

高超声速流动计算中 LU-SGS 隐式算法的应用*

曹文斌, 李桦, 丁国昊

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:在高超声速条件下,对原始 LU-SGS 格式及其改进方法的收敛速度做了深入的比较分析,目的是进一步更好地将 LU-SGS 算法用于工程上复杂外形的计算模拟中。二维圆柱,三维钝锥及空天飞机算例的结果表明:对于高超声速粘性流动的计算,粘性项应进行隐式处理;BLU-SGS 方法给出的内迭代方式的收敛性优于 DP-LUR 方法所给出的内迭代方式;LU-SGS 算法中雅克比系数矩阵的计算方式对计算量及收敛性影响较大,若采用精确的矩阵形式,则在流动无分离情况下能取得快速收敛的效果,而在含有流动分离的情况,因受稳定性的影响,精确的矩阵形式的收敛表现不及对角近似形式。

关键词:LU-SGS 隐式算法;收敛性;高超声速;计算流体力学

中图分类号:V211.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2013)03-0018-06

Application of the implicit LU-SGS algorithm for hypersonic flows

CAO Wenbin, LI Hua, DING Guohao

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:Convergence rates of the original LU-SGS scheme and its modified methods were investigated and compared under hypersonic conditions, which is aimed to implement the LU-SGS algorithm efficiently for numerical simulation of complex geometries in engineering environment. Numerical results of 2D cylinder, 3D blunt cone and space shuttle show that: the viscous terms must take the implicit form for hypersonic viscous flows. the convergence rate of the BLU-SGS inner iterations is fast than that in the DP-LUR method. Jacobian matrices in the LU-SGS algorithm have a significant effect on computational work and convergence performance. for the flows without separation, fast convergence can be reached by using the exact matrix method and for the flows with large separation, numerical instability makes the exact matrix method less efficient than the diagonal method.

Key words:implicit LU-SGS algorithm; convergence; hypersonic; computational fluid dynamics

随着数值算法的快速发展及计算机性能的显著提高,计算流体力学(CFD)在最近几年得到了广泛的应用并在高超声速飞行器的气动力与热环境的预测中成为了最有用的工具。在高超声速流动中,为了准确预测物体表面的摩擦阻力与热流分布,与亚声速及超声速流动相比,需要更密的网格才能准确分辨边界层内的大的物理量梯度,而数值计算中迭代时间步的大小与网格尺度有关,网格越密,时间步越小。另一方面,高超声速飞行器所处的高空大气环境,气体密度相对较低,此时流动的雷诺数较小,低雷诺数的流动因粘性力占主导相对于低空的高雷诺数流动而言往往需要更多的迭代步才能达到定常收敛的状态。计算网络的苛刻要求及收敛特性的缓慢导致了数值模拟高空高超声速流动需要消耗较多的计算机时。快速收敛的算法是数值模拟方法在工程实际问题中能

得到应用的前提条件。随着计算几何外形和流动特性的复杂性越来越高,精确模拟的难度及所需要的网格量也急剧增大。为了缩短求解时间及提高对复杂问题的模拟能力,大规模并行计算已在 CFD 中得到普遍应用。然而受负载平衡及边界数据交换等问题的影响,大规模并行计算的并行效率往往不高且很难提高,因此算法收敛性的改善能极大地节省并行计算的 CPU 时间消耗。

显式时间推进方法因简单,程序易实现,计算量和内存消耗都较小,及有利于并行化等特点,得到了广泛的应用,其中比较有效的方法有 Runge-Kutta 多步格式^[1]及最近发展的隐式 Runge-Kutta 方法^[2-3]。尽管目前显式类方法计算效率有所提高,但受 CFL 条件的限制,其加速收敛效果有限,特别是对于大的网格长宽比的情况,加速收敛效果不理想。提高计算效率的有效方法是采用隐式

* 收稿日期:2012-10-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(91016010)

作者简介:曹文斌(1985—),男,湖南常宁人,博士研究生,E-mail:caowenbin08@163.com;

李桦(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:lihuakd@tom.com

时间推进方法,隐式格式受 CFL 数限制较小,可以取较大的时间步长,从而提高计算效率。

很多类隐式时间推进方法已经成功地应用到 N-S 方程的定常计算当中,其中应用最广泛的方法为 LU-SGS 隐式格式^[4]。原始的 LU-SGS 格式最早被 Jameson 等当做松弛方法用于跨声速的流动求解,之后被发展到高超声速粘性流动的计算中。它具有算法简单,内存消耗中等及无条件稳定且无需矩阵求解等优点,在结构网格及非结构网格都可得到有效应用。应用表明,原始 LU-SGS 格式得到一个收敛解所需的迭代步数多,其加速收敛效果不及一些高效隐式迭代格式,如 GMRES 方法^[5]及 Newton-Krylov 方法^[6]。因此,诸多文献提出了不同的改进策略。针对高超声速流动最有效的改进来自文献[7]。文中给出了一种有利于并行计算的 DP-LUR 方法,其内迭代步的引入有效地提高了加速效果;针对大长宽比网格的情况,文中指出矩阵 DP-LUR 方法虽然涉及矩阵求逆,计算量大,但是收敛速度明显快于对角近似 DP-LUR 方法。文献[8]的 BLU-SGS 方法给出了一种不同于文献[7]的内迭代方式,并指出应用精确的雅克比系数矩阵方法能得到与全隐式方法^[8]可比的收敛速度。

本文基于结构网格有限体积法,在高超声速条件下以 LU-SGS 隐式算法为研究对象,比较上述不同内迭代方式的收敛快慢,在不同情况下雅克比系数矩阵选取精确的矩阵形式与近似的对角化形式对收敛速度的影响,给出适合于工程上复杂外形计算的高效时间推进方法。

1 控制方程

在一般曲线坐标系下,二维可压缩 N-S 方程的守恒形式为

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{F} - \bar{F}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\bar{G} - \bar{G}_v)}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

其中 J 为坐标变换雅克比行列式,其值为单元控制体体积 V 的倒数, Q 为守恒变量, \bar{F} 、 \bar{G} 为无粘通量, \bar{F}_v 、 \bar{G}_v 为粘性通量,具体形式见文献[9]。对上述控制方程组运用基于单元中心型的有限体积法进行空间离散,无粘通量采用 M-AUSMPW + 格式^[10],通过 MUSCL 方法选用 Vanleer 平均限制器进行空间重构,达到二阶精度,粘性通量采用二阶中心格式离散。

2 LU-SGS 隐式算法

在方程(1)中,对无粘通量及粘性通量均采

用隐式格式离散,对时间采用一阶离散后可得

$$V \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\partial(\bar{F} - \bar{F}_v)^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial(\bar{G} - \bar{G}_v)^{n+1}}{\partial \eta} = 0 \quad (2)$$

式中 $\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n$, Δt 为当地时间步长,由下面表达式计算

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{V}{(\rho_A + \rho_B) + 2(\rho_A^v + \rho_B^v)} \quad (3)$$

其中 CFL 为 CFL 数, ρ_A 、 ρ_B 与 ρ_A^v 、 ρ_B^v 分别为无粘与粘性雅克比系数矩阵谱半径。对式(2)中无粘通量的隐式部分进行线性化处理,即

$$\begin{aligned} \bar{F}^{n+1} &= \bar{F}^n + A \Delta Q \\ \bar{G}^{n+1} &= \bar{G}^n + B \Delta Q \end{aligned} \quad (4)$$

由于粘性通量无齐次性质,无法直接得到其雅克比系数矩阵的具体形式,一般由薄层近似假设给出,此时粘性通量的隐式部分线性化处理如下

$$\begin{aligned} \bar{F}_v^{n+1} &= \bar{F}_v^n + \bar{A}_v \Delta Q \\ \bar{G}_v^{n+1} &= \bar{G}_v^n + \bar{B}_v \Delta Q \end{aligned} \quad (5)$$

式中 \bar{A}_v 、 \bar{B}_v 的具体公式见文献[9]。将式(4)和(5)代入式(2)就可以得到 N-S 方程全隐式时间离散的一般形式

$$V \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\partial(A \Delta Q - \bar{A}_v \Delta Q)}{\partial \xi} + \frac{\partial(B \Delta Q - \bar{B}_v \Delta Q)}{\partial \eta} = -\text{RHS} \quad (6)$$

式中 RHS 为右端残值项,由空间离散得到。

在 LU-SGS 算法中,式(6)等号左侧的无粘通量雅克比系数矩阵先按照特征值的符号进行正负分裂,再根据迎风原则进行前后向差分,而粘性通量雅克比系数矩阵采用中心差分,可得到

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i,j}^n &= \frac{\Delta t/V}{D} (A_{i-1}^+ \Delta Q_{i-1}^n + B_{j-1}^+ \Delta Q_{j-1}^n \\ &\quad - A_{i+1}^- \Delta Q_{i+1}^n - B_{j+1}^- \Delta Q_{j+1}^n - \text{RHS}) \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$D = I + \frac{\Delta t}{V} (|A| + |B| + 2A_v + 2B_v)$$

$$A^+ = \frac{1}{2} (A + |A| + 2A_v)$$

$$A^- = \frac{1}{2} (A - |A| - 2A_v)$$

值得注意的是,将 \bar{A}_v 中的导数项换成相应的物理量即可得到 A_v 。

在原始的 LU-SGS 算法中,为了避免矩阵求逆运算及保证上下三角矩阵具有对角占优性能, $|A|$ 、 $|B|$ 及 A_v 、 B_v 都用相应的矩阵谱半径进行近似,此时矩阵 D 为标量对角矩阵

$$|A| = |U| + c \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$A_v = \frac{\mu}{Re \cdot V \cdot \rho} (S_x^2 + S_y^2) \cdot \max\left(\frac{4}{3}, \frac{\gamma}{pr}\right) \quad (8)$$

上式中 $|U|$ 为 x 方向的逆变速度, S_x 与 S_y 分别为单元在 x 与 y 方向的投影面积, 式(8)的给出可参见文献[9]。而在矩阵 DP-LUR 方法及 BLU-SGS 方法中, 为了获得更好的收敛性, $|A|$ 、 $|B|$ 及 A_v 、 B_v 均采用精确成立的矩阵形式, 此时需要进行矩阵求逆运算, 计算量及内存消耗量都有所增加。为叙述简便, 本文将上述系数矩阵的两种不同取法分别称为对角近似法与精确矩阵法。

在原始 LU-SGS 算法中, 对式(7)进行近似 LU 分解, 再使用一次对称 Gauss-Seidal 迭代, 得到如下表达式

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i,j}^* &= \frac{\Delta t/V}{D} (A_{i-1}^+ \Delta Q_{i-1}^* + B_{j-1}^+ \Delta Q_{j-1}^* - \text{RHS}) \\ \Delta Q_{i,j}^n &= \Delta Q_{i,j}^* - \frac{\Delta t/V}{D} (A_{i+1}^- \Delta Q_{i+1}^n + B_{j+1}^- \Delta Q_{j+1}^n) \end{aligned} \quad (9)$$

为了提高 LU-SGS 算法的收敛速度, DP-LUR 方法对式(7)的求解引入了一种含内迭代步的方法, 其表达式有

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i,j}^0 &= -\frac{\Delta t/V}{D} \text{RHS} \\ \Delta Q_{i,j}^k &= \frac{\Delta t/V}{D} (A_{i-1}^+ \Delta Q_{i-1}^{k-1} + B_{j-1}^+ \Delta Q_{j-1}^{k-1} \\ &\quad - A_{i+1}^- \Delta Q_{i+1}^{k-1} - B_{j+1}^- \Delta Q_{j+1}^{k-1} - \text{RHS}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta Q_{i,j}^n = \Delta Q_{i,j}^{k_{\max}}$$

上式中 k_{\max} 代表内迭代的总步数, 其取值的大小对算法的稳定性和收敛性有影响, 且存在一个最优解, 使计算效率最高。为了简便, 将此迭代求解方式定义为内迭代方式 1。BLU-SGS 方法给出了另一种内迭代方式

前向扫描:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i,j}^* &= \frac{\Delta t/V}{D} (A_{i-1}^+ \Delta Q_{i-1}^* + B_{j-1}^+ \Delta Q_{j-1}^* \\ &\quad - A_{i+1}^- \Delta Q_{i+1}^{k-1} - B_{j+1}^- \Delta Q_{j+1}^{k-1} - \text{RHS}) \end{aligned} \quad (11)$$

后向扫描:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i,j}^k &= \frac{\Delta t/V}{D} (A_{i-1}^+ \Delta Q_{i-1}^* + B_{j-1}^+ \Delta Q_{j-1}^* \\ &\quad - A_{i+1}^- \Delta Q_{i+1}^k - B_{j+1}^- \Delta Q_{j+1}^k - \text{RHS}) \end{aligned} \quad (12)$$

流场更新:

$$\Delta Q_{i,j}^n = \Delta Q_{i,j}^{k_{\max}} \quad (13)$$

式(11)中初始值 $\Delta Q^0 = 0$ 。本文将此迭代求解方式定义为内迭代方式 2。分析可知, 当 $k_{\max} = 1$ 时, 内迭代方式 2 与原始 LU-SGS 求解方式是等价的。

3 数值验证与分析

3.1 二维圆柱绕流

本文选取了文献[11]中二维圆柱算例为验证算例, 以验证本文所用计算程序的正确性。文献提供了 CFD 及 DSMC 方法的模拟结果。计算条件如下: 圆柱半径为 0.1524m, 氩气, $\gamma = 4/3$, $pr = 2/3$, 来流温度 200K, 马赫数 25, 壁面温度 1500K, 来流密度 $1.408 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$, 相应的克努森数 Kn 为 0.002; 粘性系数公式对应 DSMC 的变径硬球模型的幂次式, 其幂次指数 $\omega = 0.734$, 参考温度为 1000K。壁面边界条件为无滑移边界条件。网格量为 201×271 (0° 至 180° 范围), 周向网格均匀分布, 壁面法向第一层网格高度取为 $5.0 \times 10^{-5} \text{ m}$, 相应的网格雷诺数为 2.98。

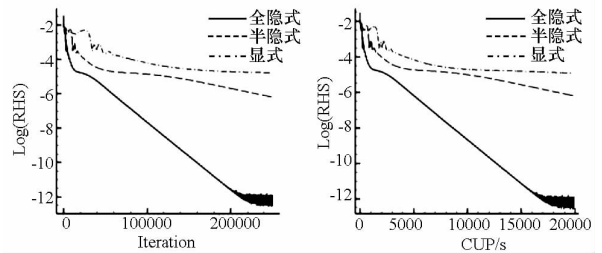


图 1 收敛过程的对比

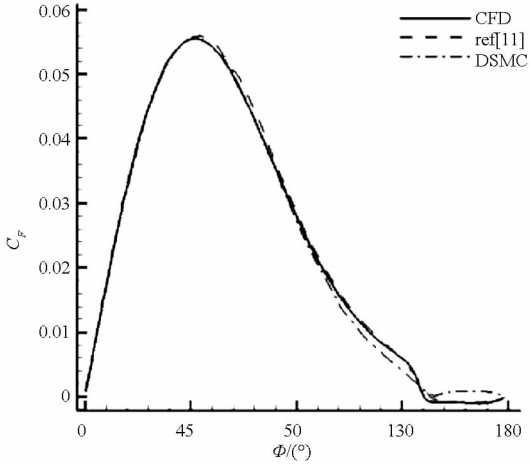
Fig. 1 Comparison of convergence history

图 1 给出了应用显式方法, 原始的 LU-SGS 方法半隐式及全隐式残值随迭代步数与 CPU 时间的变化历程。在此算例中, 显式方法的最大 CFL 数只可取到 0.3, 半隐式 LU-SGS 方法的最大 CFL 数可取到 1.0, 而全隐式方法最大 CFL 数能取到无穷大。可以看出, 粘性项的隐式处理能够保证计算的稳定性, 有效地提高 CFL 数, 从而使 CPU 时间消耗大大减少, 计算效率显著提高。

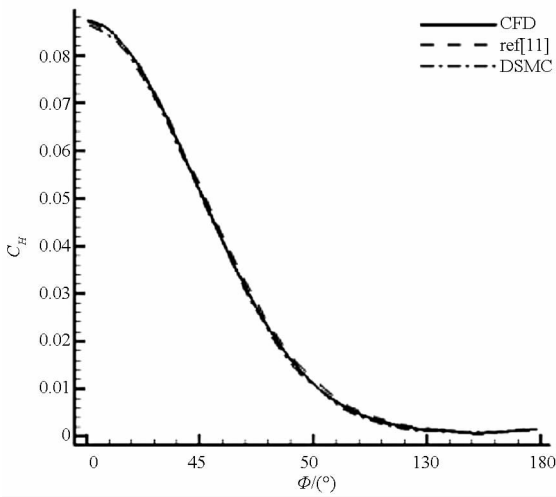
图 2 给出了本文应用无滑移边界条件所得到的摩擦系数及热流系数分布与文献无滑移边界条件及 DSMC 所得结果的对比。虽然计算采用了三种不同的时间推进方法, 但是最终的收敛结果差别非常小, 故未分开列出结果。该算例的来流条件按流域的划分处于连续流区。由图可知: 文献的无滑移边界条件及 DSMC 的结果都非常接近; 本文应用无滑移边界条件所得的表面摩擦系数及热流系数分布与文献的结果都吻合得较好。

3.2 钝锥绕流

几何外形: 球头半径 0.1m, 锥身半锥角 10° , 总长 1m。来流条件: 空气, 来流温度 200K, 马赫数 15, 密度 $1.0 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ 。计算条件: 攻角



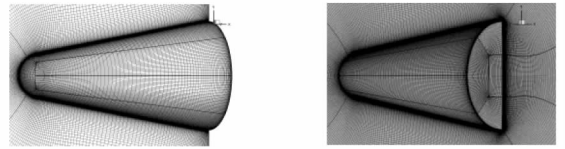
(a) 摩擦系数



(b) 热流系数

图2 摩擦系数及热流系数的比较

Fig. 2 Comparison of friction coefficient and heating coefficient

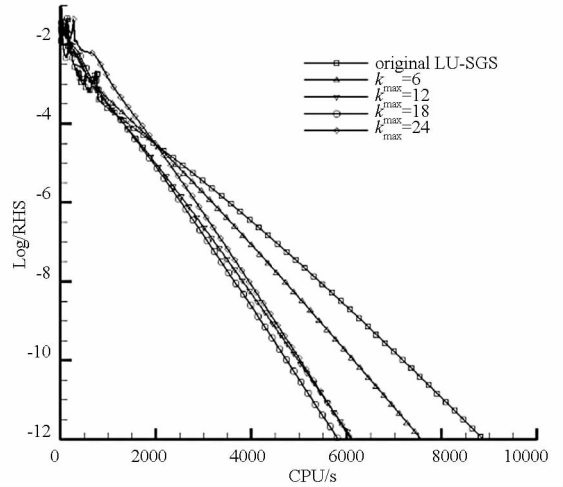


(a) 前体 (b) 含尾流

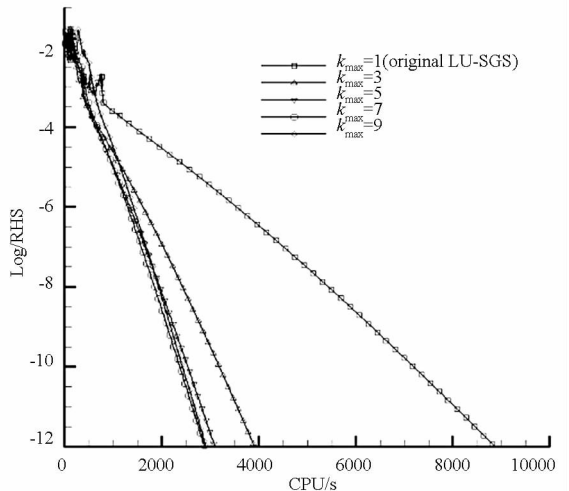
图3 钝锥对称面及表面网格

Fig. 3 The grid of blunt cone on surface and symmetry plane

效地提高计算效率,迭代方式2的收敛速度明显快于迭代方式1,迭代方式2的最优结果残值达到 10^{-12} 量级所需的CPU时间为迭代方式1的50%左右。从图中结果还可以得到与文献[7]相一致的结论:在取得较大值之后, k_{max} 的继续增大并不能使算法的收敛性得到明显的改善。考虑到取较大的值影响计算初期的稳定性,在实际应用中 k_{max} 一般选取较小的值。



(a) 内迭代方式1



(b) 内迭代方式2

图4 k_{max} 的变化对收敛速度的影响

Fig. 4 Effect of k_{max} on the convergence rate

0° ,壁面温度 500K,钝锥前体及含尾流的网格如图3所示,壁面第一层网格高度 1.0×10^{-5} m,因流场对称只考虑外形的一半,网格量112.5万(前体)及175万(含尾流),采用分区并行计算每个分区网格量12.5万。值得注意的是,与二维情况相比,在三维问题中精确矩阵法的计算效率相对角近似法而言有所降低。这是因为精确矩阵法涉及矩阵乘法及求逆运算,计算量随矩阵的增大增加很多。

为了考察内迭代的总步数对收敛性的影响,本文以钝锥前体为例进行计算分析。图4为雅克比系数矩阵采用对角近似法两种不同内迭代方式的收敛历程随 k_{max} 的变化。图中所有计算均从自由来流开始考虑,CFL数由小变化到最大值,最大值均取为 10^4 。由图可知,随着 k_{max} 的增大,两种内迭代方式的收敛速度先升高后降低,即存在一个最优解,使计算效率最高;内迭代步的引入能有

为了比较雅克比系数矩阵的两种不同计算方

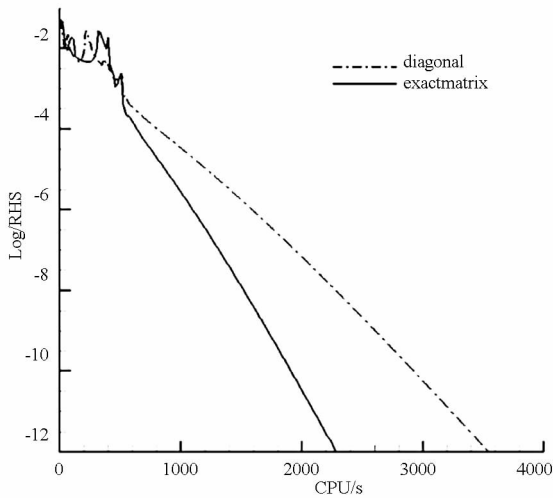


图 5 钝锥(前体)收敛过程的比较

Fig. 5 Comparison of convergence history for blunt cone forebody

式的收敛速度及考察流场结构对算法收敛性的影响,选取了钝锥前体流场与含尾流的流场进行了对比计算。因内迭代方式 1 的结果与内迭代方式 2 的类似,考虑到内迭代方式 2 收敛较快,故此仅给出了内迭代方式 2 ($k_{\max} = 4$) 的计算结果。由图 5 可知,对于钝体前体流场的计算,采用精确的雅克比系数矩阵可有效地提高计算效率,比较残值达到 10^{-12} 量级所需的 CPU 时间,精确矩阵法的时间消耗仅为对角近似法的 64.4% 左右,即精确矩阵法的计算速度为对角近似法的 1.55 倍左右。

图 6 所示为钝锥含尾流的计算中残值及阻力系数的收敛历程。精确矩阵法受稳定性的影响,其最大的 CFL 数只能取到 20,而对角近似法不受影响,最大 CFL 数仍可取到 10^4 。从图中结果可以看出,精确矩阵法的收敛速度不及对角近似法。图 7 给出了钝锥含尾流的对称面温度场及流线分布,从图中的流场结构可以看到,尾流部分存在大的流动分离,这使建立在薄层近似基础上的精确矩阵法对粘性,项的计算产生很大的误差,从而影响了稳定性,导致收敛性变差。

3.3 空天飞机算例

针对文献[12]所述的空天飞机外形,本文给出了马赫数 20,攻角 15° ,飞行高度 70km 的情况下得到的模拟结果。本文计算中将原始模型放大了 10 倍,此时空天飞机的长度 $L = 2.9\text{m}$ 。计算方法如前所述,按层流状态考虑,壁温 1000K,粘性系数由 Surtherland 公式得到。图 8 所示为空天飞机的表面及空间网格,网格总量为 480 万左右,共 36 个分区,采用并行计算,壁面第一层网格高度 $1.0 \times 10^{-5}\text{m}$ 。

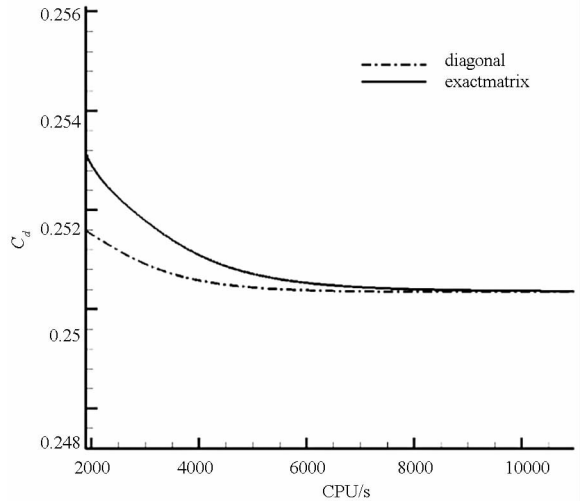
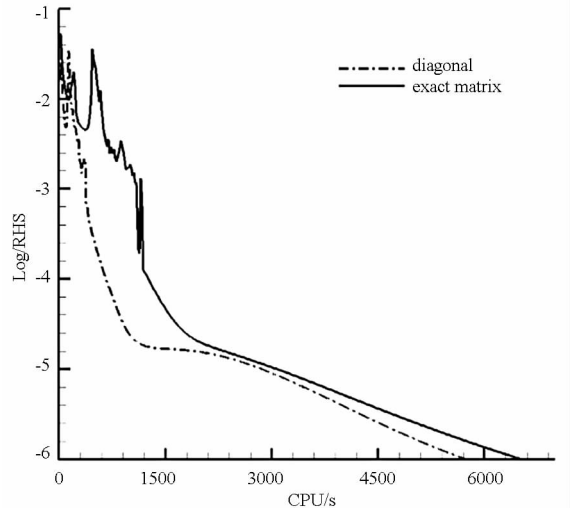


图 6 钝锥(含尾流)残值与阻力系数的收敛历程

Fig. 6 Convergence histories of friction drag for blunt cone with wake

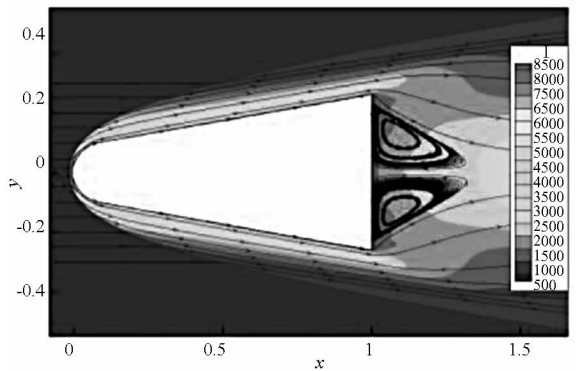


图 7 钝锥(含尾流)对称面温度场及流线分布

Fig. 7 Temperature field and streamlines of blunt cone with wake

图 9 所示为空天飞机的温度场及流线分布。因计算外形复杂且攻角较大,因此不可避免会出现激波附面层干扰及流动分离等现象。图 10 给出了空天飞机轴向力的收敛历程。图中所有计算均从自由来流开始考虑,CFL 数由小变化到最大

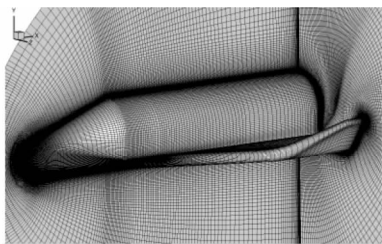


图8 空天飞机计算网格

Fig. 8 The computational grid for the space shuttle

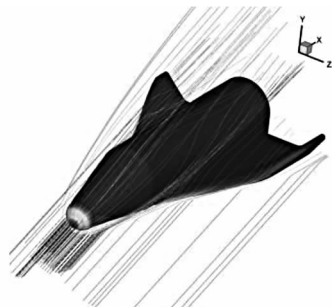


图9 空天飞机的温度场与流线分布

Fig. 9 Temperature field and streamlines of the space shuttle

值,同时 k_{\max} 的取值都为较优的结果。对于对角近似法,最大 CFL 均为 10^4 ,内迭代方式 1 的 k_{\max} 取为 12,内迭代方式 2 的 k_{\max} 给定为 4;对于精确矩阵法,内迭代方式 1 的最大 CFL 数为 15,相应的 k_{\max} 为 6,内迭代方式 2 的最大 CFL 数为 20,相应的 k_{\max} 为 4。由图可知,对角近似法的收敛速度快于精确矩阵法及原始 LU-SGS 方法,其中内迭代方式 2 的收敛速度最快,约为原始 LU-SGS 方法的 1.8 倍。对角近似法的内存消耗比精确矩阵法少 30% 以上。因此,从计算效率及内存消耗考虑,对角近似法与内迭代方式 2 的组合适合于工程上复杂外形的计算。

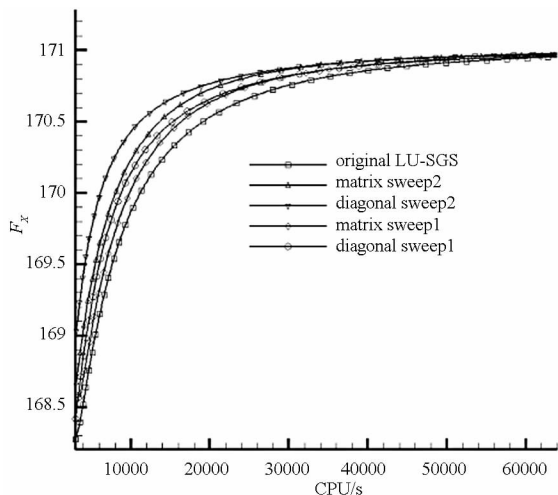


图10 空天飞机轴向力的收敛历程

Fig. 10 Axial force convergence histories for the space shuttle

4 结论

(1) 针对高空高超声速粘性流动的数值模拟,粘性项的隐式处理对提高算法的稳定性及计算效率非常重要。

(2) 内迭代步的引入能有效地提高 LU-SGS 方法的收敛速度,内迭代方式 2 的收敛性优于内迭代方式 1。

(3) 对于不含流动分离的计算,精确的雅克比系数矩阵方法收敛速度明显快于对角近似方法;对于含大的流动分离的计算,精确的雅克比系数矩阵方法受稳定性的限制收敛速度不及对角近似方法。

参考文献 (References)

- [1] Jameson A, Schmidt W, et al. Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta Time-stepping schemes[J]. AIAA Paper 81-1259, 1981.
 - [2] Swanson R C, Turkel E, et al. Convergence acceleration of Runge-Kutta schemes for solving the Navier-Stokes equations [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 224:365-388.
 - [3] Cagnone J S, Kurt S, et al. Implicit multigrid schemes for challenging aerodynamic simulations on block-structured grids [J]. Computers & Fluids, 2011, 44:314-327.
 - [4] Jameson A, Yoon S. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations [J]. AIAA Journal, 1987, 25(7):929-935.
 - [5] Blanco M, Zing D W. A fast solver for the Euler equations on unstructured grids using a newton GMRES method[J]. AIAA Paper 97-0331, Jan. 1997.
 - [6] Meister A. Comparison of different krylov subspace methods embedded in an implicit finite volume scheme for the computation of viscous and inviscid flow fields on unstructured grids[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 140(2):311-345.
 - [7] Michael J W, Graham V C, et al. Data-parallel lower-upper relaxation method for the navier-stokes equations [J]. AIAA Journal, 1996, 34(7):1371-1377.
 - [8] Chen R F, Wang Z J. Fast, Block lower-upper symmetric gauss-seidel scheme for arbitrary grids [J]. AIAA Journal, 2000, 38(12):2238-2245.
 - [9] Blazek J. Computational fluid dynamics: principles and applications[M]. Elsevier Ltd, 2005.
 - [10] Kim K H, Kim C. Accurate efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows part I: spatial discretization [J]. Journal of Computational Physics, 2005:208.
 - [11] Lofthouse A J, Scalabrin L C, et al. Velocity slip and temperature jump in hypersonic aerothermodynamics [R]. AIAA 2007-208, 2007.
 - [12] 李素循. 典型外形高超声速流动特性[M]. 北京:国防工业出版社, 2007.
- LI Suxun. Hypersonic flow characteristics around typical configuration[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007. (in Chinese)