

非线性压电振动能量俘获行为建模及其不同参数影响机理研究*

陈仲生, 骆彦廷, 杨拥民

(国防科技大学 装备综合保障技术重点实验室, 湖南 长沙 410073)

摘要:如何利用非线性特性来改善压电振动能量捕获性能是工程实际中需要解决的一个问题,为此建立了非线性压电振动能量捕获行为的数学模型,利用定积分法推导了该模型的数值计算方法,并针对不同参数对非线性压电振子输出电能的影响特性进行了数值仿真,结果表明:减小非线性阻尼、增大非线性压电耦合系数均有利于提高非线性压电振动能量俘获的性能;减小非线性刚度能提高低频振动能量俘获的输出,但减小了共振带宽。

关键词:压电振动能量俘获;非线性模型;数值方法;宽带

中图分类号:TM282 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2013)02-0154-05

Modeling of nonlinear piezoelectric vibration energy harvesting behaviors and the effects of its different parameters

CHEN Zhongsheng, LUO Yanting, YANG Yongmin

(Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: How to improve the performance of piezoelectric vibration energy harvesting (PVEH) with nonlinearities is a key problem in engineering applications. A mathematic model of nonlinear PVEHs was built in this research. A fast numerical method based on the principle of the definite integral was proposed to solve the nonlinear model. Then the effects of these nonlinear parameters on the performance of nonlinear PVEHs were simulated. The results demonstrate that both reducing nonlinear damping and increasing nonlinear piezoelectric coupling coefficients will improve the performance, and reducing nonlinear stiffness will increase the output of low frequency vibration energy harvesting, and decrease its resonant bandwidth.

Key words: piezoelectric vibration energy harvesting; nonlinear model; numerical method; broadband

当前机械系统健康监控技术的一个重要发展趋势是在设计阶段将微小传感节点嵌入机械结构中^[1-2],实现自传感、自诊断,但如何供电是其关键技术难点之一。常用的电池方式存在使用寿命有限、体积较大不易集成嵌入等不足。近年来,俘获环境振动能量转化为电能已被公认为是未来解决无线传感节点供电问题最具潜力的技术途径^[3-5]。特别地,与电磁转换方式相比,压电转换方式具有高的力-电耦合效应和能量密度、无电磁干扰以及易于微小化集成等突出优点,更适合用于无线传感节点的自供电。

目前,国内外相关技术研究主要集中于线性悬臂梁压电振子结构,它必须与环境振动产生共振时,才能获得最大能量,否则一旦偏离共振,其输出电能会显著减小^[4],且振动源频率越低,振幅越小,其输出电能也会急剧减小^[4-5]。机械系统振动一般具有低频、宽带的点,这使得线性压

电振子应用严重受限,必须研究非线性压电振动能量俘获技术,这也是国内外开始关注的前沿课题之一。Spreeman等^[6]利用非线性电磁力代替传统的弹簧力,研究了一种非线性电磁式振动能量俘获装置,结果表明非线性越强,其共振带宽越大;Jeff等^[7]探索了非线性刚度对压电振子共振带宽的影响。但由于非线性压电振子动力学行为的复杂性以及非线性模型求解困难,目前如何从理论上深入揭示非线性特性对压电振动能量捕获性能的影响机理还缺乏有效的方法。为此,本文建立了非线性压电振动能量捕获行为的数学模型,推导了该模型的快速数值计算方法,并对模型不同参数对压电振子输出电能的影响特性进行了数值仿真分析。

1 非线性压电振动能量俘获数学建模

悬臂梁压电振动能量俘获系统等效为一个

* 收稿日期:2012-06-10

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(11JJ3046);国家自然科学基金资助项目(51275520, 50805142)

作者简介:陈仲生(1977—),男,安徽桐城人,副研究员,博士,E-mail:czs_study@sina.com

{质量(m) + 刚度(k) + 阻尼(η) + 压电耦合系数(Θ)}的集中参数模型^[5],如图1所示。

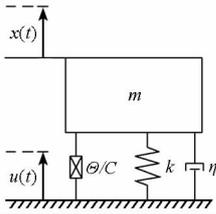


图1 悬臂梁压电振子集中参数模型

Fig.1 Lumped parameter model of a piezoelectric beam

在线性框架下, m 、 η 、 Θ 均看成是不变的常数,此时线性压电振子质量块的动力学方程如式(1)所示。

$$m\ddot{x}(t) + \eta\dot{x}(t) + kx(t) - \frac{\Theta}{C}Q(t) = m\ddot{u}(t) \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 表示质量块的相对位移, $u(t)$ 表示外界振动源位移, $Q(t)$ 表示压电振子产生的电荷, C 表示压电振子的等效电容。

实际上,刚度、阻尼和机电耦合系数往往是随着质量块位移非线性变化的,从而可以建立质量块的非线性动力学方程如式(2)所示。

$$m\ddot{x}(t) + \eta(x)\dot{x}(t) + k(x)x(t) - \frac{\Theta(x)}{C}Q(t) = m\ddot{u}(t) \quad (2)$$

进一步,由于在线性范围外压电振子弹性恢复力表现为渐硬非线性,故刚度系数近似为 $k(x) = b_1 + b_2x^2$;压电振子工作时振动速度较快,需要考虑平方阻尼,故阻尼系数近似为 $\eta(x) = a_1 + a_2|x\dot{x}|$;压电耦合系数为 $\Theta(x) = d_1 + d_2\sqrt{|x|}$ ^[8],代入式(2)可得

$$m\ddot{x} + (a_1 + a_2|\dot{x}|)\dot{x} + (b_1 + b_2x^2)x - (d_1 + d_2\sqrt{|x|})\frac{Q}{C} = m\ddot{u} \quad (3)$$

其中: a_1 表示线性阻尼系数, a_2 表示非线性阻尼系数; b_1 表示线性刚度系数, b_2 表示非线性刚度系数; d_1 表示线性压电耦合系数, d_2 表示非线性压电耦合系数。

假设压电振子两电极间所接负载为纯电阻,则根据电路回路可得压电振子输出电压为

$$V = -\frac{\Theta}{C}x + \frac{Q}{C} \quad (4)$$

电阻两端电压为

$$V_R = -R\dot{Q} \quad (5)$$

由于 $V = V_R$,则组合式(3)、(4)、(5)可建立非线性压电振动能量俘获集中参数模型

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (a_1 + a_2|\dot{x}|)\dot{x} + (b_1 + b_2x^2)x - (d_1 + d_2\sqrt{|x|})\frac{Q}{C} = m\ddot{u} \\ R\dot{Q} - \frac{d_1 + d_2\sqrt{|x|}}{C}x + \frac{Q}{C} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

为了简化分析过程,需要对方程(6)进行无量纲处理^[9]。记 $x = c_2z$, $u = c_2v$, $Q = c_qq$, $t = \sqrt{m/b_1}\tau$, c_2 量纲为米, c_q 量纲为库仑,从而 z 、 v 、 q 、 τ 均为无量纲物理量,代入式(6)可得

$$\begin{cases} \ddot{z} + \left(-\frac{a_1}{\sqrt{b_1m}}\dot{z} + \frac{c_2a_2}{m}|\dot{z}|z\right) + \left(z + \frac{b_2c_2^2}{b_1}z^3\right) - \frac{c_q^2}{c_2^2b_1C}c_2(d_1 + d_2\sqrt{c_2|z|})q = \ddot{v} \\ RC\sqrt{\frac{b_1}{m}}\dot{q} - \frac{c_q}{c_q}(d_1 + d_2\sqrt{c_2|z|})z + q = 0 \end{cases} \quad (7)$$

再记 $2\mu = a_1/\sqrt{b_1m}$, $\eta = a_2c_2/m$, $\alpha = b_2c_2^2/b_1$, $\varepsilon = c_q^2/c_2^2b_1C$, $\theta = c_2d_1/c_q$, $\beta = \sqrt{c_2^3}d_2/c_q$, $\rho = RC\sqrt{b_1/m}$,得到无量纲非线性微分方程组:

$$\begin{cases} \ddot{z} + (2\mu\dot{z} + \eta|\dot{z}|z) + (z + \alpha z^3) - \varepsilon(\theta + \beta\sqrt{|z|})q = \ddot{v} \\ \rho\dot{q} - (\theta + \beta\sqrt{|z|})z + q = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中: z 表示位移量, μ 表示线性阻尼系数, η 表示非线性阻尼系数, α 表示非线性刚度系数, θ 表示线性机电耦合系数, β 表示非线性机电耦合系数, q 表示电荷量, ρ 表示负载电阻, \ddot{v} 表示外部振动激励。

假设外界激励为正弦振动,即 $\ddot{u}(t) = A\sin(\Omega t)$,则无量纲振动激励表示为

$$\ddot{v} = \frac{m}{c_2b_1}A\sin(\Omega\sqrt{\frac{m}{b_1}}\tau) = \gamma\sin(\omega\tau) \quad (9)$$

其中: $\gamma = mA/c_2b_1$, $\omega = \sqrt{m/b_1}\Omega$,将式(9)代入式(8)可得到无量纲的非线性数学模型

$$\begin{cases} \ddot{z} + (2\mu\dot{z} + \eta|\dot{z}|z) + (z + \alpha z^3) - \varepsilon(\theta + \beta\sqrt{|z|})q = \gamma\sin(\omega\tau) \\ \rho\dot{q} - (\theta + \beta\sqrt{|z|})z + q = 0 \end{cases} \quad (10)$$

在式(10)中, ρ 对应无量纲的负载电阻, q 对应无量纲的压电陶瓷片两极产生电荷,则无量纲的瞬时输出功率可表示为

$$P = \rho q^2 \quad (11)$$

给定时间段 T 内无量纲的平均输出功率为

$$P_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (12)$$

2 非线性压电振动能量俘获模型的快速数值计算方法

显然,很难得到式(10)非线性模型的解析

解,需要研究快速、准确的数值计算方法。本文采用定积分法推导了压电振子无量纲位移 z 与输出平均功率 P_{avg} 的数值解,详细过程如下:

1) 由于式(10)中含二阶微分项,首先需要对其进行降阶处理,令

$$y(\tau) = \dot{z}(\tau) \quad (13)$$

将时间区间 $[0, T]N$ 等分,记 $t_i = i(T/N) = i\Delta t (i = 1, 2, \dots, N)$, 将式(10)、(13)在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内进行积分,根据定积分定义,当 Δt 足够小时,有

$$\begin{cases} y(t_{i+1}) = y(t_i) - 2\mu y(t_i)\Delta t - \eta |y(t_i)|y(t_i)\Delta t - z(t_i)\Delta t \\ \quad - \alpha z(t_i)^3 \Delta t + \varepsilon[\theta + \beta \sqrt{|z(t_i)|}]q(t_i)\Delta t + \gamma \sin(\omega t_i)\Delta t \\ z(t_{i+1}) = z(t_i) + y(t_i)\Delta t \\ \rho q(t_{i+1}) = \rho q(t_i) + (\theta + \beta \sqrt{|z(t_i)|})z(t_i)\Delta t - q(t_i)\Delta t \end{cases} \quad (14)$$

2) 令 $Y(i) = y(t_i), Z(i) = z(t_i), Q(i) = q(t_i), S(i) = \sin(\omega t_i) (i = 1, \dots, N)$, 代入式(14)得到递推关系式

$$\begin{cases} Y(i+1) = Y(i) - 2\mu Y(i)\Delta t - \eta |Y(i)|Y(i)\Delta t - Z(i)\Delta t \\ \quad - \alpha Z(i)^3 \Delta t + \varepsilon[\theta + \beta \sqrt{|Z(i)|}]Q(i)\Delta t + \gamma S(i)\Delta t \\ Z(i+1) = Z(i) + Y(i)\Delta t \\ \rho Q(i+1) = \rho Q(i) + (\theta + \beta \sqrt{|Z(i)|})Z(i)\Delta t - Q(i)\Delta t \end{cases} \quad (15)$$

进一步,根据式(11)可得到无量纲的瞬时输出功率为

$$P(i) = \frac{[(\theta + \beta \sqrt{|Z(i)|})Z(i) - Q(i)]^2}{\rho} \quad (16)$$

根据式(12)可得压电振子在时间 $[0, T]$ 内输出的无量纲平均输出功率为

$$P_{avg} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N P(i)\Delta t \quad (17)$$

假定初始值 $Y(1) = 0, Z(1) = 0, Q(1) = 0$, 给定模型参数 $\mu, \eta, \alpha, \theta, \beta, \varepsilon$ 和外部振动激励 γS 后,根据递推关系式(15)利用 MATLAB 等数值计算软件可编程计算 $Y(i), Z(i)$ 与 $Q(i)$ 的值 ($i = 2, \dots, N$),再根据式(16)、(17)即可计算出 P_{avg} 的值。需要指出的是,运用数值积分法,所取的时间间隔 Δt 越小,数值计算结果误差越小, T 时刻误差应满足 $E\{z_N - z(T)\} \leq K\Delta t^{1/2}$, 其中 $z(T)$ 为实际值, z_N 为计算值, K 为误差系数,实际中可根据给定的误差系数 K 来确定合适的时间间隔 Δt 。

3 不同参数对非线性压电振动能量俘获性能的影响分析

为了分析式(10)中各种非线性参数对非线性

压电振动能量俘获性能的影响关系,下面采用上述快速数值计算方法对其进行仿真分析,计算过程中所采用的模型参数及其无量纲模型参数值如表 1 所示。

表 1 压电振子模型参数及其无量纲模型参数

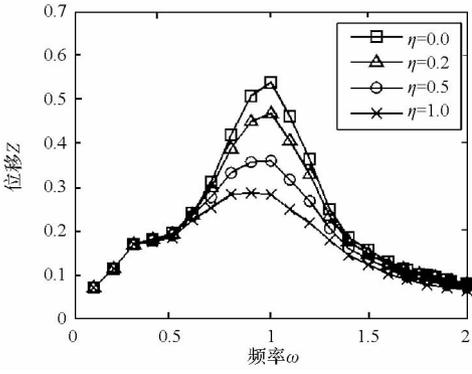
Tab. 1 Detailed values of model parameters

模型参数	参数值	无量纲参数	参数值
等效质量 m	$5.09 \times 10^{-2} \text{ kg}$	等效质量 M	1.00
线性刚度 b_1	$1.76 \times 10^3 \text{ N/m}$	线性刚度 \tilde{k}	1.00
线性阻尼系数 a_1	$0.250 \times 10 \text{ N/(m/s)}$	线性阻尼系数 μ	0.0132
线性机电耦合系数 d_1	$4.60 \times 10^{-3} \text{ N/V}$	线性机电耦合系数 Θ	1.00
等效电阻 R	$8.87 \times 10^4 \Omega$	等效电阻 ρ	1.98
等效电容 C	$1.20 \times 10^{-7} \text{ F}$	等效电容 \tilde{C}	1.00
激励幅值 A	20.0 N/kg	激励幅值 γ	0.193
激励频率 Ω	$1 \sim 400 \text{ Hz}$	激励频率 $\tilde{\Omega}$	0.001 ~ 2.00
固有频率 Ω_n	186 Hz	固有频率 ω_n	1.00
参数 C_z	$3.00 \times 10^{-3} \text{ m}$	参数 ε	0.100
参数 C_q	$1.38 \times 10^{-5} \text{ C}$		

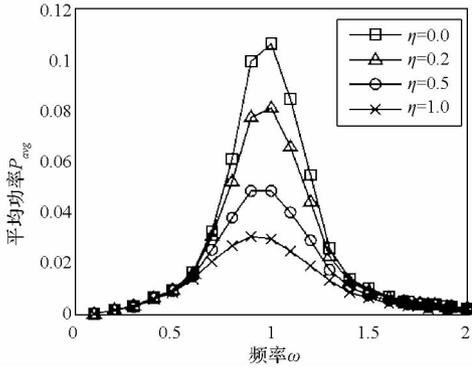
为了模拟宽频带振动激励,本文采用了扫频输入,即输入振动信号为 $\ddot{u}(t) = A \sin(\Omega t) (\Omega = 1 \sim 400 \text{ Hz})$; 然后每次单独改变 $\{\eta, \alpha, \beta\}$ 中的一个非线性参数值,利用上述数值方法计算出非线性压电振子无量纲位移 Z 与输出平均功率 P_{avg} 的值;最后,通过比较 Z 与 P_{avg} 的大小来分析不同参数对非线性压电振子能量输出的影响。

3.1 非线性阻尼系数 η 对非线性压电振子能量输出的影响

数值仿真结果如图 2 所示,可以看出: η 值不变时,随着频率 ω 的增加, Z 和 P_{avg} 先增加后减小,在 $\omega = \omega_r$ (ω_r 为非线性压电振子谐振频率)处达到最大值,分别记作 Z_{max}, P_{max} ,且在偏离谐振频率附近仍然有较大的 Z 和 P_{avg} 值;逐步增大 η 值,在相同振动激励条件下,其谐振频率 ω_r 几乎不变,但 Z_{max} 和 P_{max} 值在逐步减小,具体结果如表 2 所示,这是因为增大阻尼会减小非线性压电振子位移,使得压电材料的形变量越小,从而导致两电极间产生的电压和输出功率越低。由此可见,减小非线性阻尼有利于提高非线性压电振子振动能量俘获的输出电能。



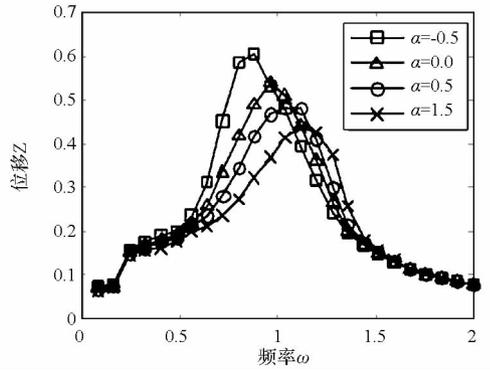
(a) 位移—频率



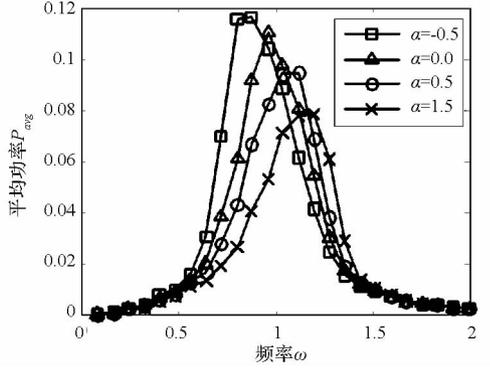
(b) 平均功率—频率

图 2 不同 η 值时非线性压电振子位移 Z 与输出平均功率 P_{avg} 的频响曲线

Fig. 2 The effects of η on Z and P_{avg}



(a) 位移—频率



(b) 平均功率—频率

图 3 不同 α 值时非线性压电振子位移 Z 与输出平均功率 P_{avg} 的频响曲线

Fig. 3 The effects of α on Z and P_{avg}

表 2 不同 η 值时的最大位移、谐振频率与最大功率值

Tab. 2 Values of Z_{max} , ω_r and P_{max} for different η

参数值	Z_{max}	ω_r	P_{max}
$\eta=0.0$	0.54	0.96	0.11
$\eta=0.2$	0.47	0.96	0.08
$\eta=0.5$	0.37	0.96	0.05
$\eta=1.0$	0.29	0.95	0.03

表 3 不同 α 值时最大位移、谐振频率与最大功率值

Tab. 3 Values of Z_{max} , ω_r and P_{max} for different α

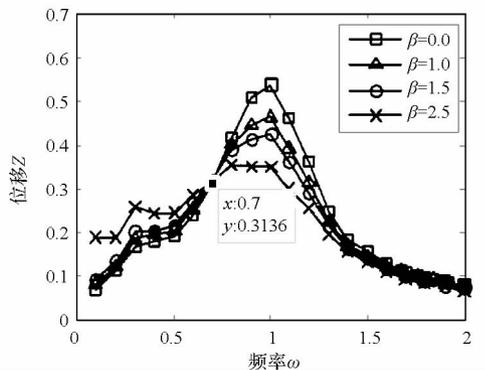
参数值	Z_{max}	ω_r	P_{max}
$\alpha = -0.5$	0.60	0.88	0.12
$\alpha = 0.0$	0.54	0.96	0.11
$\alpha = 0.5$	0.48	1.04	0.09
$\alpha = 1.5$	0.43	1.12	0.08

3.2 非线性刚度系数 α 对非线性压电振子能量输出的影响

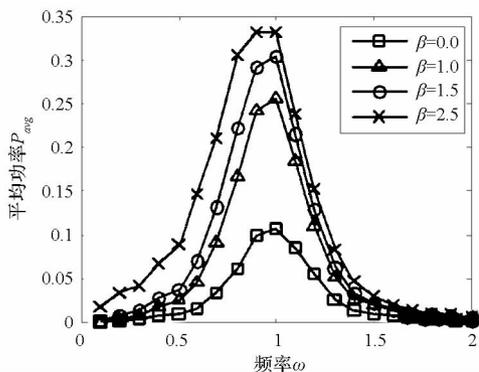
数值仿真结果如图 3 所示,可以看出: α 值不变时,同样在 $\omega = \omega_r$ 处位移 Z 和输出平均功率 P_{avg} 均达到最大值,且在偏离谐振频率附近仍然有较大的 Z 和 P_{avg} 值;逐步增大 α 值,其谐振频率 ω_r 变大,同时 Z_{max} 与 P_{max} 值减小,具体 Z_{max} 、 P_{max} 、 ω_r 的值如表 3 所示。由此可见,非线性刚度系数 α 越小,非线性压电振子的谐振频率越低, Z_{max} 与 P_{max} 值越大,这说明减小非线性刚度有利于提高低频振动能量的输出,但共振带宽会减小。

3.3 非线性压电耦合系数 β 对非线性压电振子能量输出的影响

数值仿真结果如图 4 所示。



(a) 位移—频率



(b) 平均功率—频率

图 4 不同 β 值时非线性压电振子位移 Z 与输出平均功率 P_{avg} 的频响曲线

Fig. 4 The effects of β on Z and P_{avg}

可以看出: β 值不变时, 同样在 $\omega = \omega_r$ 处位移 Z 和输出平均功率 P_{avg} 均达到最大值, 且在偏离谐振频率附近仍然有较大的 Z 和 P_{avg} 值; 当激励频率 $\omega > 0.7$ 时, 随着 β 值的增大, Z_{max} 减小, P_{max} 增大, 而当激励频率 $\omega < 0.7$ 时, 随着 β 值的增大, Z_{max} 与 P_{max} 均增大; 但 β 值增大时, 谐振频率几乎保持不变, 具体值如表 4 所示; 随着 β 值的增大, 非线性压电振子电能输出的谐振带宽明显增加。由此可见, 增大非线性机电耦合系数 β 有利于提高宽带低频振动能量俘获的性能。

表 4 不同 β 值时的最大位移、谐振频率与最大功率值

Tab. 4 Values of Z_{max} , ω_r and P_{max} for different β

参数值	Z_{max}	ω_r	P_{max}
$\beta = 0.0$	0.54	0.96	0.11
$\beta = 1.0$	0.47	0.96	0.26
$\beta = 1.5$	0.43	0.96	0.31
$\beta = 2.5$	0.35	0.96	0.34

特别地, 在图 2 ~ 图 4 中, $\eta = 0, \alpha = 0, \beta = 0$ 时分别对应相应的线性压电振子, 对比可以看出不同的非线性参数对振动能量俘获性能的影响规律是不同的, 需要区别对待。

4 结论

本文在悬臂梁压电振子线性模型基础上, 综

合考虑非线性阻尼系数、刚度系数与压电耦合系数, 建立了非线性压电振动能量捕获行为的数学模型, 运用数值积分法提出了一种快速求解该非线性模型的数值计算方法, 并仿真分析了模型不同参数对非线性压电振子输出电能的影响关系, 主要结论如下: 1) 减小非线性阻尼、增大非线性压电耦合系数均有利于提高非线性压电振子振动能量俘获的性能; 2) 减小非线性刚度能提高低频振动能量俘获的输出, 但减小了共振带宽。上述研究结果可为工程实际中如何优化设计非线性压电振子提供一定的理论指导, 进一步的研究工作是通过实验进行验证。

参考文献 (References)

- [1] Gao R, Suryavanshi A. Diagnosis from within the system[J]. IEEE Instrumentation and Measurement Magazine, 2002, 5(3): 43-47.
- [2] Zhou Z D, Liu Q, Ai Q S, et al. Intelligent monitoring and diagnosis for modern mechanical equipment based on the integration of embedded technology and FBGS technology[J]. Measurement, 2011, 44(9): 1499-1511.
- [3] Joseph A P, Thad S. Energy scavenging for mobile and wireless electronics[J]. IEEE Pervasive Computing, 2005, 4(1): 18-27.
- [4] Beeby S P, Tudor M J, White N M. Energy harvesting vibration sources for microsystems applications [J]. Measurement Science and Technology, 2006, 17: 175-195.
- [5] Roundy S. On the effectiveness of vibration-based energy harvesting [J]. Journal of Intelligent material systems and structures, 2005, 16(1-2): 809-823.
- [6] Spreemann D, Folkmer B, Maurath D, et al. Tunable transducer for low frequency vibrational energy scavenging [C]// Proceedings of Eurosensors XX, Sweden, 2006: 17-20.
- [7] Jeff M, Barry E D. Exploiting nonlinearity to provide broadband energy harvesting [C]// Proceedings of ASME Dynamic Systems and Control Conference, 2009, 2542: 1-3.
- [8] Crawley E F, Anderson E H. Detailed models of piezoceramic actuation of beams[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1990, 1(1): 4-25.
- [9] Triplett A, Quinn D D. The effect of nonlinear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting [C]// Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2009: 887-892.