

基于 Powell 法的 GNSS 卫星轨道拟合算法*

沙海, 仝海波, 张国柱, 欧钢

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要:针对 GNSS 导航信号模拟源中卫星轨道计算的高精度实时性要求, 提出了一种基于 Powell 最优理论的卫星轨道拟合算法。该算法将有限点卫星位置拟合问题转化为无约束极小值问题, 使用最优化理论求解卫星轨道模型参数, 从而可以方便计算任意时刻的卫星速度、加速度等高阶量。算例结果表明计算卫星星历时, 位置误差小于 1×10^{-4} m, 速度误差小于 1×10^{-6} m/s, 计算量为广播星历直接计算的 1/3; 计算精密星历时, 位置精度在 2cm 左右, 拟合精度较拉格朗日插值算法提高了大约 1 倍。通过实际应用, 充分验证了算法的有效性。

关键词:卫星轨道; 插值拟合; Powell 法; GNSS 信号源; 北斗系统; 卫星导航

中图分类号: P228.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2013)03-0153-05

A fitting method for satellite orbit in GNSS based on powell optimization theory

SHA Hai, TONG Haibo, ZHANG Guozhu, OU Gang

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Aiming at the high precise and real-time computation of the satellite orbit in GNSS (Global Navigation Satellite System) simulator with satellite orbit, a fitting method based on Powell optimization theory is proposed. The method converts the fitting method for satellite position to the non-restraint least method, and the parameters of the satellite orbit model were obtained by the optimization theory, with which it is easy to compute the velocity, acceleration and so on. The computation examples show that, in the case of fitting the satellite ephemeris, the new method speeds up the computation three times faster than the direct ephemeris calculation, and the position error is less than 1×10^{-4} m and the velocity error 1×10^{-6} m/s. In the case of fitting the GPS precise ephemeris, the new method increases precisely two times efficiency than that of the ephemeris Lagrange interpolation.

Key words: satellite orbit; interpolation fitting; powell; GNSS simulator; COMPASS; satellite navigation

随着 GPS、GLONASS、GALILEO 和北斗卫星导航系统的不断发展和广泛应用, GNSS 信号模拟源的研发成为人们研究的热点。GNSS 信号模拟源的主要作用是产生多个系统的导航信号, 为了保证信号的精度和连续性, 需要实时高精度地计算伪距及其变化率, 而在伪距及其各阶变化量的计算过程中, 卫星轨道的计算精度是必须考虑的关键因素。同时传统卫星轨道的计算量较大, 在全导航系统仿真模式运行时, GNSS 信号源需要实时计算 100 颗左右的卫星轨道数据, 这对 GNSS 信号源硬件的实时计算能力提出了很大挑战。因此, 为了减少卫星轨道的计算量, 同时保证卫星轨道的高精度, 有必要开展 GNSS 卫星轨道插值拟合算法的研究。此外, GNSS 精密数据处理、多模接收机等实际应用中, 对实时、高效的星历

插值拟合算法亦有很大的需求。

目前常用的卫星轨道插值拟合算法包括拉格朗日、牛顿、尼维勒、三角函数插值方法以及切比雪夫、勒让德多项式拟合方法等。文献[1-4]通过比较拉格朗日、尼维勒、三角函数插值算法计算 GPS 精密星历精度得出, 在相同阶数条件下, 三角函数插值法无论内插还是外推, 其精度都高于其他算法。文献[5]进一步分析了切比雪夫多项式、勒让德多项式拟合算法与拉格朗日、尼维勒插值算法的精度, 得出在相同阶次条件下, 算法精度相当。由此可见, 三角函数插值算法是目前插值卫星轨道精度最高的算法。但是三角函数插值算法为了保证高精度, 在计算卫星轨道时, 需要频繁地更新插值系数, 编程实现十分不便。此外在计算卫星速度、加速度等高阶量时, 通常采用计算较

* 收稿日期: 2012-06-28

基金项目: 中国卫星导航学术年会青年优秀论文资助项目(CSNC2011-QY-06)

作者简介: 沙海(1984—), 男, 河南新乡人, 博士研究生, E-mail: sandhai@163.com;

欧钢(通信作者), 男, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: Ongang1969@163.com

小距离前后点位置的差商方法,其计算精度和前后点间距的选取准则,可供参考的文献很少。

本文在建立卫星轨道模型的基础上,提出了一种基于 Powell 最优化理论的高精度 GNSS 卫星轨道拟合方法。算例结果表明,该算法能够在离散点卫星位置已知条件下,高精度、快速拟合出任意时刻的卫星位置、速度和加速度。

1 卫星轨道模型

GPS 卫星在地心地固系 (ECEF) 和地心惯性系 (ECI) 下的位置,存在明显的周期性,并且位置坐标的曲线特性与三角函数近似^[3],因此使用三角函数表示卫星轨道最接近真实轨道的特性,这也是三角函数插值算法精度较高的内在原因。三角函数插值算法的数学表达式为^[3-4]

$$y(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \dots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (1)$$

式中, ω 为固定特征频率,由 IERS 组织负责发布, $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ 为待求系数, n 为三角函数的阶数,即最高频率的倍数, t 为卫星位置对应的历元时刻。

若使用式(1)列出的三角函数多项式形式拟合卫星位置时,可将该拟合过程看作如下数学问题:

已知卫星轨道坐标 y 与历元时刻 t 的函数关系为 $y(t)$, 求解未知参数 $x \in X$, 使得 $\|y - y(x)\| \leq \varepsilon$, ε 为允许最小误差。其矩阵表达形式如下:

$$\begin{aligned} Y &= [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_k]^T \\ X &= [\omega \quad a_0 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]^T \\ H &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cos(\omega t_1) & \dots & \sin(n\omega t_1) \\ 0 & 1 & \cos(\omega t_2) & \dots & \sin(n\omega t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cos(\omega t_k) & \dots & \sin(n\omega t_k) \end{bmatrix} \\ \|E\| &= Y - HX = \sum_{i=1}^k e_i^2 \leq \varepsilon \quad (2) \end{aligned}$$

当 ω 作为未知量时, $y(t)$ 为非线性函数,上述问题无法采用线性最小二乘法解决。若采用非线性最小二乘法(如高斯-牛顿法、莱文-马夸特法等)对其进行求解时,则对初始值的精度要求较高,当初始值偏差较大时,非线性最小二乘法很难收敛到最优解^[6],并且由于拟合阶数不定,函数的偏导数也无法求得。从数学建模角度分析,该问题本质上为一个无约束极小值问题,且目标函数不可微,全局的精确解计算比较复杂且难以得到,对于此类问题,采用最优化理论中的

Powell 算法可以取得很好的计算效果。

2 基于 Powell 法的拟合算法

2.1 Powell 算法简介

Powell 算法是 Powell 于 1964 年提出的一种求解无约束最优化问题的直接法,该方法对初值要求不高、收敛速度也非常快而且只用到了函数值,不必求解函数导数,其计算步骤为^[6]:

Step 1 选取初始数据。选取初始点 x_0 , n 个线性无关的初始搜索方向 d_0, d_1, \dots, d_{n-1} , 给定允许误差 $\varepsilon > 0$, 令 $k = 0$ 。

Step 2 进行基本搜索。令 $y_0 = x_k$, 依次沿 d_0, d_1, \dots, d_{n-1} 进行一维搜索。对一切 $j = 1, 2, \dots, n$, 记

$$f(y_{j-1} + \lambda_{j-1} d_{j-1}) = \min_{\lambda} f(y_{j-1} + \lambda d_{j-1}) \quad (3)$$

$$y_j = y_{j-1} + \lambda_{j-1} d_{j-1} \quad (4)$$

Step 3 检查是否满足终止准则。取加速方向 $d_n = y_n - y_0$, 若 $\|d_n\| < \varepsilon$, 迭代终止, 得 y_n 为问题的近似最优解; 否则, 转 Step 4。

Step 4 确定搜索方向。按式(5)确定 $m (0 \leq m \leq n-1)$, 若式(6)也成立, 转 Step 5; 否则, 转 Step 6。

$$f(y_m) - f(y_{m+1}) = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{f(y_j) - f(y_{j+1})\} \quad (5)$$

$$f(y_0) - 2f(y_n) + f(2y_n - y_0) < 2[f(y_m) - f(y_{m+1})] \quad (6)$$

Step 5 调整搜索方向。从点 y_n 出发沿方向 d_n 进行一维搜索, 求出 λ_n , 使得

$$f(y_n + \lambda_n d_n) = \min_{\lambda} f(y_n + \lambda d_n) \quad (7)$$

令 $x_{k+1} = y_n + \lambda_n d_n$, 再令 $d_j := d_j + 1, j = m, m+1, \dots, n-1, k := k+1$, 返回 Step 2。

Step 6 不调整搜索方向。令 $x_{k+1} = y_n, k := k+1$, 返回 Step 2。

Powell 算法的计算过程略显复杂,但目前已有很多组织免费提供了这些常用科学计算方法的函数库,例如 GNU 的 GSL 库, Blitz++ 以及 MTL, 这些科学计算库以 Lib 版本形式将 Powell 算法封装为单独函数,操作简单,且代码优化后计算效率很高。本文使用 GNU 的 GSL 函数库,该函数库可在 GNU 网站(<http://www.gnu.org>) 下载得到。

2.2 拟合算法

采用 Powell 算法拟合卫星轨道时,卫星位置坐标已知,需要分别求解 X, Y, Z 轴的拟合系数,式(1)可重写为

$$\begin{cases} x = \sum_{k=0}^{n_x} a_k^x \cos(k\omega_x t) + b_k^x \sin(k\omega_x t) \\ y = \sum_{k=0}^{n_y} a_k^y \cos(k\omega_y t) + b_k^y \sin(k\omega_y t) \\ z = \sum_{k=0}^{n_z} a_k^z \cos(k\omega_z t) + b_k^z \sin(k\omega_z t) \end{cases} \quad (8)$$

其中 n_x, n_y, n_z 为拟合阶数,也作为未知数使用 Powell 算法求解。

为了方便计算,对历元时刻 t 进行化简

$$\begin{cases} t_i = (i-1)t_s \\ t'_i = t_i/t_s + 1 \\ t''_i = \frac{t'_i - \bar{t}'}{\sigma}, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (9)$$

其中, t_s 为卫星轨道数据的采样间隔, N 为数据个数, \bar{t}' 为 t' 的均值, σ 为 t' 的方差, t'' 为最终化简的时间变量。化简后, dt 与 dt'' 的关系为

$$dt'' = \frac{dt}{t_s \sigma} \quad (10)$$

进一步对式(8)求导,得到卫星速度和加速度的表达式,如式(11)、(12)所示。

GNSS 信号源中卫星轨道数据包括卫星星历参数、卫星精密星历、其他轨道数据等,结合基于 Powell 法的轨道拟合算法,完整的卫星位置和速度计算流程如图 1 所示,分为以下步骤:

Step 1 根据载入的卫星轨道数据,计算固定时间间隔的卫星位置。卫星轨道数据可以包括 GPS、GLONASS 精密星历, GPS、北斗系统、Galileo 广播星历,以及轨道积分数据等;

Step 2 设置拟合允许最小误差 ε , 采用 Powell 法分别计算 x, y, z 轴的拟合系数及阶数;

Step 3 计算当前时刻的卫星位置、速度和加速度,输出至伪距及其变化率计算等模块;

Step 4 判断是否到达拟合区间终点,若不是,返回 Step3, 否则结束。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t_s \sigma^k=1} \sum_{k=1}^{n_x} -k\omega_x a_k^x \sin(k\omega_x t) + k\omega_x b_k^x \cos(k\omega_x t) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t_s \sigma^k=1} \sum_{k=1}^{n_y} -k\omega_y a_k^y \sin(k\omega_y t) + k\omega_y b_k^y \cos(k\omega_y t) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{t_s \sigma^k=1} \sum_{k=1}^{n_z} -k\omega_z a_k^z \sin(k\omega_z t) + k\omega_z b_k^z \cos(k\omega_z t) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t_s \sigma^k=1} \sum_{k=1}^{n_x} -k^2 \omega_x^2 a_k^x \cos(k\omega_x t) - k^2 \omega_x^2 b_k^x \sin(k\omega_x t) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t_s \sigma^k=1} \sum_{k=1}^{n_y} -k^2 \omega_y^2 a_k^y \cos(k\omega_y t) - k^2 \omega_y^2 b_k^y \sin(k\omega_y t) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{t_s \sigma^k=1} \sum_{k=1}^{n_z} -k^2 \omega_z^2 a_k^z \cos(k\omega_z t) - k^2 \omega_z^2 b_k^z \sin(k\omega_z t) \end{cases} \quad (12)$$

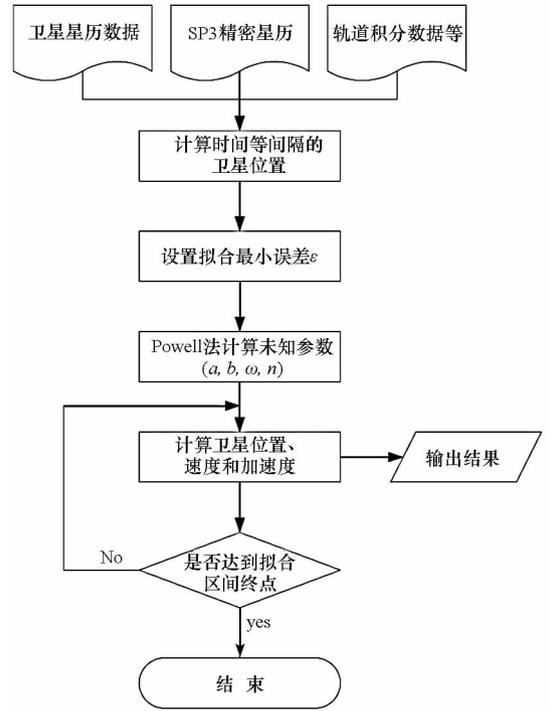


图 1 星轨道计算流程图

Fig. 1 The flow chart: calculating the satellite orbit

3 算例分析与实例应用

为了评估基于 Powell 法卫星轨道拟合算法的性能,本文主要从拟合精度和实时性两个方面进行分析。首先,拟合精度是指拟合后计算的卫星位置和速度与星历计算的误差大小,卫星位置和速度的拟合精度直接影响 GNSS 信号源生成伪距的精度,而伪距的跳变会造成导航信号的失真,接收设备无法持续锁定信号;其次,实时性是指拟合算法与星历计算相比,计算量减少多少,计算平均耗时多少,最后通过实例应用,充分验证该算法的可靠性。

3.1 拟合精度分析

3.1.1 卫星星历拟合

GPS 卫星星历的时效范围为 2h,其计算误差随着时间的推移而不断增大。实验时,从 IGS 网站 <ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/gps/data/daily> 下载得到 2011 年 1 月 23 日 0 时 PRN 编号为 2 的 GPS 卫星的广播星历数据,将其计算出来的 10ms 间

隔的卫星位置和速度作为真值,分别抽取 2h 段内 300s 间隔的卫星位置数据进行拟合计算,通过拟合算法得到 10ms 间隔的卫星位置和速度进行比较,结果如图 2、图 3 所示。

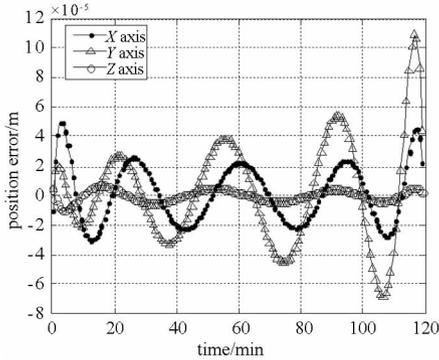


图 2 位置误差

Fig. 2 The position error

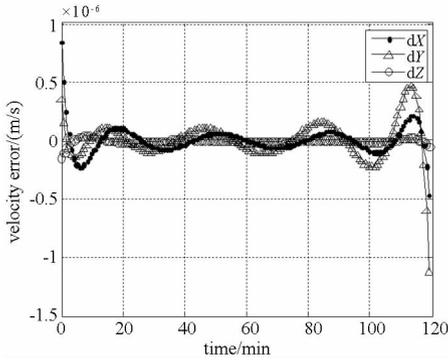


图 3 速度误差

Fig. 3 The velocity error

其中 X 轴、Y 轴的拟合阶数为 4 阶,Z 轴的拟合阶数为 3 阶。由 10ms 间隔采样比较结果可以看出,拟合算法对 2h 广播星历拟合时,位置精度达到了 1×10^{-4} m 量级,速度精度达到了 1×10^{-6} m/s 量级。

3.1.2 精密星历拟合

对精密星历拟合时,采用文献[2,7]的实验方法。首先从 IGS 网站下载 2002 年 1 月 1 日 GPS 编号为 1 的卫星的 24h 快速精密星历 igr11472.sp3,该精密星历时间间隔为 5min。然后将该快速精密星历按照 15min 间隔抽取为原始精密星历。最后对抽取后的原始精密星历采用拟合算法,求出时间间隔 5min 的卫星轨道数据,与抽取前的快速精密星历进行比较。文献[2]通过遍历阶数,得出拉格朗日和切比雪夫插值算法精度相当,且阶数为 11 阶时精度最高,所以实验采用 11 阶拉格朗日插值算法进行对比,比较结果如表 1、图 4 所示。

表 1 与拉格朗日插值法比较(单位:cm)

Tab. 1 Comparison of the Lagrange interpolating(Unit:cm)

	11 阶 Lagrange		Powell 法	
	STD	Max	STD	Max
X 轴	0.31	3.9	0.16	2.21
Y 轴	0.10	0.44	0.06	0.34
Z 轴	0.13	0.43	0.06	0.34
位置	0.31	4.18	0.16	2.27

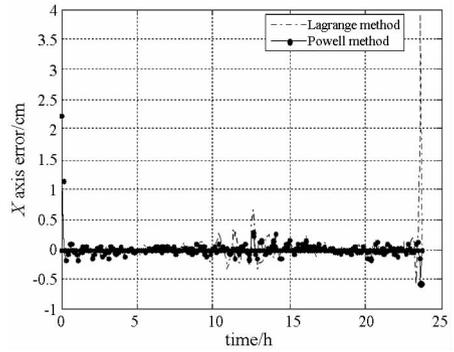


图 4 X 轴误差

Fig. 4 The X axis error

其中 X 轴的拟合阶数为 10 阶,Y 轴、Z 轴的拟合阶数为 9 阶,X 轴误差范围在 3cm 以内,Y 轴、Z 轴的误差范围均在 1cm 以内,位置精度在 2cm 左右,相比拉格朗日插值算法,精度提高了大约 1 倍,与文献[2]给出的三角函数插值算法精度相当。

3.2 实时性分析

为了便于比较计算耗时,使用 C 语言分别实现卫星星历算法和基于 Powell 的拟合算法,通过比较两种算法计算 2h 时间间隔为 10ms 的卫星位置、速度和加速度的时间,得出 Powell 拟合算法的实时性,比较结果如图 5 所示。图中计算量的定义为不同阶数拟合算法与星历直接计算所耗时间之比。

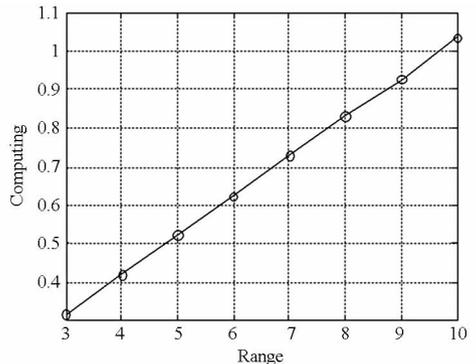


图 5 拟合阶数与计算量关系示意图

Fig. 5 The relation of the range and the compute

可以看出拟合阶数为 3 阶时,计算量为星历

直接计算的 $1/3$,但随着阶数的增加,拟合算法的计算量也逐步增大,拟合阶数为 10 阶时与星历直接计算量基本一致,但拟合时间区间范围可增大至 24h。

3.3 实例应用

实际应用中,GNSS 信号源产生的导航信号,最终由监测接收机捕获跟踪。如果信号源产生的伪距及其变化率不连续,或出现抖动,会造成接收机失锁、假捕等异常现象。因此,通过实际观察监测接收机的工作状态,可以验证拟合算法的可靠性。

实验时,由 GNSS 信号源产生导航信号,分别经过低噪声放大器和衰减器后,通过射频线缆接入监测接收机,设备连接如图 6 所示。GNSS 信号源使用 Powell 拟合算法分别拟合两颗 GEO 卫星间隔 15min 的 72h 观测数据。监测接收机每秒记录伪距等测量值,伪距变化如图 7 所示。测试结果显示,监测接收机 72h 工作状态稳定,没有出现失锁点,伪距变化连续。

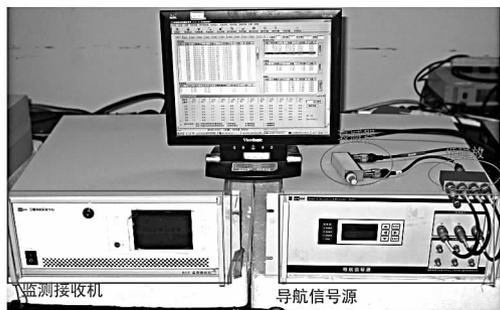


图 6 实际设备连接图

Fig. 6 The equipment link

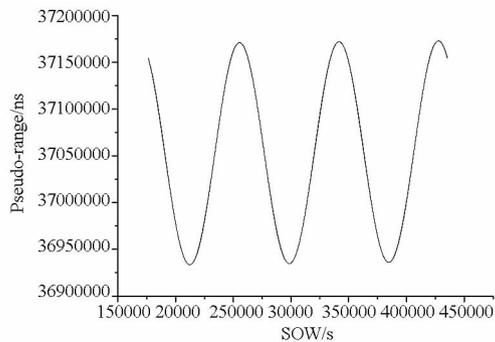


图 7 监测接收机测量伪距

Fig. 7 The pseudo-range in receiver

4 结论

(1) 从拟合卫星星历来看,拟合 2h 卫星星历,拟合阶数不大于 4 阶,卫星位置精度可达到 1×10^{-4} m 量级,速度精度达到 1×10^{-6} m/s 量级,并且计算量为星历直接计算的 $1/3$ 。

(2) 从拟合精密星历来看,拟合 24h 精密星

历,拟合阶数不大于 10 阶, X 轴误差范围在 3cm 以内, Y 轴、 Z 轴的误差范围均在 1cm 以内,位置精度在 2cm 左右,拟合精度较拉格朗日插值算法提高了约 1 倍。

(3) 基于 Powell 的拟合算法拟合 2h 卫星广播星历时,计算量较星历直接计算减少了 $2/3$ 。但拟合 24h 卫星星历时,相同精度条件下,拟合阶数为 10 阶,其计算量与星历计算量相当。下一步将重点研究降低该算法计算量的方法。

参考文献 (References)

- [1] Feng Y M, Zheng Y, Bai Z D. Representing GPS orbit and corrections efficiently for precise wide area positioning [C]// Proceedings of the 17th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Texas, USA, September 26 - 29, 2004.
- [2] Feng Y M, Zheng Y. Efficient interpolations to GPS orbits for precise wide area applications [J]. GPS Solution, 2005, 9: 273 - 282.
- [3] Schenewerk M. A brief review of basic GPS orbit interpolation strategies [J]. GPS Solution, 2003, 6: 265 - 267.
- [4] 张守建, 李建成, 邢乐林, 等. 两种 IGS 精密星历插值方法的比较分析 [J]. 大地测量与地球动力学, 2007, 27(2): 80 - 83. ZHANG Shoujian, LI Jiancheng, XING Lelin, et al. Comparative analysis on two methods for IGS precise ephemeris interpolation [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2007, 27(2): 80 - 83. (in Chinese)
- [5] 李明峰, 江国焰, 张凯. IGS 精密星历内插与拟合法精度的比较 [J]. 大地测量与地球动力学, 2008, 28(2): 77 - 80. LI Mingfeng, JIANG Guoyan, ZHANG Kai. Comparison of interpolating and fitting IGS precise ephemeris [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2008, 28(2): 77 - 80. (in Chinese)
- [6] 谢政. 非线性最优化理论与方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 188 - 194. XIE Zheng. Nonlinear optimization theory and methods [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010: 188 - 194. (in Chinese)
- [7] Horemuz M, Andersson J V. Polynomial interpolation of GPS satellite coordinates [J]. GPS Solution, 2006, 10: 67 - 72.
- [8] 洪樱, 欧吉坤, 彭碧波. GPS 卫星精密星历和钟差三种内插方法的比较 [J]. 武汉大学学报信息科学版, 2006, 31(6): 515 - 518. HONG Ying, OU Jikun, PENG Bibo. Three interpolation methods for precise ephemeris and clock offset of GPS satellite [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2006, 31(6): 515 - 518. (in Chinese)
- [9] 魏二虎, 柴华. GPS 精密星历插值方法的比较研究 [J]. 全球定位系统, 2006, 31(5): 13 - 15. WEI Erhu, CHAI Hua. The comparison research on GPS precise ephemeris interpolation methods [J]. GNSS World of China, 2006, 31(5): 13 - 15. (in Chinese)
- [10] Korvenoja P, Piche R. Efficient satellite orbit approximation [C]// Proceedings of The 13th International Technical Meeting of The Institute of Navigation, Salt Lake City, USA, Sept 19 - 22, 2000.