

# $\ell_1$ -analysis 稀疏重构在阵列信号恢复及波达角估计中的应用\*

林 波, 张增辉, 朱炬波  
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

**摘 要:**通过适当的空域稀疏化构造了可对阵列接收信号进行冗余稀疏表示的阵列流形矩阵,建立了相应的 $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型,用于恢复阵列接收信号,重点证明了该流形矩阵是满足 $\ell_1$ -analysis 稀疏重构条件的紧框架,从理论上保证了将 $\ell_1$ -analysis 稀疏重构用于阵列接收信号恢复及波达角估计问题的合理性,并推导出信号恢复误差的理论上限。利用在微波暗室环境中采集的实测数据,结合 MUSIC 算法进行实验验证,结果表明基于 $\ell_1$ -analysis 稀疏重构的信号恢复对提高低信噪比环境下的波达角估计性能是有效的。

**关键词:** $\ell_1$ -analysis 稀疏重构;冗余稀疏表示;阵列信号处理;波达角估计;低信噪比

**中图分类号:**TN911 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2013)05-0152-06

## Reconstruction of array output and direction-of-arrival estimation via $\ell_1$ -analysis sparse recovery

LIN Bo, ZHANG Zenghui, ZHU Jubo

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The array manifold matrix was constructed as a redundant dictionary in which the array receiving signals were sparse through the appropriate spatial sparse division, and the corresponding  $\ell_1$ -analysis sparse recovery model was established to reconstruct the array output data. The core of this paper is to prove that the manifold matrix is a tight frame and can satisfy the condition which guarantees the accurate recovery of signals through  $\ell_1$ -analysis sparse recovery so that it is reasonable enough to use  $\ell_1$ -analysis sparseness optimization to reconstruct the array output data. The upper bound of reconstruction error was given. The effectiveness of this presented method for improving the performance of DOA estimation with low SNR was verified by the experiments using the actual measurement data received in microwave darkroom through MUSIC algorithm.

**Key words:**  $\ell_1$ -analysis sparse recovery; redundant sparse representation; array signal processing; DOA estimation; low Signal-to-Noise Ratio

目前具有超分辨性能的空间谱估计算法主要是以多重信号分类 (MUSIC) 算法为代表的子空间分解类算法。该类算法通常都需要对阵列接收数据的协方差矩阵进行特征值分解或奇异值分解,利用信号子空间和噪声子空间的正交特性来获得目标波达方向的估计。然而,当信噪比很低时,信号子空间和噪声子空间的估计会出现较大误差,从而导致该类方法的波达角估计性能降低。

近年来,压缩感知理论的建立和逐步发展为解决波达角估计问题提供了新的思路和处理方法。在标准压缩感知 (Standard Compressive Sensing, SCS) 理论<sup>[1-5]</sup>及多测量矢量 (Multiple Measurement Vectors, MMV) 模型<sup>[6-8]</sup>中,保证精确(无噪)或准确(含噪)恢复信号矢量  $\mathbf{x}$  常用的约束等距性质 (RIP)<sup>[1]</sup>,要求投影测量矩阵的任意  $K$  列线性无关或近似正交, $K$  是待恢复信号  $\mathbf{x}$  的非零元个数。由于具有确定形式的阵列流形矩

阵各列之间具有很强的相关性,直接重构空域稀疏化的入射信号矢量在波达角估计中并不满足目前压缩感知在数学理论上所需要的可稀疏重构条件。

目前已有一些文献<sup>[9-12]</sup>将稀疏表示和稀疏重构的思想引入窄带信号的波达角估计中,但这一模型的直接应用并没有真正得到理论上的支持,实验结果也证实了存在的问题。为达到较高估计分辨率,SCS 稀疏重构以及 MMV 稀疏重构算法用于重构空域稀疏的入射信号以得到波达角估计时需要较多的阵元数。利用二阶锥规划和  $\ell_1$ -SVD 稀疏重构算法恢复联合稀疏信号矩阵<sup>[13]</sup>的方法虽然能够在较少的阵元数下达到高分辨估计性能,但是该方法的模型正则化参数选取是非自适应的,且估计性能对该参数选择十分敏感<sup>[13]</sup>。鉴于传统空间谱估计算法的超分辨性能,最近,国外学者<sup>[14-15]</sup>试图结合 MUSIC 算法和

\* 收稿日期:2013-02-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60901071,61002024,61102169,61201332);国防科学技术大学科研计划项目(JC11-02-03)

作者简介:林波(1985—),女,福建闽侯人,博士研究生,E-mail:linbo@nudt.edu.cn;

朱炬波(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:ju\_bo\_zhu@yahoo.com.cn

MMV 稀疏重构方法的优点,期望克服稀疏重构方法分辨率低而 MUSIC 算法需要多快拍的缺点。然而,这种结合并不完全,对比传统的 MUSIC 方法,该方法仅在减少快拍数据上有优势,估计性能没有提高,反而有所下降。所以,通过稀疏重构空域入射信号来实现波达角估计这一方法并不能突破经典的 MUSIC 等超分辨空间谱估计算法的波达角估计性能,其根本原因在于实际问题与 SCS 稀疏重构的理论模型不匹配,可重构条件无法满足。

本文引入可以恢复在冗余字典下具有稀疏表示的信号的冗余压缩感知理论<sup>[16]</sup>,利用  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构方法,为其在阵列接收信号恢复及其波达角估计中的应用提供充分的理论保证。

### 1 窄带阵列接收信号模型

设  $K$  个相互独立的窄带信号从远场入射到由  $M$  个增益为 1 的各向同性阵元所组成的阵列上,且阵元之间无互耦合通道不一致的干扰,阵列接收到的噪声序列是加性高斯噪声。 $t$  时刻第  $m$  个阵元的接收信号为

$$y_m(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_{mk}) + n_m(t) \quad (1)$$

其中,  $s_k(t)$  是第  $k$  个辐射源目标发射的窄带信号在  $t$  时刻的时域波形,  $\tau_{mk}$  是第  $k$  个信号到达第  $m$  个阵元相对于参考阵元的时间延迟,  $n_m(t)$  是第  $m$  个阵元在  $t$  时刻接收到的加性高斯白噪声,有

$$s_k(t - \tau_{mk}) = s_k(t) e^{-j2\pi f_0 \tau_{mk}} \quad (2)$$

$t$  时刻的阵列接收信号写成矩阵形式为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t)]^T$  是阵列接收信号矢量;  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$  表示阵列接收数据中所包含的噪声信号矢量;  $\mathbf{A}$  是入射信号在天线阵列上的阵列流形,且

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1(\tau_{\cdot 1}) \mathbf{a}_2(\tau_{\cdot 2}) \dots \mathbf{a}_K(\tau_{\cdot K})] \quad (4)$$

其中,导向矢量  $\mathbf{a}_k(\tau_{\cdot k})$  为

$$\mathbf{a}_k(\tau_{\cdot k}) = [e^{-j2\pi f_0 \tau_{1k}}, \dots, e^{-j2\pi f_0 \tau_{Mk}}]^T \quad (5)$$

式中,  $f_0 = c/\lambda$  为窄带信号的载频,  $c$  为信号在介质中的传播速度,  $\lambda$  为信号波长。

选定某一阵元作为参考阵元并设为坐标原点建立直角坐标系,阵元在该坐标系下的位置表示为  $\mathbf{p}_m = [x_m, y_m, z_m]^T$ 。各信号方向余弦矢量为  $\mathbf{u}_k = [\sin\theta_k \cos\phi_k, \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k]^T$ , 其中  $\theta_k$  是第  $k$  个辐射源目标发射信号的入射方向与阵列坐标系  $z$  轴的夹角,且  $0 \leq \theta_k \leq \pi$ ,  $\phi_k$  是信号的入射方向与阵列坐标系  $x$  轴的夹角,且  $0 \leq \phi_k \leq 2\pi$ 。时间

延迟为

$$\tau_{mk} = -\mathbf{p}_m^T \mathbf{u}_k / c \quad (6)$$

## 2 阵列接收信号恢复的 $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型

### 2.1 冗余字典稀疏表示与 $\ell_1$ -analysis 模型

为理论分析方便,以均匀线阵为例介绍基于冗余字典稀疏表示和  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构的窄带阵列接收信号恢复的基本原理。

设相邻两阵元之间的距离  $d = \lambda/2$ 。以左边第一个阵元为参考阵元,则信号在阵元间传播的时间延迟为

$$\tau_{mk} = \frac{(m-1)d}{c} \sin\varphi_k, \varphi_k \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (7)$$

令  $p_k = \sin\varphi_k, p_k \in [-1, 1]$ , 则流形矩阵  $\mathbf{A}$  可用其第  $m$  行、第  $k$  列的元素表示为

$$\mathbf{A}_{m,k} = e^{-j\pi(m-1)p_k} \quad (8)$$

已知信号可能的空域有限分布范围为  $-\frac{\pi}{2}$

$\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 辐射源点目标仅分布空域中某些角度方向上,具有很强的空域稀疏性。不妨对空域进行适当的角度划分以得到一个完备的角度集合  $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^N (N \gg K)$ , 使辐射源目标的实际波达角集合  $\Psi = \{\varphi_k\}_{k=1}^K \subset \Gamma$ 。由于辐射源的实际位置是待估的,不能保证  $\Psi \subset \Gamma$  成立。为了使阵列接收信号恢复和波达角估计具有更高的准确性,这一问题可以通过一般模型误差的压缩感知理论<sup>[17-18]</sup> 加以解决,为分析方便,本文暂不考虑  $\Psi \subset \Gamma$  不成立的情况。将原信号矢量  $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{C}^{K \times 1}$  通过补零扩展为稀疏信号矢量  $\bar{\mathbf{s}}(t) \in \mathbf{C}^{N \times 1}$ , 当  $\gamma_n = \varphi_k$  时取  $\bar{s}_n(t) = s_k(t)$ , 而在角度余集  $\Gamma \setminus \Psi \triangleq \Omega$  的指标集  $\#\Omega = \{i | \varphi_i \in \Gamma \text{ 且 } \varphi_i \notin \Psi\}$  对应的位置取 0 值,则阵列接收数据  $\mathbf{y} \triangleq \mathbf{y}(t)$  在冗余字典  $\bar{\mathbf{A}}$  下的超完备稀疏表示形式为

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{n} \quad (9)$$

稀疏表示系数矢量为  $\bar{\mathbf{s}} \triangleq \bar{\mathbf{s}}(t)$ , 噪声矢量为  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ , 冗余表示字典  $\bar{\mathbf{A}}$  为流形矩阵  $\mathbf{A}$  的相应扩展,其元素表示为

$$\bar{\mathbf{A}}_{m,n} = e^{-j\pi(m-1)p_n} \quad (10)$$

Candès 提出  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型<sup>[16]</sup>:

$$\hat{\mathbf{g}} = \underset{\mathbf{g}}{\text{argmin}} \|\mathbf{D}^* \mathbf{g}\|_1 \text{ s. t. } \|\Phi \mathbf{g} - \mathbf{f}\|_2 \leq \varepsilon \quad (11)$$

式(11)中的观测信号  $\mathbf{f}$  表示为线性测量形式:

$$\mathbf{f} = \Phi \mathbf{g} + \mathbf{n}, \mathbf{g} = \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (12)$$

其中,  $R \times M$  维矩阵  $\Phi$  为投影观测矩阵,  $M \times N$  维

矩阵  $\mathbf{D}$  是待恢复信号矢量  $\mathbf{g}$  的冗余稀疏表示字典,  $\mathbf{x}$  是相应的稀疏表示系数,  $\mathbf{n}$  是观测噪声矢量。这里  $R \leq M \leq N$ 。

将阵列接收信号(9) 改写成与观测模型(12) 一致的形式, 即

$$\mathbf{y} = \mathbf{I}\mathbf{g} + \mathbf{n}, \mathbf{g} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}} \quad (13)$$

阵列接收信号恢复的  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型则为

$$\hat{\mathbf{g}} = \underset{\mathbf{g}}{\operatorname{argmin}} \|\bar{\mathbf{A}}^* \mathbf{g}\|_1 \text{ s. t. } \|\mathbf{I}\mathbf{g} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon, \quad \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{g}} = \hat{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{s}}, \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{I}$  是  $M \times M$  维单位矩阵, 对应投影矩阵  $\Phi$ 。利用恢复的阵列接收数据  $\hat{\mathbf{y}}$  通过超分辨率波达角估计算法可得到低信噪比情况下信号波达角估计。

## 2.2 原理与误差分析

下面利用框架理论<sup>[19-20]</sup> 的相关知识对模型(14) 的可重构性能进行详细的理论分析, 给出恢复误差的定量结论。

在观测矩阵满足一定条件的情况下, 若稀疏表示字典是紧框架, 则可保证通过求解  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构问题可实现信号的准确恢复。下面证明模型(14) 中的  $\bar{\mathbf{A}}$  是一个紧框架。

**定义 1** 设  $\mathbf{H}^M$  是  $M$  维 Hilbert 空间, 序列  $\{\mathbf{h}_n\}_{n=1}^N \subset \mathbf{H}^M$ 。若存在常数  $A > 0$ , 使得对任意的  $f \in \mathbf{H}^M$  均有

$$\sum_{n=1}^N |[f, \mathbf{h}_n]|^2 = A \|f\|_2^2 \quad (15)$$

则称  $\{\mathbf{h}_n\}_{n=1}^N$  是 Hilbert 空间  $\mathbf{H}^M$  的一个  $A$ -紧框架。若  $A = 1$ , 则为 Parseval 框架。通过一个适当的尺度变换,  $A$ -紧框架和 Parseval 框架之间可以相互转换。Parseval 框架具有 Parseval 等式和完全重构性质<sup>[19]</sup>。

若  $\{\mathbf{h}_n\}_{n=1}^N$  为框架, 则  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_N]$  也称为框架, 称  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  为  $\{\mathbf{h}_n\}_{n=1}^N$  的框架算子, 且有

**性质 1** 序列  $\{\mathbf{h}_n\}_{n=1}^N$  是 Hilbert 空间  $\mathbf{H}^M$  的一个 Parseval 框架, 当且仅当  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{I}$ 。

**引理 1**<sup>[20]</sup> 若序列  $\{\varphi_k\}_{k \in I}$  是 Hilbert 空间  $\mathbf{H}$  中以  $S$  为框架算子的框架,  $T$  是  $\mathbf{H}$  中可逆算子, 则  $\{T\varphi_k\}_{k \in I}$  是  $\mathbf{H}$  中以  $TST^*$  为框架算子的框架。

为描述的方便和严谨性, 将式(10) 对应的流形矩阵记为

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_N] \quad (16)$$

其中, 导向矢量为

$$\bar{\mathbf{a}}_n = [e^{-j\pi(1-1)p_n}, e^{-j\pi(2-1)p_n}, \dots, e^{-j\pi(M-1)p_n}]^T. \quad (17)$$

以下定理表明在某种空间划分方式下阵列流

形  $\bar{\mathbf{A}}$  是一个  $N$ -紧框架。

**定理 1** 取  $p_n = 2(n-1)/N-1, n = 1, 2, \dots, N$ , 将正弦角度空间  $[-1, 1)$  进行等距划分, 则对应的流形矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  是  $\mathbf{C}^M$  的一个  $N$ -紧框架, 矩阵  $\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}/\sqrt{N}$  为  $\mathbf{C}^M$  的一个 Parseval 框架。

**证明** 令  $p_n = 2(n-1)/N-1, n = 1, 2, \dots, N$ , 构造矩阵  $\mathbf{B}$ , 使其第  $m$  行、第  $n$  列的元素为  $\mathbf{B}_{m,n} = e^{-j\pi(m-1)p_n}, m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N$ , 则有

$$\bar{\mathbf{A}}_{m,n} = \begin{cases} \mathbf{B}_{m,n}, & m = 1, 3, 5, \dots \\ -\mathbf{B}_{m,n}, & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (18)$$

亦即

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{E}\mathbf{B} \quad (19)$$

其中,  $\mathbf{E} = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1, \dots)$  且  $\mathbf{E}\mathbf{E}^* = \mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{I}$ 。根据引理 1 和性质 1, 只需证明  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/\sqrt{N}$  为空间  $\mathbf{C}^M$  中的一个 Parseval 框架。

记  $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_N], \omega_m = e^{-j2\pi\frac{m-1}{N}}$ , 则有

$$\tilde{\mathbf{b}}_n = \frac{1}{\sqrt{N}}[\omega_1^{n-1}, \omega_2^{n-1}, \dots, \omega_M^{n-1}]^T \quad (20)$$

令  $\{e_i\}_{i=1}^M$  是空间  $\mathbf{C}^M$  的一组标准正交基, 于是  $\forall f \in \mathbf{C}^M$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |[f, \tilde{\mathbf{b}}_n]|^2 &= \sum_{n=1}^N [f, \tilde{\mathbf{b}}_n][\tilde{\mathbf{b}}_n, f] \\ &= \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{l=1}^M [f, e_l] e_l, \tilde{\mathbf{b}}_n \right] \left[ \sum_{i=1}^M [\tilde{\mathbf{b}}_n, e_i] e_i, f \right] \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^M [f, e_l][e_i, f][\tilde{\mathbf{b}}_n, e_i][e_l, \tilde{\mathbf{b}}_n] \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^M f_l \bar{f}_i [\tilde{\mathbf{b}}_n, e_i][e_l, \tilde{\mathbf{b}}_n] \end{aligned} \quad (21)$$

上式中  $f_i$  表示复数矢量  $f$  的第  $i$  个元素,  $\bar{f}_i$  则为  $f_i$  的共轭。由

$$[\tilde{\mathbf{b}}_n, e_i][e_l, \tilde{\mathbf{b}}_n] = \frac{1}{N} e^{\frac{j2\pi(l-i)}{N}} \quad (22)$$

有

$$\sum_{n=1}^N |[f, \tilde{\mathbf{b}}_n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^M f_l \bar{f}_i e^{\frac{j2\pi(n-1)(l-i)}{N}} \quad (23)$$

当  $l \neq i$  时, 有

$$\sum_{n=1}^N e^{\frac{j2\pi(n-1)(l-i)}{N}} = 0 \quad (24)$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |[f, \tilde{\mathbf{b}}_n]|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M f_l \bar{f}_l e^{\frac{j2\pi(n-1)(l-l)}{N}} \\ &= \sum_{l=1}^M f_l \bar{f}_l = \|f\|_2^2 \end{aligned} \quad (25)$$

由 Parseval 等式性质可知,  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/\sqrt{N}$  为  $\mathbf{C}^M$  中的 Parseval 框架, 由引理 1 及式(19) 可知  $\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}/\sqrt{N}$  为  $\mathbf{C}^M$  中一个 Parseval 框架, 进而阵列流形  $\bar{\mathbf{A}}$

是  $\mathbf{C}^M$  的  $N$ -紧框架。

下面分析利用  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型恢复阵列接收信号的合理性及恢复性能。首先介绍 D-RIP 性质,当观测矩阵具有该性质且冗余表示字典为一紧框架时,通过求解  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构问题可准确恢复信号。

**定义 2** (D-RIP)<sup>[16]</sup> 设  $M \times N (M < N)$  维矩阵  $\mathbf{D}$  为冗余稀疏表示字典,设

$$V_K = \{v | v \in \mathbf{C}^N \text{ and } v \text{ is } K\text{-sparse}\},$$

如果对最小常数  $\delta_K$  有以下不等式

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{D}v\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{D}v\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{D}v\|_2^2 \quad (26)$$

对任意  $v \in V_K$  均成立,则称  $R \times M (R \leq M)$  维矩阵  $\Phi$  具有 RIP 常数为  $\delta_K$  的 D-RIP 性质。

在  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型(14)中投影观测矩阵  $\mathbf{I}$  满足 D-RIP 性质(26),且对任意  $1 \leq s \leq M$  有  $\delta_s = 0$ 。由定理 1 和文献[16]的定理 1.4,阵列接收信号的恢复性能具有以下结论:

**定理 2** 由阵列接收信号的  $\ell_1$ -analysis 稀疏恢复模型(14)得到的重构信号  $\hat{y}$  的恢复误差满足

$$\|\hat{y} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}\|_2 \leq C_1\varepsilon + C_2 \frac{\|\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}} - (\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}})_K\|_1}{\sqrt{K}} \quad (27)$$

其中  $C_1 = 2/K_1, C_2 = 2K_2/K_1$ ,

$$K_1 = \sqrt{2c_1(1 - c_1/2 - \rho(1 + c_2))} - \sqrt{\rho},$$

$$K_2 = \sqrt{2c_1(\rho/c_2 + \rho)} - \sqrt{\rho} \quad (28)$$

且  $c_1, c_2, > 0, \rho = K/T, T$  的选取满足  $T \leq M - K$  且  $T \in \mathbf{N}^+, K_1 > 0$ 。

由定理 2 可知,阵列接收信号的恢复信号受到阵列实际接收的噪声和辐射源目标发射信号以及阵列流形的综合影响,后二者的影响集中体现在  $\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}$  衰减速度上。当无噪且  $\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}_K$ -稀疏时,则可完全重构。此外,这三个因素同时也包含了阵元数  $M$ 、信源数  $K$  和空间稀疏化指标  $N$  的信息,因此,阵列接收信号的恢复也受到这些参数的影响,这与实际应用和压缩感知理论相一致。下面给出一个比式(27)稍紧的恢复误差理论上限。

### 2.3 标准化 $\ell_1$ -analysis 稀疏重构

考虑如下的标准化线性测量

$$\tilde{y} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (29)$$

和标准化  $\ell_1$ -analysis 模型

$$\hat{\tilde{g}} = \underset{g}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{g}\|_1 \text{ s. t. } \|\mathbf{I}\tilde{g} - \tilde{y}\|_2 \leq \varepsilon / \sqrt{N}$$

$$\hat{y} = \hat{g} \quad (30)$$

其中  $\tilde{y} = y/\sqrt{N}, \tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}/\sqrt{N}, \tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/\sqrt{N}, \tilde{g} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}$ 。式(29)与原始模型(13)具有相同的信噪比。在式(30)中,  $\tilde{\mathbf{A}}$  是 Parseval 框架,由定理 2 有,利用式(30)恢复信号  $\tilde{y}$  的稀疏重构误差为

$$\|\hat{\tilde{y}} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}}\|_2 \leq C_1\varepsilon/\sqrt{N} + C_2 \frac{\|\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}} - (\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}})_K\|_1}{(N\sqrt{K})} \quad (31)$$

阵元数  $M$  是大于 1 的正整数,因此,标准化模型(30)整体上减少了恢复误差的上界。设  $x$  是真实信号,  $\hat{x}$  为其估计,根据信噪比定义

$$SNR = 20 \cdot \log_{10} \frac{\|x\|_2}{\|x - \hat{x}\|_2} \quad (32)$$

由式(14)和式(30)恢复得到的阵列接收信号的信噪比分别为

$$SNR_{org} = 20 \cdot \log_{10} \frac{\|\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}\|_2}{\|\hat{y} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}\|_2} \quad (33)$$

$$SNR_{sta} = 20 \cdot \log_{10} \frac{\|\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}\|_2}{\sqrt{N}\|\hat{\tilde{y}} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}}\|_2} \quad (34)$$

由恢复误差(27)和(32),有

$$SNR_{org} \geq 20 \cdot \log_{10} \frac{\|\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}\|_2}{C_1\varepsilon + C_2 \frac{\|\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}} - (\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}})_K\|_1}{\sqrt{K}}} \quad (35)$$

$$SNR_{sta} \geq 20 \cdot \log_{10} \frac{\|\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}\|_2}{C_1\varepsilon + C_2 \frac{\|\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}} - (\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}})_K\|_1}{\sqrt{NK}}} \quad (36)$$

用相同求解算法求解同一场景下的问题(14)和(30)得到的信号恢复效果相当,由式(36)可得  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型(14)的恢复误差上界为

$$\|\hat{y} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}\|_2 \leq C_1\varepsilon + C_2 \frac{\|\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}} - (\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}})_K\|_1}{\sqrt{N}\sqrt{K}} \quad (37)$$

其中各参数的定义同定理 2 一致。易知,该误差上界比原理误差上界(27)更加紧致。

### 3 实测实验与结果分析

利用在微波暗室环境中采集的阵列接收信号实测数据,结合经典的 MUSIC 超分辨估计算法,分析验证本文提出的阵列接收信号恢复算法及其在波达角估计中的应用。

采集实测数据的天线阵列为 8 通道的 S/C 波段均匀线阵,两相邻阵元间距为 0.07m,各阵元增

益相同,经过幅相校正后的接收通道间幅度不一致性,不大于 1dB(r. m. s),相位不一致性不大于 10°(r. m. s)。数据采集为中频采样,采样频率为 500Msps,采集数据长度为 524288,采集设备状态稳定。通过信号模拟器设置入射的两个窄带信号频率为  $f_0 = 2.143\text{GHz}$ ,入射角度分别为  $-5.4^\circ$  和  $6.2^\circ$ 。各次试验中均调节信号模拟器参数,使信噪比尽可能高,因此在以下实验中假设实测数据无噪,后期通过仿真在实测数据上输入一定信噪比的高斯白噪声。实验在实际采集的全部接收数据中取连续的 100 个快拍数据,用于稀疏恢复并估计入射信号的波达角。取  $p_n = 2(n - 1)/N - 1, n = 1, 2, \dots, N, N = 361$ ,将正弦角度空间  $[-1, 1)$  进行等距划分,按式 (10) 得到阵列流形  $\bar{A}$  作为  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型中的冗余字典。所用重构算法为 Becker 等所提出并编写的 TFOCS 算法<sup>[21]</sup>。MUSIC 算法的空间搜索步长为 0.1°。

图 1 表明在不同的输入信噪比下,标准化  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型得到的阵列接收恢复信号在抑制噪声提高信噪比方面具有一定优势。由图示可知,在输入信噪比很低时,用  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构方法恢复信号的信噪比在 0dB 以上。

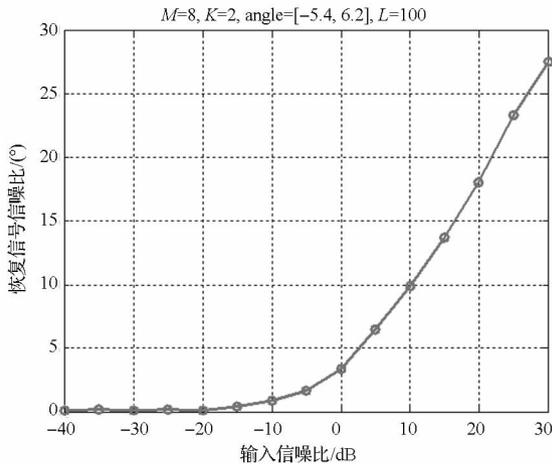


图 1 标准化  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构的恢复信噪比

Fig. 1 The SNR of the array output recovered by  $\ell_1$ -analysis sparse optimization

图 2 对应的实验基于经典的 MUSIC 空间谱估计算法,利用阵列接收恢复信号对入射的窄带信号进行波达角估计,并与未经信号恢复就直接利用 MUSIC 方法估计的效果进行比较。由图 2 可知,在输入信噪比较高(如 0dB 和 20dB)时,本文方法与 MUSIC 方法的波达角估计效果相当,然而,在实际输入信噪比为  $-15\text{dB}$  和  $-35\text{dB}$  时,直接利用 MUSIC 算法无法准确估计波达角,而本文方法具有一定的估计效果。

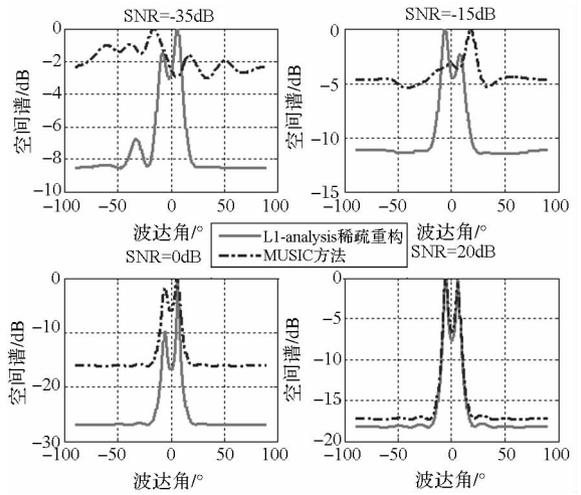


图 2  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构方法与 MUSIC 算法的空间谱图对比

Fig. 2 comparison of the spatial spectrum between  $\ell_1$ -analysis sparse optimization and the MUSIC algorithm

以上实验表明,本文方法对于处理低信噪比情况的波达角估计问题具有一定优势。由图 1 可知,当实际输入信噪比小于  $-10\text{dB}$  时,恢复信号的信噪比总可以达到 0dB,然而将图 2 中的前三幅空间谱图进行对比可知,在输入信噪比为  $-35\text{dB}$  和  $-15\text{dB}$  时,利用恢复信号由 MUSIC 算法并不能达到由输入信噪比为 0dB 时的实际接收数据经过 MUSIC 算法得到的估计效果,主要原因在于接收信号的恢复误差受到入射信号的影响,不再是高斯白的,且并不满足经典的 MUSIC 方法所要求的噪声与信号不相关这一要求,如图 3 中阵列接收信号恢复误差分析图所示。

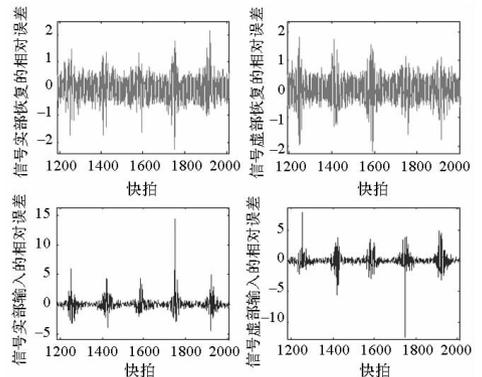


图 3 阵列接收信号恢复的相对误差  
Fig. 3 Portion of the recovery errors and the receiving errors of the array output

实验中 8 通道均匀阵列共取用连续 6000 个采样时刻的快拍数据,并利用标准化  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型对其进行信号恢复,图 3 给出了第 1 个阵元接收信号恢复的相对误差与实际输入噪声引起的相对误差的部分细节图,由图示结果可

知信号恢复误差不是高斯白的。

## 4 结论

本文构造了可对阵列接收信号进行冗余稀疏表示的阵列流形矩阵,将冗余压缩感知理论和  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构用于阵列接收信号恢复及波达角估计问题。重点给出了两个主要定理:定理 1 提供了阵列流形矩阵为紧框架的理论保证,确保了可重构条件能够完全满足,定理 2 则给出了阵列接收信号恢复性能和恢复误差的理论上限。其次,提出标准化  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构模型,从而给出了一个更紧的恢复误差理论上限。最后,利用微波暗室环境下的实测数据对本文提出的方法与理论分析进行了验证,实验结果表明,在低信噪比情况下,用由  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构得到的阵列接收信号通过经典的 MUSIC 算法可提高波达角估计的性能。故本文方法可用于改进传统的超分辨率波达角估计算法在低信噪比情况下的估计性能。

本文方法在阵列接收信号恢复和波达角估计中展现出了一定的优势,然而,在今后的工作中还有许多问题需要进一步深入研究:首先,本文通过标准化方法给出了比原始模型更紧的恢复误差理论上限,但并未能证实该上限是否是最紧的,因此证明其紧性或者给出更紧的上限并推导其与场景参数的关系,对于阵列设计等实际应用具有十分重要的意义;其次,理论分析与实验验证均表明由  $\ell_1$ -analysis 稀疏恢复后的噪声与入射信号本身有关且不满足高斯白,因此研究适用于复杂噪声和干扰环境下的波达角估计算法是十分有必要的工作;最后是优化算法上,目前可以实现  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构且效果优良的算法较少,本文所用算法为 Becker 等所提供的 TFOCS 算法,目前该算法在处理  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构问题时一次仅能恢复一个矢量信号,因此研究可以同时恢复多个矢量信号(即信号矩阵)的  $\ell_1$ -analysis 稀疏重构算法对于处理需要利用多个快拍数据的波达角估计或其他类似问题具有重大意义。

## 参考文献 (References)

[1] Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51 (12): 4203 - 4215.

[2] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete Fourier information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (2): 489 - 509.

[3] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (4): 1289 - 1306.

[4] Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (12): 5406 - 5425.

[5] Candès E J, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Comm. Pure Appl. Math., 2006, 59 (8): 1207 - 1223.

[6] Chen J, Huo X. Theoretical results on sparse representations of multiple measurement vectors [J]. IEEE Trans. Signal Process., 2006, 54 (12): 4634 - 4643.

[7] Cotter S F, Rao B D, Engan K, et al. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors [J]. IEEE Trans. Signal Process., 2005, 53 (7): 2477 - 2488.

[8] Mishali M, Eldar Y C. Reduce and boost: Recovering arbitrary sets of jointly sparse vectors [J]. IEEE Trans. Signal Process., 2008, 56 (10): 4692 - 4702.

[9] Cevher V, Duarte M F, Baraniuk R G. Distributed target localization via spatial sparsity [C]//Proceedings of European Signal Proc. Conference. (EUSIPCO), Lausanne, Switzerland, 2008.

[10] Cerber V, Gurbuz A C, Mcclellan J H, et al. Compressive wireless arrays for bearing estimation [C]//Proceedings of IEEE Int. Conference. Acoustics, Speech, and Signal Proc. (ICASSP), Las Vegas, NV, 2008: 2497 - 2500.

[11] Shaw T J, Valley G C. Angle of arrival detection using compressive sensing [C]//Proceedings of European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Aalborg, Denmark, 2010: 1424 - 1428.

[12] Duarte M F. Localization and bearing estimation via structured sparsity models [C]//Proceedings of IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP), 2012: 333 - 336.

[13] Malioutov D, Cetin M, Willsky A. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays [J]. IEEE Trans. Signal Process., 2005, 53 (8): 3010 - 3022.

[14] Kim J M, Lee O K, Ye J C. Compressive MUSIC: Revisiting the link between compressive sensing and array signal processing [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2012, 58 (1): 278 - 301.

[15] Lee K, Bresler Y, Junge M. Subspace methods for joint sparse recovery [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2012, 58 (6): 3616 - 3641.

[16] Candès E J, Eldar Y C, Needell D, et al. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries [J]. Appl. Comput. Harmon. Anal., 2011, 31: 59 - 73.

[17] Herman M A, Strohmer T. General deviants: An analysis of perturbations in compressed sensing [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4 (2): 342 - 349.

[18] Chi Y J, Scharf L L, Pezeshki A, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing [J]. IEEE Trans. Signal Process., 2011, 59 (5): 2182 - 2195.

[19] Christensen O. Frames and bases: an introductory course [M]. Applied and Numerical Harmonic Analysis, ISBN: 0 - 8176 - 4677 - 6, Springer, 2008.

[20] Casazza P G, Kovacevic J. Equal-norm tight frames with erasures [J]. Advances in Computational Mathematics, 2003, 18 (2 - 4): 387 - 430.

[21] Becker S R, Candès E J, Grant M C. Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery [J]. Mathematical Programming Computation, 2011, 3 (3): 165 - 218.