进,
以提高频差估计性能或扩展其适用范围^[5-6]。
David 提出了适用最大似然估计器对接收信号频
差进行估计^[7]。陈莫等人提出了通过数据压缩
和小波变换的方法进行 FDOA 估计^[8]。1989 年,
Robert 分析了连续波信号条件下频差估计的理论
极限^[9]。但目前国内外在无源定位中频差估计
方面着重于对各种频差估计方法的研究,而对频
差估计理论极限性能的探索却鲜有涉及。本文分
析了无源定位系统对未知辐射源发出的脉冲信号
进行频差估计的误差方差 Cramer-Rao 下限
(CRLB),得出了频差估计误差方差 CRLB 与接收
信号参数间的解析表达式,其结论可为基于脉冲
信号的无源定位系统设计提供理论依据。

* 收稿日期:2012-06-02

作者简介:黄龙(1982—),男,重庆人,博士研究生,E-mail: longhuang@nudt.edu.cn;

王飞雪(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail: wangfeixue365@sina.com

1 基于频差测量的无源定位系统

在三维空间中,两个运动平台接收辐射源发出的同一信号,其测得的频率差确定了目标辐射源的一个定位曲面。假设运动平台的三维坐标为 $S_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=0,1$),目标辐射源的三维坐标为 $T(x, y, z)$,如图1所示。

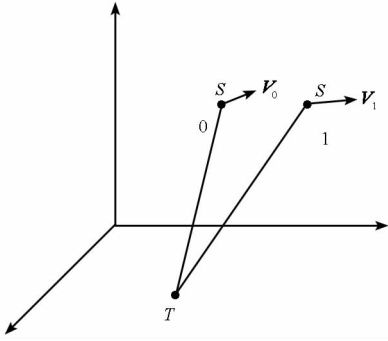


图1 频差无源定位原理图

Fig.1 Sketch map of FDOA based PLS

平台的速度为 $v_i(v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$ ($i=0,1$),两个平台所接收到的信号频差为 f_d ,则:

$$f_d = \frac{f_0}{c} \left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{s}_0}{\|\mathbf{s}_0\|} - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{s}_1}{\|\mathbf{s}_1\|} \right) \quad (1)$$

式(1)说明两个平台间的多普勒频差是目标辐射源位置、平台接收机位置以及接收机运动状态的函数。通过在平台间交换带有时标信息的多普勒频率测量结果即可得到对应时刻的多普勒频差。在精确测量两个运动平台的位置以及速度的前提下,如果得到多个多普勒频差测量结果,则式(1)中只有目标辐射源位置三维坐标三个变量,可通过解联立方程组得到目标辐射源的三维坐标,从而实现无源定位。

2 单频脉冲信号模型

单频脉冲雷达信号可分为相参和非相参两大类,相参脉冲信号是指不同脉冲的初始载波相位具有确定的相互关系,而非相参脉冲信号不同脉冲的初始相位是随机的。

单频脉冲信号模型如图2所示。

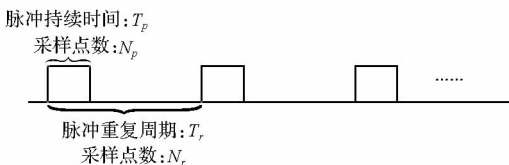


图2 脉冲信号模型

Fig.2 Model of pulse trains

假定每组观测值中有 K 个脉冲,各脉冲信号

幅度均为 A ,采样间隔为 T_s ,单个脉冲有 N_p 个采样点,脉冲持续时间为 $T_p = N_p T_s$;一个脉冲重复周期有 N_r 个采样点,脉冲重复周期为 $T_r = N_r T_s$ 。非相参和相参单频脉冲信号可统一表示为如下形式:

$$x(m) = s(m) + n(m), \quad m=0,1,\dots,KN_p-1 \quad (2)$$

其中 $s(m)$ 为信号分量, $n(m) \sim N(0, \sigma^2)$ 为独立同分布的观测噪声。

对非相参脉冲信号,

$$s(m) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi_k), & m = kN_r, \dots, kN_r + N_p - 1 \\ 0, & m = kN_r + N_p, \dots, (k+1)N_r - 1 \end{cases} \quad (3)$$

$k=0,1,\dots,K-1$

对相参脉冲信号,

$$s(m) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi), & m = kN_r, \dots, kN_r + N_p - 1 \\ 0, & m = kN_r + N_p, \dots, (k+1)N_r - 1 \end{cases} \quad (4)$$

$k=0,1,\dots,K-1$

其中 $\phi_0, \dots, \phi_{K-1}$ 为各非相参脉冲初始相位,在 $[0, 2\pi]$ 均匀分布且相互独立。

3 单频脉冲信号频率估计误差的 CRLB

文献[10]给出了单个脉冲频率估计误差方差的 CRLB,多个非相参脉冲频率估计是通过单个脉冲频率估计结果平均得到,故多个非相参脉冲频率估计误差方差的 CRLB 为

$$\begin{aligned} \text{CRLB}_{f_0-\text{non}} &= \frac{12}{(2\pi)^2 \text{SNR}_{in} T_s^2 KN_p (N_p^2 - 1)} \\ &= \frac{12}{(2\pi)^2 \frac{C}{N_0} \cdot T_s^3 KN_p (N_p^2 - 1)} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\text{SNR}_{in} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ 为信噪比, $\frac{C}{N_0} = \frac{A^2}{2N_0} = \frac{\text{SNR}_{in}}{T_s}$ 为载噪比, N_0 为噪声功率谱密度。

文献[11]给出了多个相参脉冲频率估计误差方差的 CRLB:

$$\begin{aligned} \text{CRLB}_{f_0-\text{co}} &= \frac{12}{(2\pi)^2 \text{SNR}_{in} T_s^2 KN_p \left(\frac{K^2 - 1}{\eta^2} N_p^2 + N_p^2 - 1 \right)} \\ &= \frac{12}{(2\pi)^2 \frac{C}{N_0} \cdot T_s^3 KN_p \left(\frac{K^2 - 1}{\eta^2} N_p^2 + N_p^2 - 1 \right)} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\eta = \frac{N_p}{N_r} < 1$ 为脉冲信号占空比。

令式(5)、(6)中的脉冲数 $K=1$,可得到单脉冲信号频率估计误差方差的 CRLB:

$$\text{CRLB}_{f_{0_single}} = \frac{12}{(2\pi)^2 \frac{C}{N_0} \cdot T_s^3 N_p (N_p^2 - 1)} \quad (7)$$

若单个脉冲采样点 $N_p > 10$, 脉冲数 $K > 10$ (很容易满足), 则上述 CRLB 可化简如下:

$$\begin{aligned} \text{CRLB}_{f_{0_single}} &\approx \frac{12}{(2\pi)^2 \frac{C}{N_0} \cdot T_s^3} \\ \text{CRLB}_{f_{0_non}} &\approx \frac{12}{(2\pi)^2 \frac{C}{N_0} \cdot T_s^3 K} \\ \text{CRLB}_{f_{0_co}} &\approx \frac{12\eta^2}{(2\pi)^2 \frac{C}{N_0} \cdot T_s^3 K^3} \end{aligned} \quad (8)$$

则相参和非相参脉冲信号频率估计误差方差的 CRLB 可重新写为:

$$\text{CRLB}_{f_{0_non}} = \text{CRLB}_{f_{0_single}} \cdot \frac{1}{K} \quad (9)$$

$$\text{CRLB}_{f_{0_co}} = \text{CRLB}_{f_{0_single}} \cdot \frac{\eta^2}{K^3} \quad (10)$$

4 单频脉冲信号频差估计误差的 CRLB

频差估计精度直接决定了无源定位的性能。通过计算脉冲信号频差估计误差的 CRLB, 可以分析各种基于频差定位的无源定位系统能达到的理论定位精度, 也可用于评估频差估计方法的性能优劣。因此, 分析脉冲信号频差估计的 CRLB 计算方法具有重要的理论和工程意义。

4.1 单频相参脉冲信号

考虑两台接收机同时接收同一辐射源发出的单频相参脉冲信号的情况, 接收信号模型由式(2)表示, 以相同采样率采样后的两路接收信号的信号分量可分别定义为:

$$s_1(m) = \begin{cases} A_1 \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi + \Delta\phi), & m = kN_{r1}, \dots, kN_{r1} + N_{p1} - 1 \\ 0, & m = kN_{r1} + N_{p1}, \dots, (k+1)N_{r1} - 1 \end{cases} \quad (11)$$

$k = 0, 1, \dots, K-1$

$$s_2(m) = \begin{cases} A_2 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)m T_s + \phi], & m = kN_{r2}, \dots, kN_{r2} + N_{p2} - 1 \\ 0, & m = kN_{r2} + N_{p2}, \dots, (k+1)N_{r2} - 1 \end{cases} \quad (12)$$

$k = 0, 1, \dots, K-1$

其中 ϕ 表示相参脉冲信号的初相, Δf 和 $\Delta\phi$ 分别表示两台接收机接收到脉冲信号的频差和相差。

由信号模型得其待估计参数矢量为 $\theta = [A_1 \ A_2 \ \Delta f \ f_0 \ \Delta\phi \ \phi]^T$ 。对于高斯噪声观测模型 $n_1(m) \sim N(0, \sigma_1^2)$ 以及 $n_2(m) \sim N(0, \sigma_2^2)$, 由两台接收机观测矢量 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 组成的联合观测矢量 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1; \mathbf{X}_2]$ 服从多维高斯分布 $N(\mu(\theta), \mathbf{C})$, 其均值矢量以及协方差矩阵可表示为

$$\begin{aligned} \mu(\theta) &= \begin{bmatrix} A_1 \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi + \Delta\phi) \\ \vdots \\ A_1 \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi + \Delta\phi) \\ A_2 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)m T_s + \phi] \\ \vdots \\ A_2 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)m T_s + \phi] \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

其中协方差矩阵 \mathbf{C} 与参数矢量 θ 无关。观测矢量 \mathbf{X} 的 Fisher 信息矩阵为:

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (14)$$

由于参数矢量 θ 中幅度参数 A_1, A_2 与其他参数均无关, 因此矢量 \mathbf{X} 的 Fisher 矩阵可以表示如下:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \begin{bmatrix} I_{A_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{A_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Delta f^2} & I_{\Delta f f_0} & I_{\Delta f \Delta\phi} & I_{\Delta f \phi} \\ 0 & 0 & I_{\Delta f f_0} & I_{f_0^2} & I_{f_0 \Delta\phi} & I_{f_0 \phi} \\ 0 & 0 & I_{\Delta f \Delta\phi} & I_{f_0 \Delta\phi} & I_{\Delta\phi^2} & I_{\Delta\phi \phi} \\ 0 & 0 & I_{\Delta f \phi} & I_{f_0 \phi} & I_{\Delta\phi \phi} & I_{\phi^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{A_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{A_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & I'(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

参考文献[12]第40页推导了一般高斯情况下 Fisher 矩阵的计算公式为:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \left[\frac{\partial \mu}{\partial \theta_i} \right]^T C^{-1} \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_j} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(C^{-1} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

由式(13)可知, 观测矢量 \mathbf{X} 的协方差矩阵 \mathbf{C} 与待估计矢量 θ 无关, 因此在式(16)中的第二项为零。即式(15)中 Fisher 矩阵 $I(\theta)$ 的各元素可由以下公式计算得到:

$$[I(\theta)]_{ij} = \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_i} \right]^T C^{-1} \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_j} \right] \quad (17)$$

根据 CRLB 计算理论, 可通过对 Fisher 矩阵 $I(\theta)$ 求逆得到各参量估计误差方差的 CRLB, 从而得到频差估计误差方差的 CRLB。

在单脉冲条件下,即脉冲数 $K = 1$ 时,由式(8)可得,

$$\text{CRLB}_{\Delta f_single} = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\frac{C}{N_0}} + \left(\frac{C}{N_0} \right)' \right) \frac{12}{T_p^3} \quad (18)$$

其中, $\frac{C}{N_0}$ 和 $\left(\frac{C}{N_0} \right)'$ 分别表示两台接收机对同一脉冲发射信号的接收载噪比。

在多脉冲条件下,由于参数矢量维数与脉冲数 K 无关,即 Fisher 信息矩阵的维数与脉冲数 K 无关,因此可通过直接对其 Fisher 矩阵求逆的方法得到该条件下的频差估计误差方差的 CRLB:

$$\text{CRLB}_{\Delta f_co} = \text{CRLB}_{\Delta f_single} \cdot \frac{\eta^2}{K^3} \quad (19)$$

其中, $\text{CRLB}_{\Delta f_single}$ 是式(18)给出的单脉冲条件下的频差估计误差 CRLB, η 和 K 分别表示脉冲占空比和脉冲个数。

4.2 单频非相参脉冲信号

对两个接收机同时接收同一辐射源发出的单频非相参脉冲信号的情况,接收信号模型由式(2)表示,以相同采样率采样后的两路接收信号的信号分量可分别定义为:

$$s_1(m) = \begin{cases} A_1 \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi_k + \Delta\phi), & m = kN_{r1}, \dots, kN_{r1} + N_{p1} - 1 \\ 0, & m = kN_{r1} + N_{p1}, \dots, (k+1)N_{r1} - 1 \end{cases} \quad (20)$$

$k = 0, 1, \dots, K-1,$

$$s_2(m) = \begin{cases} A_2 \cos(2\pi(f_0 + \Delta f)m T_s + \phi_k), & m = kN_{r2}, \dots, kN_{r2} + N_{p2} - 1, \\ 0, & m = kN_{r2} + N_{p2}, \dots, (k+1)N_{r2} - 1 \end{cases} \quad (21)$$

$k = 0, 1, \dots, K-1$

其中 $N_{p1}/N_{r1}, N_{p2}/N_{r2}$ 分别表示两个接收机接收到的脉冲信号单个脉冲采样点数和一个脉冲重复周期采样点数; A_1, A_2 分别表示两个接收机收到的脉冲信号幅度; $\Delta f, \Delta\phi$ 分别表示两个接收机收到的脉冲信号频差和相差。

由上述信号模型得其参数矢量为 $\theta = [A_1, A_2, \Delta f, f_0, \Delta\phi, \phi_0, \dots, \phi_{K-1}]^T$, 对于高斯噪声观测模型 $n_1(m) \sim N(0, \sigma_2^2)$ 以及 $n_2(m) \sim N(0, \sigma_2^2)$, 由两台接收机观测矢量 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 组成的联合观测矢量 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1; \mathbf{X}_2]$ 服从多维高斯分布 $N(\mu(\theta), \mathbf{C})$, 其均值矢量以及协方差矩阵可表示为:

$$\mu(\theta) = \begin{bmatrix} A_1 \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi_0 + \Delta\phi) \\ \vdots \\ A_1 \cos(2\pi f_0 m T_s + \phi_{K-1} + \Delta\phi) \\ A_2 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)m T_s + \phi_0] \\ \vdots \\ A_2 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)m T_s + \phi_{K-1}] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中协方差矩阵 \mathbf{C} 与参数矢量 θ 无关。观测矢量 \mathbf{X} 的 Fisher 信息矩阵为:

$$\mathbf{I}(\theta) = -\text{E} \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (23)$$

由于参数矢量 θ 中幅度参数 A_1, A_2 与其他参数均无关,因此矢量 \mathbf{X} 的 Fisher 矩阵可以表示如下:

$$\mathbf{I}(\theta) = \begin{bmatrix} I_{A_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{A_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Delta f^2} & I_{\Delta f f_0} & I_{\Delta f \Delta\phi} & I_{\Delta f \phi_0} & \cdots & I_{\Delta f \phi_{K-1}} \\ 0 & 0 & I_{\Delta f f_0} & I_{f_0^2} & I_{f_0 \Delta\phi} & I_{f_0 \phi_0} & \cdots & I_{f_0 \phi_{K-1}} \\ 0 & 0 & I_{\Delta f \Delta\phi} & I_{f_0 \Delta\phi} & I_{\Delta\phi^2} & I_{\Delta\phi \phi_0} & \cdots & I_{\Delta\phi \phi_{K-1}} \\ 0 & 0 & I_{\Delta f \phi_0} & I_{f_0 \phi_0} & I_{\Delta\phi \phi_0} & I_{\phi_0^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & I_{\Delta f \phi_{K-1}} & I_{f_0 \phi_{K-1}} & I_{\Delta\phi \phi_{K-1}} & 0 & \cdots & I_{\phi_{K-1}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{A_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{A_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}'(\theta) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Fisher 矩阵中各元素的计算公式仍如式(17)所示。根据 CRLB 计算理论,可通过对矩阵 $\mathbf{I}(\theta)$ 求逆得到各参量估计误差方差的 CRLB,从而得到频差估计误差方差的 CRLB。

但由于非相关脉冲信号条件下矩阵 $\mathbf{I}(\theta)$ 形式复杂,且其矩阵维数随观测数据量的增加而增加,难以对其直接求逆得到频差估计误差方差的 CRLB。因此,下面通过对 $[\mathbf{I}(\theta)]^{-1}$ 的 Mathematica 数值仿真结果进行拟合的方法归纳得出单频非相参脉冲信号条件下频差估计误差方差的 CRLB 并对归纳结果进行验证。

在单脉冲条件下,即脉冲数 $K = 1$ 时,对比式(11)(12)和式(20)(21)信号模型可知,此时两种情况下的信号模型相同。因此其频差估计 CRLB 为式(18)所示。

假定不同接收机在同一时刻接收同一辐射源发出的非相参脉冲信号频差估计误差方差的 CRLB 可以写为与式(19)类似的形式,即:

$$\text{CRLB}_{\Delta f_non} = \gamma \cdot \text{CRLB}_{\Delta f_single} \cdot \frac{\eta^\alpha}{K^\beta} \quad (25)$$

对等号两边求对数,可得:

$$\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}}) = \lg\gamma + \lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{single}}}) + \alpha \lg\eta - \beta \lg K \quad (26)$$

下面通过数值仿真的方式对上式中的三个参数进行拟合和验证,进行数值计算的仿真条件为 $T_s = 1/50\text{MHz}$ 、 $T_p = 8\mu\text{s}$ 、 $\eta = 0.1$ 、 $C/N_0 = (C/N_0)' = 80\text{dBHz}$ (对应信噪比 3dB)。

图 3 给出了在不同占空比 η 条件下,由 Mathematica 直接对 Fisher 矩阵求拟得到频差估计误差方差 CRLB 的对数 $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$ 随脉冲数对数 $\lg K$ 的数值计算结果。

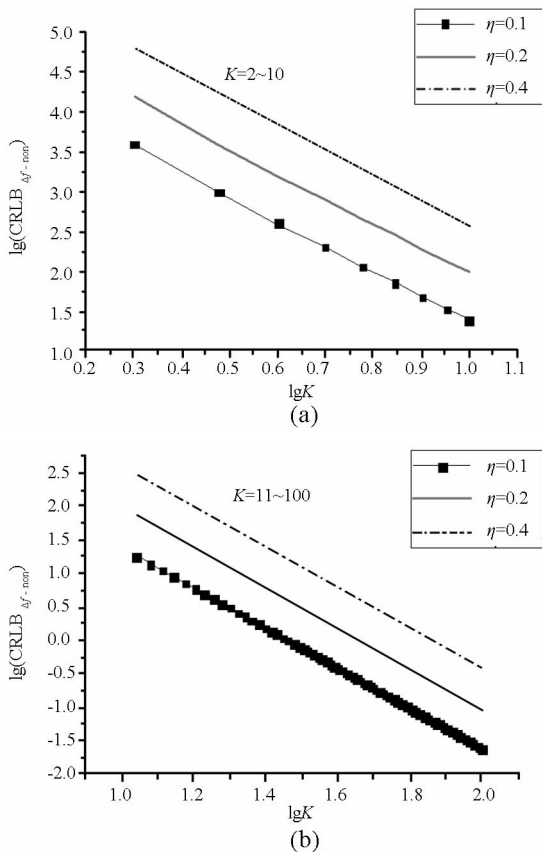


图 3 $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$ 随 $\lg K$ 变化趋势

Fig. 3 Relationship between $\lg K$ and $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$

由图 3(a)可以看出,在不同占空比条件下,脉冲数 K 较小时, $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$ 并非随 $\lg K$ 线性变化,即不满足式(28)中假定的形式。但是当脉冲数 $K > 10$ 时,在不同占空比条件下, $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$ 均随 $\lg K$ 线性变化(图 3(b)所示)。因此式(28)中对脉冲数 K 变化规律的假定在 $K > 10$ 时是正确的。通过对图 3(b)进行线性模型参数拟合,可得:

$$\beta = 3 \quad (27)$$

图 4 给出了在不同脉冲数 K 条件下,频差估计误差方差 CRLB 的对数 $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$ 随占空比对数 $\lg\eta$ 的数值计算结果。

由图 4 可以看出,在不同脉冲数条件下,

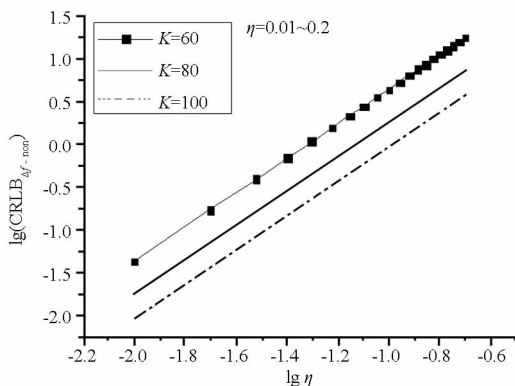


图 4 $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$ 随 $\lg\eta$ 变化趋势

Fig. 4 Relationship between $\lg\eta$ and $\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$

$\lg(\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}})$ 均随 $\lg\eta$ 线性变化,即式(28)中对 η 变化规律的假定是正确的。通过对图 4 进行线性模型参数拟合,可得:

$$\alpha = 2 \quad (28)$$

将式(30)、(31)代入式(28),即可得到在不同占空比条件下, γ 随 K ($K = 11 \sim 100$) 的变化趋势,如图 5 所示。

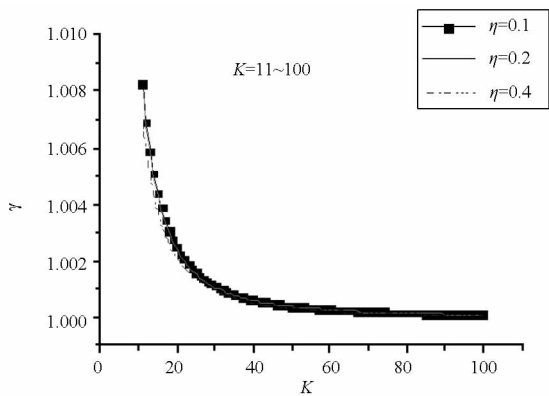


图 5 γ 随 K 变化趋势

Fig. 5 Relationship between K and γ

可以看出,在不同的占空比条件下, γ 均渐进于 1,由此可得:

$$\gamma = 1 \quad (29)$$

由式(25)、(27)、(28)、(29)可归纳得到不同接收机在同一时刻接收同一辐射源发出的非相参单频脉冲信号条件的频差估计误差方差的 CRLB 在 $K > 10$ 时的表达式:

$$\text{CRLB}_{\Delta f_{\text{non}}} = \text{CRLB}_{\Delta f_{\text{single}}} \cdot \frac{\eta^2}{K^3} \quad (30)$$

为验证以上仿真归纳公式的正确性,在 $T_s = 1/50\text{MHz}$ 、 $T_p = 8\mu\text{s}$ 、 $\eta = 0.1$ 、 $C/N_0 = (C/N_0)' = 80\text{dBHz}$ (对应信噪比 3dB)的条件下,将上述公式理论计算得到的频差估计误差 CRLB 随脉冲个数 K 的变化曲线与 Mathematica 实际仿真计算曲线对比,如图 6 所示:

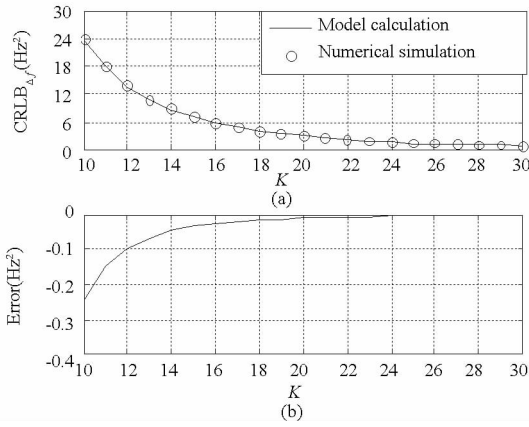


图 6 式(33)计算与仿真曲线对比及两者误差
Fig.6 Complication of simulation and calculation results and the errors between them

在图 6 中,图 (a) 是公式计算与实际仿真结果的对比效果,图 (b) 是二者的误差随脉冲个数 K 的变化关系。由此可以看出,在满足脉冲数 $K > 10$ 的各 K 值处,式 (33) 计算结果均与 Mathematica 仿真结果基本吻合,并且误差随 K 值的增大而迅速降低,当脉冲数 $K > 30$ 时,计算误差小于 10^{-3} Hz^2 ,从而证明了式(33)的正确性。

5 结论

由以上两小节的推导可以得到结论:对两台接收机同时接收同一辐射源发出的单频脉冲信号,无论是相参还是非相参,其频差估计误差方差的 CRLB 都可以由以下公式计算得到:

$$\begin{aligned} \text{CRLB}_{\Delta f} &= \text{CRLB}_{\Delta f_{co}} = \text{CRLB}_{\Delta f_{non}} \\ &= \text{CRLB}_{\Delta f_{single}} \cdot \frac{\eta^2}{K^3} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\frac{C}{N_0}} + \frac{1}{\left(\frac{C}{N_0}\right)'} \right) \frac{12}{T_p^3} \cdot \frac{\eta^2}{K^3} \quad (31) \end{aligned}$$

其中 $\text{CRLB}_{\Delta f}$ 为频差估计误差方差的 CRLB, $\frac{C}{N_0}$ 、 $\left(\frac{C}{N_0}\right)'$ 分别表示两路接收信号的载噪比, T_p 表示单个脉冲持续时间, η 和 K 分别表示脉冲占空比和脉冲个数。即上述计算公式只与接收信号参数和接收脉冲个数有关,与具体频差估计方法无关。

上述频差估计误差方差的 CRLB 计算公式可以用于评估利用频差信息的无源定位技术所能达到的理论定位精度,也可以用于评估一种具体的频差估计方法的频差估计性能,具有重要的工程指导意义。

参考文献 (References)

- [1] 陆安南,孔宪正. 单星测频无源定位法[J]. 通信学报, 2004,25(9): 160-168.
LU Annan, KONG Xianzheng. Passive localization from frequency measurements by single satellite [J]. Journal on Communications, 2004, 25(9): 160-168. (in Chinese)
- [2] 卢鑫,朱伟强,郑同良. 多普勒频差无源定位方法研究[J]. 航天电子对抗,2008,24(3): 40-43.
LU Xin, ZHU Weiqiang, ZHENG Tongliang. Passive location using Doppler FDOA method [J]. Aerospace Electronic Warfare, 2008, 24(3): 40-43. (in Chinese)
- [3] Chan Y T, Towers J J. Passive localization from Doppler shifted frequency measurements [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 10(40): 2594-2598.
- [4] Stein S. Algorithms for ambiguity function processing [J]. IEEE Transactions on Acoustics, and Signal Processing, 1981, 29(3): 1467-1472.
- [5] Weiss L G. Wavelets and wideband correlation processing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1994: 13-32.
- [6] Robert J U, Evaggelos G. Wideband TDOA/FDOA processing using summation of short-time CAF's [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(12): 193-200.
- [7] David A S. Maximum-likelihood estimators for the time and frequency differences of arrival of cyclostation [J]. Digital Communications Signal, 1999, 1: 45-49
- [8] Chen M, Fowler M L. Geometry-adaptive data compression for TDOA/FDOA location [J]. IEEE Transactions on Acoustics, and Signal Processing, 2005, 35(7): 1457-1460.
- [9] Robert K O. Frequency difference of arrival accuracy [J]. IEEE Transactions on Acoustics, and Signal Processing, 1989, 37(2): 306-308.
- [10] 于振海. 多普勒无源定位 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2007.
YU Zhenhai. Passive location using Doppler frequency information [D]. Xi'an: Xidian University, 2007. (in Chinese)
- [11] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation [J]. IEEE Transaction on information Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [12] Kay S M. Fundamental of statistical signal processing [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1998: 40-45.