第35卷第6期　　国防科技大学学报　　Vol. 35 No. 6
2013年12月　　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　　Dec. 2013

基于MEKF的航天器姿态确定算法*

张力军[1]，张士峰[1]，杨华波[1]，钱　山[2]
（1. 国防科技大学 航天科学与工程学院，湖南 长沙　410073；
2. 西安卫星测控中心 宇航动力学国家重点实验室，陕西 西安　710043）

摘　要：乘性扩展卡尔曼滤波（Multiplicative Extended Kalman Filter，MEKF）方法被广泛应用于各种航天器姿态确定任务。针对任意参考坐标系，推导了姿态四元数的线性运动学方程和三分量姿态误差矢量的动力学模型，并分别设计了有陀螺和无陀螺两种姿态确定方案。系统研究了姿态敏感器常用的矢量观测模型，四元数观测模型以及欧拉角观测模型，设计了更具有一般性的MEKF滤波器，为航天任务中快速应用MEKF姿态确定算法提供理论参考和技术支撑。

关键词：航天器；姿态确定；乘性扩展卡尔曼滤波；无陀螺姿态确定系统；欧拉角观测模型

中图分类号：V448.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001－2486(2013)06－0046－07

Multiplicative filtering for spacecraft attitude determination

ZHANG Lijun[1]，*ZHANG Shifeng*[1]，*YANG Huabo*[1]，*QIAN Shan*[2]
（1. College of Aerospace Science and Engineering，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China；
2. The State Key Laboratory of Astronautic Dynamics，China Xi'an Satellite Control Center，Xi'an 710043，China）

Abstract：Multiplicative extended Kalman filter（MEKF）has been widely applied in the vast majority of spacecraft attitude determination missions. For the arbitrary reference frame，the linear quaternion kinematics equation and the dynamical model of three-component attitude errors were formulated，and gyro-aided and gyro-free attitude determination schemes were designed. The typical basic equation of the MEKF was developed，including the detailed models for vector measurements，quaternion measurements and Euler angle measurements. The research can provide theory reference and technique support for spacecraft missions.

Key words：spacecraft；attitude determination；MEKF（Multiplicative Extended Kalman Filter）；gyro-free attitude determination system；Euler angle measurement model

扩展卡尔曼滤波（extended Kalman filter）技术[1－4]常被用于航天器实时姿态确定，根据姿态参数的选取不同和观测量的不同形式，常见的实现方式有乘性扩展卡尔曼滤波[4－5]（Multiplicative Extended Kalman Filter，MEKF）和加性扩展卡尔曼滤波[6－9]（Additive Extended Kalman Filter，AEKF）两种方式。AEKF和MEKF的本质区别在于四元数误差修正过程中是否遵循了单位范数约束条件，而不在于修正形式是加法还是四元数乘法，Shuster指出，如果对AEKF加以适当的约束，那么它可等价于MEKF，但是计算量大[10]。因此，MEKF被广泛应用于各种航天器姿态确定任务并且发展最为成熟。

MEKF的基本思想是估计无约束的三分量姿态误差参数并利用四元数乘法为航天器提供全局非奇异姿态描述。目前，针对不同的任务背景和姿态敏感器配置方案，众多学者推导了大量基于MEKF的姿态确定算法。从任务背景来看，既有惯性定姿[11]，也有轨道定姿[12－14]；从姿态角速度的传播形式上看，既有有陀螺姿态确定系统[11－12]，也有无陀螺姿态确定系统[13－14]；从姿态敏感器配置来看，既有基于单一敏感器，如磁强计[14]，也有基于组合敏感器，如陀螺＋星敏感器[11－12]，陀螺＋太阳敏感器＋磁强计[15]，磁强计＋红外地平仪[13]，多敏感器信息融合[16－17]等不同组合形式。综上所述，其姿态确定算法并不具有一般形式，往往需要随研究背景的改变而对系统进行重新建模。

1　姿态描述与运动学方程

目前，最常用的姿态参数是姿态四元数[18]，其优点主要在于用其表示的姿态运动学方程为线

* **收稿日期**：2013－05－01
基金项目：航天科技创新基金资助项目（CASC201105）；国防科技大学优秀研究生创新资助项目（S100104，S110103）
作者简介：张力军（1988—），男，江西鹰潭人，博士研究生，E-mail：alijun_007@163.com；
张士峰（通信作者），男，教授，博士，博士生导师，E-mail：zhang_shifeng@hotmail.com

性形式,计算量小,且不存在奇异性。四元数是一个四维矢量,定义为 $\boldsymbol{q}=[\tilde{\varrho}^{\mathrm{T}}\quad q_4]^{\mathrm{T}}$,其中 $\tilde{\varrho}\equiv[q_1\ q_2\ q_3]^{\mathrm{T}}=e\sin(\phi/2)$,$q_4=\cos(\phi/2)$,这里,$e$ 为单位欧拉旋转轴,ϕ 为旋转角,且四元数满足正交性约束条件 $\|q\|=1$。姿态矩阵可用四元数描述为[19]

$$A(q)=\begin{bmatrix} q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_1q_2+q_3q_4) & 2(q_1q_3-q_2q_4)\\ 2(q_1q_2-q_3q_4) & -q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_2q_3+q_1q_4)\\ 2(q_1q_3+q_2q_4) & 2(q_2q_3-q_1q_4) & -q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2\end{bmatrix}$$
$$=(q_4^2-\|\tilde{\varrho}\|^2)I_{3\times3}+2\,\tilde{\varrho}\tilde{\varrho}^T-2q_4[\tilde{\varrho}\times]$$
$$=\boldsymbol{\varXi}^{\mathrm{T}}(q)\boldsymbol{\Psi}(q)\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{I}_{3\times3}$ 是 3×3 的单位阵,且有

$$\varXi(q)\equiv\begin{bmatrix} q_4\boldsymbol{I}_{3\times3}+[\tilde{\varrho}\times]\\ -\tilde{\varrho}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$
$$\Psi(q)\equiv\begin{bmatrix} q_4\boldsymbol{I}_{3\times3}-[\tilde{\varrho}\times]\\ -\tilde{\varrho}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{2}$$

这里,$[\tilde{\varrho}\times]$ 是反对称阵,有如下形式

$$[\tilde{\varrho}\times]\equiv\begin{bmatrix}0 & -q_3 & q_2\\ q_3 & 0 & -q_1\\ -q_2 & q_1 & 0\end{bmatrix}\tag{3}$$

四元数的另外一个优点就是连续的姿态旋转可用四元数乘法进行描述,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}')\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}'\otimes\boldsymbol{q})$. 其中,符号"$\otimes$"表示四元数乘法,具有双线性特性,满足

$$\boldsymbol{q}'\otimes\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q}')\quad \boldsymbol{q}']\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{\varXi}(\boldsymbol{q})\quad \boldsymbol{q}]\boldsymbol{q}'\tag{4}$$

不失一般性,本文选取的参考坐标系相对于地心惯性系的旋转角速度为 ω_r,该坐标系既可以是地心惯性系,也可以是轨道坐标系或者是其它已知参考坐标系,则对应的航天器姿态分别为惯性姿态和对地姿态。定义从参考坐标系到体系的四元数为 $\boldsymbol{q}_{r\to b}$,则四元数运动学方程为

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{r\to b}=\frac{1}{2}\varXi(\boldsymbol{q}_{r\to b})\boldsymbol{\omega}_{b/r}=\frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_{b/r})\boldsymbol{q}_{r\to b}\tag{5}$$

其中,$\boldsymbol{\omega}_{b/r}$ 为航天器体系相对于参考坐标系的角速度在航天器体系中的分量,若无特别说明,本文涉及的航天器的角速度均是在体系中定义的。因此,$\boldsymbol{\omega}_{b/r}$ 可进一步表示成

$$\boldsymbol{\omega}_{b/r}=\boldsymbol{\omega}_b-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}_{r\to b})\boldsymbol{\omega}_r\tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{\omega}_b$ 为航天器的惯性姿态角速度,可由陀螺测量或姿态动力学方程传播得到。将式(1)和式(6)代入式(5),可得

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{r\to b}=\frac{1}{2}\varXi(\boldsymbol{q}_{r\to b})\boldsymbol{\omega}_b-\frac{1}{2}\varXi(\boldsymbol{q}_{r\to b})\varXi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}_{r\to b})\Psi(\boldsymbol{q}_{r\to b})\boldsymbol{\omega}_r$$
$$=\frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_b)\boldsymbol{q}_{r\to b}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}_{4\times4}-\boldsymbol{q}_{r\to b}\boldsymbol{q}_{r\to b}^{\mathrm{T}})\Psi(\boldsymbol{q}_{r\to b})\boldsymbol{\omega}_r$$
$$=\frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_b)\boldsymbol{q}_{r\to b}-\frac{1}{2}\Psi(\boldsymbol{q}_{r\to b})\boldsymbol{\omega}_r$$
$$=\frac{1}{2}(\Omega(\omega_b)-\Gamma(\omega_r))\boldsymbol{q}_{r\to b}\tag{7}$$

式中,对于三分量的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$,有

$$\Omega(\omega)\equiv\begin{bmatrix}-[\boldsymbol{\omega}\times] & \boldsymbol{\omega}\\ -\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\quad \Gamma(\omega)\equiv\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}\times] & \boldsymbol{\omega}\\ -\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\tag{8}$$

可以看出,由四元数构成的姿态运动学方程为线性方程,且方程(7)适用于航天器相对于任意参考坐标系的姿态传播。对于特殊情况,当地心惯性系选为参考坐标系时,此时有 $\boldsymbol{\omega}_r=\boldsymbol{0}_{3\times1}$。

2　MEKF 滤波器设计

2.1　状态和方差传播

2.1.1　姿态误差矢量的动力学模型

MEKF 通常以四元数乘积形式对真实姿态进行描述[20],即

$$\boldsymbol{q}=\delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi})\otimes\hat{\boldsymbol{q}}\tag{9}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{q}}$ 为估计四元数,$\delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi})$ 为真实四元数 $\boldsymbol{q}$ 与估计四元数 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 之间的误差四元数,可用三分量矢量 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 描述。事实上,$\Delta\boldsymbol{\phi}$ 为航天器体坐标系下定义的姿态误差矢量,它可用多种参数进行描述,如无穷小旋转矢量[21],两倍的四元数矢部[4],两倍的罗德里格(Rodrigues)参数或吉布斯(Gibbs)向量[5],四倍的修正罗德里格参数[22]等。根据小角近似条件可以得到

$$\delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi})\approx\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\phi}/2\\ 1-\Delta\boldsymbol{\phi}^2/8\end{bmatrix}\tag{10}$$

以及姿态误差矩阵

$$\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q})\approx\boldsymbol{I}_{3\times3}-[\Delta\boldsymbol{\phi}\times]\tag{11}$$

线性化 Bortz 方程可得到姿态误差矢量的动力学模型[21]

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\phi}}=(\boldsymbol{\omega}_{b/r}-\hat{\boldsymbol{\omega}}_{b/r})-\hat{\boldsymbol{\omega}}_{b/r}\times\Delta\boldsymbol{\phi}\tag{12}$$

将式(6)代入式(12)可得

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\phi}}=(\boldsymbol{\omega}_b-\hat{\boldsymbol{\omega}}_b)-(\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q})\frac{1}{2\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b})\boldsymbol{\omega}_r-\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b})\hat{\boldsymbol{\omega}}_r)-[(\hat{\boldsymbol{\omega}}_b-\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b})\hat{\boldsymbol{\omega}}_r)\times]\Delta\boldsymbol{\phi}\tag{13}$$

令 $\Delta\boldsymbol{\omega}_b\equiv\boldsymbol{\omega}_b-\hat{\boldsymbol{\omega}}_b$,$\Delta\boldsymbol{\omega}_r\equiv\boldsymbol{\omega}_r-\hat{\boldsymbol{\omega}}_r$,将式(11)

代入式(13),并利用反对称阵的线性齐次性整理可得

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\phi}} = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_b \times]\Delta\boldsymbol{\phi} + \Delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}})\Delta\boldsymbol{\omega}_r \quad (14)$$

这里,假设参考坐标系的角速度已知,则有 $\Delta\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{0}_{3\times1}$,则可得到姿态误差矢量的线性化动力学模型为

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\phi}} = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_b \times]\Delta\boldsymbol{\phi} + \Delta\boldsymbol{\omega}_b \quad (15)$$

仔细观察方程(15)可以发现,虽然这里 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 定义的是相对于 $\hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b}$ 的姿态误差矢量,但由方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_{I\to b} &= \boldsymbol{q}_{r\to b} \otimes \boldsymbol{q}_{I\to r} = \delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi}) \otimes \hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b} \otimes \boldsymbol{q}_{I\to r} \\ &= \delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi}) \otimes \hat{\boldsymbol{q}}_{I\to b}\end{aligned} \quad (16)$$

可看出 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 也可看成是相对于 $\hat{\boldsymbol{q}}_{I\to b}$ 而定义的姿态误差矢量,这主要是因为假设了已知准确的 $\boldsymbol{\omega}_r$,从而可以根据姿态传播得到准确的四元数 $\boldsymbol{q}_{I\to r}$,其中,$\boldsymbol{q}_{I\to b}$ 为从惯性系到体系的四元数,$\boldsymbol{q}_{I\to r}$ 为惯性系到参考坐标系的四元数。这也就解释了为什么方程(15)的形式与在惯性系下解算姿态的姿态误差矢量的动力学模型一致。

2.1.2 系统状态方程及其线性化

航天器的姿态角速度可以通过速率积分陀螺测量得到,也可以利用姿态动力学传播得到。因此,下面就这两种情况分别建立系统状态方程,对应为有陀螺姿态确定系统和无陀螺姿态确定系统。

(1)有陀螺姿态确定系统

一般来说,陀螺测量的是航天器的惯性姿态角速度在体系中的分量,通常采用如下模型

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b &= \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}_v \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\eta}_u\end{aligned} \quad (17)$$

其中,$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b$ 是陀螺的测量输出,$\boldsymbol{\beta}$ 是漂移量,$\boldsymbol{\eta}_v$ 和 $\boldsymbol{\eta}_u$ 是独立的零均值高斯白噪声过程,满足

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{\boldsymbol{\eta}_v(t)\boldsymbol{\eta}_v^{\mathrm{T}}(\tau)\} &= \sigma_v^2\delta(t-\tau)\boldsymbol{I}_{3\times3} \\ \mathrm{E}\{\boldsymbol{\eta}_u(t)\boldsymbol{\eta}_u^{\mathrm{T}}(\tau)\} &= \sigma_u^2\delta(t-\tau)\boldsymbol{I}_{3\times3}\end{aligned} \quad (18)$$

其中,$\delta(t-\tau)$ 为 Diracδ 函数,更为一般地考虑了刻度因子和失准角误差的陀螺模型可参见文献[23]。

根据方程(17)可得角速度的估计模型为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b - \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (19)$$

结合式(17)和式(19)可得 $\Delta\boldsymbol{\omega}_b = -(\Delta\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}_v)$,其中 $\Delta\beta \equiv \beta - \hat{\beta}$。于是方程(15)可写成

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\phi}} = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_b \times]\Delta\boldsymbol{\phi} - (\Delta\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}_v) \quad (20)$$

选取误差状态变量 $\Delta\boldsymbol{x}_{\mathrm{gyro}} \equiv [\Delta\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \quad \Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,可得有陀螺姿态确定系统的误差状态方程

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{gyro}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{gyro}}\Delta x_{\mathrm{gyro}} + G_{\mathrm{gyro}} w_{\mathrm{gyro}} \quad (21)$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{gyro}} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_b \times] & -\boldsymbol{I}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{gyro}} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_{3\times3} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{gyro}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_v \\ \boldsymbol{\eta}_u \end{bmatrix} \quad (24)$$

过程噪声 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{gyro}}$ 的谱密度矩阵为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2\boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \sigma_u^2\boldsymbol{I}_{3\times3} \end{bmatrix} \quad (25)$$

(2)无陀螺姿态确定系统

在没有陀螺提供角速度信息的情况下,根据航天器的姿态动力学方程可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega}_b) = \boldsymbol{J}^{-1}[\boldsymbol{T}_c + \boldsymbol{T}_g + \boldsymbol{w}_d \\ &\quad - \dot{\boldsymbol{h}} - \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{h})]\end{aligned} \quad (26)$$

式中,$\boldsymbol{J}$ 为航天器的惯量张量矩阵,$\boldsymbol{h}$ 为动量轮的角动量,$\boldsymbol{T}_c$ 为推力器提供的控制力矩,$\boldsymbol{T}_g$ 为重力梯度力矩,$\boldsymbol{w}_d$ 为其它环境干扰力矩,如气动力矩、太阳辐射力矩、地磁干扰力矩等。一般来说,环境干扰力矩与控制力矩相比很小,可近似作为模型噪声处理。当没有控制力矩作用时,此时航天器所受的合外力矩主要考虑重力梯度力矩 $\boldsymbol{T}_g$,方程(26)中的重力梯度力矩可描述成[19]

$$\boldsymbol{T}_g = \frac{3\mu}{|\boldsymbol{r}|^5}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}_{I\to b})\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J} \cdot (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}_{I\to b})\boldsymbol{r})] \quad (27)$$

其中,μ 为引力常数,$\boldsymbol{r}$ 为航天器在惯性系中的位置矢量,由航天器的轨道运动学提供。

因此,由方程(16)和(27)可看出 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega}_b)$ 与姿态误差矢量 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 有关,则方程(26)可进一步改写为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega}_b, \Delta\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{J}^{-1}[\boldsymbol{T}_c + \boldsymbol{T}_g - \dot{\boldsymbol{h}} \\ &\quad - \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{h})] + \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{w}_d\end{aligned} \quad (28)$$

取方程(28)的全微分可得线性化方程

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{F}_{\omega\phi}\Delta\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{F}_{\omega\omega}\Delta\boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{w}_d \quad (29)$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\omega\phi} &= \left.\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega}_b, \Delta\boldsymbol{\phi})}{\partial\Delta\boldsymbol{\phi}}\right|_{\hat{\omega}_b} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \frac{\partial\boldsymbol{T}_g}{\partial\Delta\boldsymbol{\phi}} \\ &= \boldsymbol{J}^{-1}\frac{3\mu}{|\hat{\boldsymbol{r}}|^5}\{[\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}}_{I\to b})\hat{\boldsymbol{r}} \times]\boldsymbol{J} \\ &\quad - [\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}}_{I\to b})\hat{\boldsymbol{r}} \times]\}[\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}}_{I\to b})\hat{\boldsymbol{r}} \times]\end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\omega\omega} &= \left.\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega}_b, \Delta\boldsymbol{\phi})}{\partial\boldsymbol{\omega}_b}\right|_{\hat{\omega}_b} \\ &= \boldsymbol{J}^{-1}\{[(\boldsymbol{J}\hat{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{h}) \times] - [\hat{\boldsymbol{\omega}}_b \times]\boldsymbol{J}\}\end{aligned} \quad (31)$$

于是,选取误差状态变量 $\Delta\boldsymbol{x}_{\mathrm{non-gyro}} \equiv [\Delta\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \quad \Delta\boldsymbol{\omega}_b^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,利用式(15)和式(29)可得无陀螺姿态

确定系统的误差状态方程

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{non-gyro}} = \boldsymbol{F}_{\text{non-gyro}}\Delta\boldsymbol{x}_{\text{non-gyro}} + \boldsymbol{G}_{\text{non-gyro}}\boldsymbol{w}_{\text{non-gyro}} \tag{32}$$

式中

$$\boldsymbol{F}_{\text{non-gyro}} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_b \times] & \boldsymbol{I}_{3\times3} \\ \boldsymbol{F}_{\omega\phi} & \boldsymbol{F}_{\omega\omega} \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{G}_{\text{non-gyro}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{J}^{-1} \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{w}_{\text{non-gyro}} = \boldsymbol{w}_d \tag{35}$$

过程噪声 $\boldsymbol{w}_{\text{non-gyro}}$的谱密度矩阵为 $\boldsymbol{Q} = \sigma_d^2\boldsymbol{I}_{3\times3}$。

至此,分别推导了有陀螺姿态确定系统和无陀螺姿态确定系统的误差状态方程,鉴于形式的相似性,可统一描述成如下形式

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w} \tag{36}$$

2.1.3　状态和方差传播

状态参数 $\hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b}$ 可通过式(7)积分得到,对于有陀螺姿态确定系统,$\hat{\boldsymbol{\omega}}_b$ 由式(19)得到,而对于无陀螺姿态确定系统,$\hat{\boldsymbol{\omega}}_b$ 由式(26)的积分得到。方差传播的离散形式可以表示成

$$\boldsymbol{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{P}_{k+1}^-\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_k \tag{37}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}$ 为状态转移阵,$\boldsymbol{Q}$ 为过程噪声方差阵。Loan 给出了这些矩阵的数值解[24],首先取时间间隔 Δt,构造矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{GQG}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix}\Delta t \tag{38}$$

式(38)中的矩阵 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{Q}$ 均已定义,然后,计算方程(38)的矩阵指数

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ 0 & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{Q} \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{39}$$

于是可得

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{B}_{22}^{\mathrm{T}} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{B}_{12} \tag{41}$$

不过,上述方法需要计算矩阵指数,在 Matlab 环境下较容易实现,但在 C 语言环境中仍需要编写矩阵指数函数。文献[25]中运用矩阵论中二次型原理推导了连续系统离散化的一般公式,指出离散过程噪声协方差阵具有形式

$$\boldsymbol{Q}_k = \sum_{J=1}^{N}\sum_{I=1}^{N}\frac{1}{(I+J-1)}\frac{1}{(I-1)!}\frac{1}{(J-1)!} \cdot \boldsymbol{F}^{I-1}(t_k)\boldsymbol{G}(t_k)\boldsymbol{Q}_w(t_k)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(t_k)(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t_k))^{J-1}\Delta t^{I+J-1} \tag{42}$$

可根据精度要求选取适当的 N,一般选取 $N=3\sim4$.

2.2　观测方程及其线性化

目前,工程上应用的姿态敏感器种类很多,如三轴磁强计、太阳敏感器、地平仪以及星敏感器等,常用的观测模型则包括矢量观测模型,四元数观测模型和欧拉角观测模型。

2.2.1　矢量观测模型

通常,基于矢量观测的姿态敏感器测量值 $\boldsymbol{h}(v_B)$是关于体系中观测矢量 v_B 的 m 分量函数,因此测量方程可写成

$$\tilde{z} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}_B) + \varepsilon \tag{43}$$

测量灵敏度矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\Delta\phi} &= \frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial(\Delta\boldsymbol{\phi})} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\boldsymbol{v}_B}\frac{\partial\boldsymbol{v}_B}{\partial(\Delta\boldsymbol{\phi})}\right)\bigg|_{\hat{q}(-)} \\ &= \left(\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\boldsymbol{v}_B}\frac{\partial}{\partial(\Delta\boldsymbol{\phi})}A(\delta q)\hat{v}_B\right)\bigg|_{\hat{q}(-)}\end{aligned} \tag{44}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{v}}_B \equiv \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b}(-))\hat{\boldsymbol{v}}_r \tag{45}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{v}}_r$ 为参考坐标系中估计的观测矢量,事实上,很多观测矢量都是基于惯性系中定义的,如星敏感器,太阳敏感器等,此时方程(45)在实际运用当中可以展开为

$$\hat{\boldsymbol{v}}_r = \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{q}}_{I\to r}(-))\boldsymbol{v}_I \tag{46}$$

由此可以看出,只要知道准确的坐标旋转矩阵,观测矢量可基于任意坐标系中定义。因此,为了不失一般性,将 $\hat{\boldsymbol{v}}_B$ 统一写成方程(45)的形式,观测量的预估值可写成 $\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{v}}_B)$.

注意到 $\boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{I}_{3\times3} - [\Delta\boldsymbol{\phi}\times]$,则方程(44)可改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\Delta\phi} &= \frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\boldsymbol{v}_B}\bigg|_{\hat{v}_B}\frac{\partial}{\partial(\Delta\boldsymbol{\phi})}(-[\Delta\boldsymbol{\phi}\times]\hat{v}_B) \\ &= \frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\boldsymbol{v}_B}\bigg|_{\hat{v}_B}\frac{\partial}{\partial(\Delta\boldsymbol{\phi})}([\hat{v}_B\times]\Delta\boldsymbol{\phi}) = \frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\boldsymbol{v}_B}\bigg|_{\hat{v}_B}[\hat{v}_B\times]\end{aligned} \tag{47}$$

对于焦平面敏感器如太阳敏感器或星敏感器而言,选取 z 方向为其敏感轴方向,则测量方程可写成

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}_B) = \begin{bmatrix} u_1/u_3 \\ u_2/u_3 \end{bmatrix} \tag{48}$$

其中,$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}_{b\to s}\boldsymbol{v}_B = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^{\mathrm{T}}$ 为敏感器坐标系中描述的观测矢量,$\boldsymbol{A}_{b\to s}$表示从航天器体系到敏感器坐标系的姿态旋转矩阵。根据式(47)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\Delta\phi} &= \frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\boldsymbol{u}}\bigg|_{\hat{u}}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{v}_B}[\boldsymbol{A}_{b\to s}^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}\times] = \frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\boldsymbol{u}}\bigg|_{\hat{\boldsymbol{u}}}[\hat{\boldsymbol{u}}\times]\boldsymbol{A}_{b\to s} \\ &= \frac{1}{\hat{u}_3^2}\begin{bmatrix} \hat{u}_3 & 0 & -\hat{u}_1 \\ 0 & \hat{u}_3 & -\hat{u}_2 \end{bmatrix}[\hat{\boldsymbol{u}}\times]\boldsymbol{A}_{b\to s}\end{aligned} \tag{49}$$

式(49)的计算中利用了正常正交矩阵的正交变换性质公式$[\boldsymbol{Cu}\times] = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{u}\times]\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$。

对于三轴磁强计而言，其敏感的是磁场矢量在磁强计中的分量，观测量是矢量本身，满足

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}_B)=\boldsymbol{u} \tag{50}$$

测量灵敏度矩阵为

$$\boldsymbol{H}_{\Delta\phi}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\hat{\boldsymbol{u}}}[\hat{\boldsymbol{u}}\times]\boldsymbol{A}_{b\to s}=[\hat{\boldsymbol{u}}\times]\boldsymbol{A}_{b\to s} \tag{51}$$

事实上，许多视线敏感器测量值都可以被重构为单位矢量形式，但要注意重构后观测噪声方差阵的传播。通常，对于小视场敏感器，采用QUEST观测模型，其优势在于观测方差阵在EKF公式可以等效地用非奇异阵 $\sigma^2\boldsymbol{I}_{3\times3}$ 代替[26]。而针对大视场敏感器情形，Cheng 利用一阶泰勒展开近似扩展了 QUEST 测量模型[27]。

因为观测量不显示依赖于陀螺漂移和航天器姿态角速度，因此，不论对于有陀螺姿态确定系统还是无陀螺姿态确定系统，总测量灵敏度矩阵可写成

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_{\Delta\phi}\quad \boldsymbol{0}_{m\times3}] \tag{52}$$

2.2.2 四元数观测模型

目前，不少现代姿态敏感器能够根据观测矢量直接给出四元数观测值，四元数输出模型为

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{r\to\tilde{s}}=\boldsymbol{q}_{s\to\tilde{s}}\otimes\boldsymbol{q}_{b\to s}\otimes\boldsymbol{q}_{r\to b} \tag{53}$$

式中，$\boldsymbol{q}_{b\to s}$ 表示从体系到敏感器坐标系的姿态四元数，$\boldsymbol{q}_{s\to\tilde{s}}$ 由星敏感器的测量噪声引起，定义为 $\delta\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\nu}_s)$。同样，这里假设观测到的四元数为从参考坐标系到敏感器体系，若观测到的四元数是从惯性系到敏感器体系，只需要利用 $\boldsymbol{q}_{I\to r}$ 进行四元数转换即可得到，并不影响本文的结论。

当处理敏感器输出四元数观测值时，一般进行预处理构造新的观测量

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\tilde{z}\\ 1\end{bmatrix}=\tilde{\boldsymbol{q}}_{r\to\tilde{s}}\otimes[\hat{\boldsymbol{q}}_{b\to r}\otimes\boldsymbol{q}_{s\to b}] \tag{54}$$

经过推导可得新构造的观测量与姿态误差矢量的关系式为

$$\tilde{z}=\boldsymbol{A}_{b\to s}\Delta\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\nu}_s \tag{55}$$

由式(55)可得测量灵敏矩阵为

$$\boldsymbol{H}_{\Delta\phi}=\boldsymbol{A}_{b\to s} \tag{56}$$

由于每次滤波更新后，滤波器重置，则有 $\Delta\hat{\boldsymbol{\phi}}(-)=\boldsymbol{0}$，所以观测量预估值为 $\hat{z}=\boldsymbol{0}_{3\times1}$. 同样，不论对于有陀螺姿态确定系统还是无陀螺姿态确定系统，总测量灵敏度矩阵可写成

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_{\Delta\phi}\quad \boldsymbol{0}_{3\times3}] \tag{57}$$

2.2.3 欧拉角观测模型

当定义了欧拉角转序后，某些姿态敏感器可输出欧拉角观测值，观测模型可描述成

$$\begin{bmatrix}\tilde{\phi}\\ \tilde{\vartheta}\\ \tilde{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi\\ \vartheta\\ \psi\end{bmatrix}+\varepsilon \tag{58}$$

类似地，这里假设给出的欧拉角为航天器相对于参考坐标系的姿态角，若不是，可进行坐标转换得到。因此，欧拉角的预估值可由当前所估计的姿态四元数 $\hat{\boldsymbol{q}}_{r\to b}$ 转换得到。

下面重点介绍如何计算其关于姿态误差矢量的测量灵敏度矩阵，根据欧拉角运动学方程可得

$$\omega_{b/r}=\boldsymbol{M}(\phi,\vartheta,\psi)\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\vartheta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} \tag{59}$$

其中，ϕ,ϑ,ψ 为依次旋转的欧拉角，$\boldsymbol{M}(\phi,\vartheta,\psi)$ 是关于 ϕ,ϑ,ψ 的函数矩阵，其形式由欧拉角转序决定。从变化率的角度出发，根据方程(59)可得姿态误差矢量与欧拉角误差的关系式

$$\Delta\phi=\boldsymbol{M}(\phi,\vartheta,\psi)\begin{bmatrix}\Delta\phi\\ \Delta\vartheta\\ \Delta\psi\end{bmatrix} \tag{60}$$

进一步可得

$$\begin{bmatrix}\Delta\phi\\ \Delta\vartheta\\ \Delta\psi\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}^{-1}(\phi,\vartheta,\psi)\Delta\phi \tag{61}$$

式中，欧拉角误差测量值(即欧拉角测量残差)可由欧拉角的观测值减去欧拉角的预估值得到，即

$$\tilde{z}=\begin{bmatrix}\Delta\tilde{\phi}\\ \Delta\tilde{\vartheta}\\ \Delta\tilde{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\phi}\\ \tilde{\vartheta}\\ \tilde{\psi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\hat{\phi}\\ \hat{\vartheta}\\ \hat{\psi}\end{bmatrix} \tag{62}$$

值得注意的是，文献[11-12]认为方程(62)中构造的欧拉角测量残差与乘性误差四元数矢部的关系是一个两倍关系，即将欧拉角误差等同于姿态误差矢量。从方程(61)可以看出，这个观点是不正确的，具体的证明详见文献[28]。

因此，根据方程(61)可得测量灵敏度矩阵为

$$\boldsymbol{H}_{\Delta\phi}=\boldsymbol{M}^{-1}(\hat{\phi},\hat{\vartheta},\hat{\psi}) \tag{63}$$

其中，$\hat{\phi},\hat{\vartheta},\hat{\psi}$ 为欧拉角当前的估计值。

同样，不论对于有陀螺姿态确定系统还是无陀螺姿态确定系统，总测量灵敏度矩阵均可写成

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_{\Delta\phi}\quad \boldsymbol{0}_{3\times3}] \tag{64}$$

另外，若定义欧拉角列向量为 $\boldsymbol{\theta}=[\phi\ \vartheta\ \psi]^{\mathrm{T}}$，则根据式(61)可得欧拉角误差的方差阵为

$$\boldsymbol{P}_{\theta\theta}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P}_{\phi\phi}(\boldsymbol{M}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{65}$$

分析可知，$\boldsymbol{P}_{\phi\phi}$ 是相对独立的，而 $\boldsymbol{P}_{\theta\theta}$ 大小则依赖于函数矩阵 $\boldsymbol{M}$，因此非常大的 $\boldsymbol{P}_{\theta\theta}$ 并不代表姿

态误差很大,对于某些特定的欧拉角来说,M 阵甚至可能是奇异的,此时 $\boldsymbol{P}_{\theta\theta}$ 为无穷大,而姿态误差有可能很小。因此,在观测模型的选取上,并不提倡使用欧拉角观测模型,建议利用四元数和欧拉角的转化关系将其转换为四元数观测模型。仅能观测两个姿态角的观测模型均为上述观测模型的特例。

2.3　滤波更新

无论是对于有陀螺姿态确定系统还是无陀螺姿态确定系统,观测模型不论是矢量观测模型,四元数观测模型,还是欧拉角观测模型,均可直接给出如下统一形式的滤波更新方程[19]

$$\Delta\hat{X}(+) = \boldsymbol{K}(\tilde{z} - \hat{z}) \tag{66}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{P}(-)H^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{HP}(-)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}]^{-1} \tag{67}$$

$$\boldsymbol{P}(+) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{KH}]\boldsymbol{P}(-) \tag{68}$$

其中,四元数采用如下形式进行更新

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{+}_{r\to b} = \delta\boldsymbol{q}(\Delta\boldsymbol{\phi}) \otimes \hat{\boldsymbol{q}}^{-}_{r\to b} \tag{69}$$

对于有陀螺姿态确定系统,陀螺漂移更新方程为

$$\hat{\beta}(+) = \hat{\beta}(-) + \Delta\hat{\beta}(+) \tag{70}$$

对于无陀螺姿态确定系统,姿态角速度更新方程为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_b(+) = \hat{\boldsymbol{\omega}}_b(-) + \Delta\hat{\boldsymbol{\omega}}_b(+) \tag{71}$$

当滤波器采用误差状态量作为滤波变量时,每次滤波更新后,滤波器都必须重置,即令 $\Delta\hat{X}(+) = \boldsymbol{0}_{6\times1}$。

3　方差转换

上述 Kalman 滤波得到的姿态方差阵是基于姿态误差矢量 $\Delta\phi$ 定义的,即

$$\boldsymbol{P}_{\phi\phi} = \mathrm{E}\{\Delta\phi\Delta\phi^{\mathrm{T}}\} \tag{72}$$

另一方面,根据对四元数运动学方程(5)积分可得

$$\Delta\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{q})\Delta\boldsymbol{\phi},\ \Delta\boldsymbol{\phi} = 2\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\Delta\boldsymbol{q} \tag{73}$$

定义四元数方差阵 $\boldsymbol{P}_{qq} = \mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\}$,则可得

$$\boldsymbol{P}_{qq} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{q})P_{\phi\phi}\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \tag{74}$$

利用等式 $\Delta\phi = 2\delta\tilde{\varrho}$ 可得误差四元数方差阵与其矢部方差阵的关系

$$\boldsymbol{P}_{qq} = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{P}_{\tilde{\varrho}\tilde{\varrho}}\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \tag{75}$$

欧拉角误差的方差阵与姿态方差阵的转换关系见式(65),利用该式在进行滤波时可实时计算欧拉角误差的 3σ 边界。

因此,可利用 Kalman 滤波中得到的姿态方差阵 $\boldsymbol{P}_{\phi\phi}$ 分别转化为四元数方差阵 $\boldsymbol{P}_{qq}$,欧拉角误差方差阵 $\boldsymbol{P}_{\theta\theta}$ 进行滤波性能综合评估。

4　结论

本文推导了具有一般形式的 MEKF 姿态确定算法,适用于航天器相对于任意已知参考坐标系的姿态求解,设计了有陀螺和无陀螺两种姿态确定方案,并系统研究了姿态敏感器常用的矢量观测模型,四元数观测模型以及欧拉角观测模型。主要结论如下:

(1) 航天器相对于任意参考坐标系定义的四元数运动学方程为线性方程,可以统一描述成方程(7)的形式,且该方程适用于交会对接和编队飞行中航天器间的相对姿态确定。

(2) 当已知准确的参考坐标系旋转角速度时,姿态误差矢量的线性化动力学模型具有一般形式,均可等价于在惯性系下姿态误差矢量的动力学模型。另外,可利用方程(14)进一步研究参考坐标系角速度未知的姿态估计问题。

(3) 指出了国内不少文献中的基于欧拉角观测模型的测量灵敏度矩阵的求解是不合理的。

(4) 虽然有陀螺和无陀螺姿态确定方案中选取的误差状态变量不一致,但本文从形式上推导得到了基于 MEKF 的姿态确定算法的一般性公式。因此,基于本文的研究成果,可针对不同的任务背景和姿态敏感器配置方案快速应用 MEKF 姿态确定算法,如基于多敏感器的联邦滤波器设计,无陀螺姿态确定系统的轨道姿态一体化确定等。

参考文献(References)

[1] Farrell J L. Attitude determination by kalman filter[J]. Automatic,1970,6(5):419-430.

[2] Murrell J W. Precision attitude determination for multimission spacecraft[C]//Proceedings of AIAA Guidance and Control Conference, Palo Alto, CA, Aug. 1978, AIAA-78-1248.

[3] Schmidt S F. Kalman filter: Its recognition and development for aerospace application[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics,1981,4(1):4-7.

[4] Lefferts E J, Markley F L, Shuster M D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1982,5(5):417-429.

[5] Markley F L. Attitude error representations for kalman filtering [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(2):311-317.

[6] Bar-Itzhack I Y, Oshman Y. Attitude determination from vector observations: quaternion estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1985,21(1):128-136.

[7] Bar-Itzhack I Y, Deutschmann J, Markley F L. Quaternion normalization in additive EKF for spacecraft attitude

determination [C]// Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, NewOrleans, LA, Aug. 1991.

[8] Deutschmann J, Markley F L, Bar-Itzhack I Y. Quaternion normalization in spacecraft attitude determination [C]// Proceedings of the Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium, (NASA/CP-1992 - 3186) NASA-Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, 1992:523 - 536.

[9] Choukroun D, Bar-Itzhack I Y, Oshman Y. A novel quaternion filter[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Monterey, CA, Aug. 2002, AIAA - 02 - 4460.

[10] Shuster M D. The quaternion in kalman filtering [J]. Advances in the Astronautical Sciences, 1993, 85:25 - 37.

[11] 吴廷元, 刘建业, 郁丰, 等. 基于陀螺/星敏感器的微小卫星姿态确定方法研究[J]. 计算机测量与控制, 2008, 16(5): 634 - 636.
WU Tingyuan, LIU Jianye, YU Feng, et al. Satellite attitude determination based on redundant gyro system and star sensor [J]. Computer Measurement & Control, 2008, 16(5): 634 - 636. (in Chinese)

[12] 杨锋, 周宗锡, 刘曙光. 基于星敏感器/光纤陀螺的卫星定姿算法[J]. 控制工程, 2006, 13(4):374 - 376.
YANG Feng, ZHOU Zongxi, LIU Shuguang. Satellite attitude determination algorithm based on star-sensor and FOG [J]. Control Engineering of China, 2006, 13(4): 374 - 377. (in Chinese)

[13] 邢艳军, 曹喜滨, 张世杰. 基于磁强计和红外地平仪的卫星轨道姿态一体化确定方法[J]. 宇航学报, 2009, 30(4): 1574 - 1581.
XIANG Yanjun, CAO Xibin, ZHANG Shijie. Integrated orbit and attitude determination algorithm of satellite based on magnetometer and Infrared horizon sensor [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(4): 1574 - 1581. (in Chinese)

[14] 张锐, 朱振才, 张静, 等. 基于磁强计的微小卫星姿态确定[J]. 宇航学报, 2006, 27(4): 578 - 581.
ZHANG Rui, ZHU Zhencai, ZHANG jing, et al. Micro-satellite attitude determination based on magnetometer [J]. Journal of Astronautics, 2006, 27 (4): 578 - 581. (in Chinese)

[15] 崔培玲, 张翠, 全伟, 等. 敏感器正常和故障模式下微小卫星的姿态确定方法[J]. 中国惯性技术学报, 2009, 17(5): 538 - 542.
CUI Peiling, ZHANG Cui, QUAN Wei, et al. Attitude determination method of micro satellite under normal and failure mode of sensor [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2009, 17(5): 538 - 542. (in Chinese)

[16] 张春青, 李勇, 刘良栋. 卫星多敏感器组合姿态确定系统中的信息融合方法研究[J]. 宇航学报, 2005, 26(3): 314 - 320.
ZHANG Chunqing, LI Yong, LIU Liangdong. Research on information fusion method in satellite multi-sensor attitude determination systems[J]. Journal of Astronautics, 2005, 26 (3): 314 - 320. (in Chinese)

[17] 顾东晴, 王岩, 周文君, 等, 多敏感器卫星姿态确定的联邦滤波器设计[J]. 中国空间科学技术, 2004(3): 7 - 13.
GU Dongqing, WANG Yan, ZHOU Wenjun, et al. Federated filter design for multi-sensors satellite attitude determination [J]. Chinese Space Science and Technology, 2004(3):7 - 13. (in Chinese)

[18] Shuster M D. A survey of attitude representations[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1993, 41(4):439 - 517.

[19] Wertz J R. Spacecraft attitude determination and control[M]. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1978.

[20] Markley F L, Crassidis J L, Cheng Y. Nonlinear attitude filtering methods [C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, San Francisco, CA, United States, 2005:753 - 784.

[21] Pittelkau M E. Rotation vector attitude estimation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(6): 855 - 860.

[22] Oshman Y, Markley F L. Sequential attitude and attitude-rate estimation using integrated-rate parameters [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(3):385 - 394.

[23] Pittelkau M E. Kalman filtering for spacecraft system alignment calibration[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(6).

[24] Van Loan C F. Computing integrals involving the matrix exponential[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1978, 23(3):396 - 404.

[25] 张力军, 钱山, 蔡洪, 等. Kalman 滤波中连续系统离散化的计算机上实现[J]. 飞行器测控学报, 2010, 29(2): 66 - 69.
ZHANG Lijun, QIAN Shan, CAI Hong, et al. Computer implementation to discretiza-tion of continuous system for kalman filter [J]. Journal of Spacecraft TT&C Technology, 2010, 29(2): 66 - 69. (in Chinese)

[26] Shuster M D. Kalman filtering of spacecraft attitude and the QUEST model[J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 1990, 38(3):377 - 393.

[27] Cheng Y, Crassidis J L, Landis Markley F. Attitude estimation for large field-of-view sensors[J]. Advances in the Astronautical Sciences, Grand Island, NY, United states, 2006:193 - 208.

[28] 张力军, 张士峰, 杨华波, 等. 基于欧拉角观测模型的航天器姿态确定方法研究[J], 国防科技大学学报, 2012, 34(6): 84 - 88.
ZHANG Lijun, ZHANG Shifeng, YANG Huabo, et al. Spacecraft attitude determination based on euler angle measurement model [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2012, 34(6): 84 - 88. (in Chinese)