

两种伪距单点定位模型最小二乘解的等价性证明*

吕汉峰, 吴杰, 张良

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:针对伪距单点定位解算中存在的两种定位模型的最小二乘解,给出了它们关于位置估计和定位精度等价性的推证过程。描述了伪距单点定位所采用的基本定位模型和单差定位模型,依据伪距观测值精度和单差基准分三种情况分别证明了两种模型的位置最小二乘解和定位精度是等价的,通过实测数据的定位解算验证了两种模型的等价性,并比较了两种模型的最小二乘算法的效率。

关键词:伪距单点定位;伪距单差;最小二乘方法;卫星导航

中图分类号: P228.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2014)01-0034-07

The equivalence prove of least-square solutions for two single-point positioning models

LV Hanfeng, WU Jie, ZHANG Liang

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: For the least-square solutions of two positioning models in single-point position, the equivalence proving of position estimation and its precision is given. The basic positioning model and single-difference positioning model were described respectively, then the single-difference positioning model was arranged into three cases, and the least-square solution of each case was proved equal to that of basic positioning model. Finally, the equivalence of the two models was proved by processing the experiment data, and the efficiency of least-square arithmetic for the two models was compared with each other.

Key words: single-point position; single-differenced pseudo-range; least square; GNSS

卫星导航相对于其他导航技术有其独特的优势,如用户端设备简单、导航稳定性好、无区域限制等。目前已有的GNSS系统已经在各个行业发挥着重要的作用^[1-4]。用于卫星导航定位的信息有两种:伪距和载波相位。基于载波相位的定位精度比较高,但其算法复杂,需要进行整周模糊度解算和周跳检测,并且对接收机硬件要求高;基于伪距的定位精度相对较差,但可以满足多数的应用需求,并且其计算简单,可用性好,成本低^[3-4]。因此研究伪距定位技术仍然具有重要意义。

采用伪距进行定位时一般将接收机的钟差也作为未知参数进行求解,但对于用户来说接收机钟差是非必需的,因此出现了伪距差分定位。

但是在进行伪距差分定位时,差分基准的不同是否会对定位结果和定位精度产生影响尚未见文献进行分析,而这种影响决定了伪距单点定位所采用的策略。对于多模接收机来说,由于可接收到不同精度的伪距,如果差分基准会影响到定

位结果,那么这种影响分析就显得尤为重要,因此本文的研究具有重要意义。

考虑对不同精度伪距进行伪距差分定位时,差分基准选择的不同可能会对定位结果产生影响,本文分别分析了基本伪距定位的精度、同精度伪距差分定位的精度和不同精度伪距差分定位的精度,同时证明了它们的等价性,并对它们算法的效率也进行了简单的比较。

1 伪距单点定位模型

为描述简便,在这里将直接把位置和接收机钟差作为未知参量的模型称为基本定位模型(Basic Positioning Model, BPM),将利用伪距单差消除接收机钟差而仅把位置作为未知参量的模型称为单差定位模型(Single-Difference Positioning Model, DPM)。

1.1 基本定位模型

记第*i*颗卫星的位置矢量为 r_i ,与其对应的

* 收稿日期:2013-04-26

作者简介:吕汉峰(1986—),男,河南南阳人,博士研究生,E-mail:hanfeng_lv@nudt.edu.cn;

吴杰(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:wujie_nudt@sina.com

修正后的伪距观测值为 ρ_i (已经过卫星钟差、电离层误差、对流层误差等修正),接收天线电气相位中心的位置矢量为 \mathbf{r} ,接收机钟差为 δt ,则伪距观测方程^[5]可表示如下:

$$\rho_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| + c \cdot \delta t + \varepsilon_i \quad (1)$$

其中, c 表示光速, ε_i 表示均值为 0、方差为 σ_i 的随机噪声,且 σ_i 与 $\sigma_j (i \neq j)$ 相互独立。

对式(1)进行线性化处理可得:

$$\rho_i - d_{(k)}^i = \mathbf{e}_{(k)}^i \cdot \Delta \mathbf{r}_{(k)} + c \cdot \delta t + \varepsilon_i \quad (2)$$

其中, $d_{(k)}^i$ 为接收天线电气相位中心至第 i 号卫星的距离, $\mathbf{e}_{(k)}^i$ 为两者的单位方向矢量, $\Delta \mathbf{r}_{(k)}$ 为位置矢量误差。

对于 n 颗卫星则可形成形如式(2)的 n 个伪距观测方程。记:

$$X_{4 \times 1} \triangleq \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{r}_{(k)} \\ c \cdot \delta t \end{pmatrix}, Y_{n \times 1} \triangleq \begin{pmatrix} \rho_1 - d_{(k)}^1 \\ \vdots \\ \rho_n - d_{(k)}^n \end{pmatrix},$$

$$V_{n \times 1} \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, E_{n \times 3} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{(k)}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{(k)}^n \end{pmatrix}, N_{n \times 1} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{n \times 4} \triangleq (E \quad N).$$

则得到基本定位模型为:

$$Y = AX + V \quad (3)$$

1.2 单差定位模型

对于一般的导航用户而言接收机的钟差并不是必需的参量,因此可不予求解。即在式(1)的基础上,将两个伪距观测值进行单差以消除接收机的钟差 δt 的影响。若以第 j 号卫星的伪距观测值为单差基准,则得到下式:

$$\rho_i - \rho_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| + \varepsilon_i - \varepsilon_j \quad (4)$$

采用与式(2)相同的线性化处理方法,并记:

$$\hat{X}_{3 \times 1} \triangleq (\Delta \mathbf{r}_{(k)}),$$

$$\hat{Y}_{(n-1) \times 1} \triangleq \begin{pmatrix} \rho_1 - d_{(k)}^1 - (\rho_j - d_{(k)}^j) \\ \vdots \\ \rho_n - d_{(k)}^n - (\rho_j - d_{(k)}^j) \end{pmatrix},$$

$$\hat{V}_{(n-1) \times 1} \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_n - \varepsilon_j \end{pmatrix}, \hat{E}_{(n-1) \times 3} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{(k)}^1 - \mathbf{e}_{(k)}^j \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{(k)}^n - \mathbf{e}_{(k)}^j \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{(n-1) \times 3} \triangleq \hat{E}.$$

则得到单差定位模型为:

$$\hat{Y} = \hat{A}\hat{X} + \hat{V} \quad (5)$$

2 等价性推证及运算效率分析

具体到本文的研究,这里提到的等价是指利

用两种定位模型得到的定位结果和定位精度在理论上是等同的。如果这种等价成立,那么就认为这两种模型具有等价性。

对于一般的伪距单点定位来说,可认为伪距观测值的精度是相同的,如 GPS 系统的伪距观测值精度;对于 BeiDou 系统来说,由于它由不同性质轨道的卫星构成,因此伪距观测值的精度会有所不同。另外对于多模接收机来说,不同 GNSS 系统的伪距观测值精度也有区别。因此在利用最小二乘方法对式(3)和式(5)进行求解时,会涉及伪距观测值等权与否的问题,同时对于单差定位模型还会涉及到单差基准选取的问题。

根据以上分析,将位置最小二乘解的等价性证明分为三个层次:在伪距观测值等精度的前提下选取第 1 颗卫星的伪距观测值作为单差基准的情形称为基本等价性推证;在伪距观测值等精度的前提下任取第 j 颗卫星伪距观测值作为单差基准的情形称为扩充等价性证明;对于不等精度伪距观测值和任取第 j 颗卫星伪距观测值作为单差基准的情形称为一般等价性证明。

2.1 基本等价性推证

假定所有伪距观测值的精度均为 σ ,则式(3)、式(5)中的观测噪声 V 和 \hat{V} 的方差阵 D_V 和 $D_{\hat{V}}$ 分别为:

$$D_V = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \triangleq \sigma^2 I_n \quad (6)$$

$$D_{\hat{V}} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \sigma^2 R_{n-1}^{-1} \quad (7)$$

其中 I_n 为 n 阶单位矩阵, R_{n-1} 为 $n-1$ 阶对称阵。

式(3)的最小二乘解 X 及解的精度 D_X 为:

$$\begin{cases} X = (A^T A)^{-1} A^T Y \\ D_X = \sigma^2 (A^T A)^{-1} \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)可以看出 $D_{\hat{V}}$ 不是对角阵,也就是说单差定位模型式(5)中 \hat{Y} 的各元素不相互独立,因此不能直接利用最小二乘进行求解。但 $D_{\hat{V}}$ 是正定矩阵,因而必定与对角阵相似,也就是必然存在正交矩阵使得 \hat{Y} 经过正交变换后各元素相互独立。但变换后各元素的精度不再相等,因此要考虑对不同元素的信赖程度,这个过程也是高斯-马尔科夫最小二乘估计^[6]的核心思想。式(5)

的高斯 - 马尔科夫最小二乘解 \hat{X} 及解的精度 $D_{\hat{X}}$ 为:

$$\begin{cases} \hat{X} = (\hat{A}^T R \hat{A})^{-1} \hat{A}^T R \hat{Y} \\ D_{\hat{X}} = \sigma^2 (\hat{A}^T R \hat{A})^{-1} \end{cases} \quad (9)$$

其中 R 为权矩阵, 与式(7)中的 R_{n-1} 为同一矩阵。

由式(3)易知:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} E^T E & E^T N \\ N^T E & N^T N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E^T E & E^T N \\ N^T E & n \end{pmatrix}^{-1} \quad (10)$$

结合式(3)、式(8)和式(10), 并根据矩阵理论^[7]可知, $\Delta r_{(k)}$ 的最小二乘估计值及估计精度 $D_{\Delta r}$ 分别为:

$$\begin{cases} \Delta r_{(k)} = (E^T E - 1/n E^T N N^T E)^{-1} E^T (I - 1/n N N^T) Y \\ D_{\Delta r} = \sigma^2 (E^T E - 1/n E^T N N^T E)^{-1} \end{cases} \quad (11)$$

令:

$$K \triangleq \begin{pmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times n}$$

则由 E 和 \hat{E} 及 Y 和 \hat{Y} 的定义易知存在如下关系:

$$\begin{cases} \hat{E} = KE \\ \hat{Y} = KY \end{cases} \quad (12)$$

将式(12)代入式(9)可得:

$$\begin{cases} \hat{X} = (E^T K^T R K E)^{-1} E^T K^T R K Y \\ D_{\hat{X}} = \sigma^2 (E^T K^T R K E)^{-1} \end{cases} \quad (13)$$

由式(7)易知:

$$R = \begin{pmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1/n & 1-1/n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1/n \\ -1/n & \cdots & -1/n & 1-1/n \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

则根据矩阵乘法得:

$$\begin{aligned} K^T R K &= \begin{pmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1/n & 1-1/n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1/n \\ -1/n & \cdots & -1/n & 1-1/n \end{pmatrix}_{n \times n} \\ &= I_n - 1/n N N^T \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)得:

$$\begin{cases} \hat{X} = [E^T (I_n - 1/n N N^T) E]^{-1} E^T (I_n - 1/n N N^T) Y \\ D_{\hat{X}} = \sigma^2 [E^T (I_n - 1/n N N^T) E]^{-1} \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)与式(11)比较可知, 两者完全相等, 也就是说基本定位模型和单差定位模型的位置最小二乘解在此种情形下等价。

2.2 扩充等价性推证

若单差基准取第 j 颗卫星的伪距观测值, 则由式(5)可知, 其最小二乘解和解的精度依然具有式(9)的形式, 并且其观测噪声的方差阵大小仍然为 $D_{\hat{v}}$, 即权矩阵 R 不变。改变的只有式(12)中的 K 矩阵, 此时 K 矩阵的第 j 列全为 -1 。因此该情形的关键是证明此时 $K^T R K$ 依然为式(14)。

为运算方便对 K 矩阵进行分块:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \end{pmatrix}_{(n-1) \times n} \quad (16)$$

其中, K_{11} 表示 $j-1$ 阶单位矩阵, K_{12} 表示元素均为 -1 的 $(j-1) \times 1$ 维矩阵, K_{13} 表示 $(j-1) \times (n-j)$ 维零矩阵, K_{21} 表示 $(n-j) \times (j-1)$ 维零矩阵, K_{22} 表示元素均为 -1 的 $(n-j) \times 1$ 维矩阵, K_{23} 表示 $n-j$ 阶单位矩阵。

根据分块矩阵乘法对各个子矩阵维数的要求对 R 矩阵进行分块:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

其中, R_{11} 和 R_{22} 具有与 R 矩阵同样的形式, 即对角线元素为 $1-1/n$ 、其余元素均为 $-1/n$ 的对角阵, 且 R_{11} 为 $j-1$ 阶, R_{22} 为 $n-j$ 阶; R_{12} 是元素均为 $-1/n$ 的 $(j-1) \times (n-j)$ 维矩阵; R_{21} 是元素均为 $-1/n$ 的 $(n-j) \times (j-1)$ 维矩阵。

考虑到 K_{11} 和 K_{23} 是单位阵, K_{13} 和 K_{21} 是零矩阵, 则:

$$K^T R K = \begin{pmatrix} R_{11} & (R_{11} \ R_{12}) \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} & R_{12} \\ \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{pmatrix} \\ R_{21} & (R_{21} \ R_{22}) \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} & R_{22} \end{pmatrix}$$

因:

$$\begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}^T = [-1, -1, \dots, -1]_{1 \times (n-1)}$$

故:

$$\begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} = [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}]_{1 \times (j-1)}$$

$$\begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{pmatrix} = [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}]_{1 \times (n-j)}$$

$$(R_{11} \ R_{12}) \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} = [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}]_{1 \times (j-1)}^T$$

$$(R_{21} \quad R_{22}) \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} = \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n} \right]_{1 \times (n-j)}^T$$

$$\begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} = 1/n \times (n-1) = 1 - 1/n$$

可知:

$$K^T R K = I_n - 1/n N N^T$$

即与式(14)同,也就是说在伪距观测值同精度时,任取其中一个作为单差基准,与取第一个伪距观测值作为单差基准的单差定位模型的位置最小二乘解及解的精度相同。

2.3 一般等价性推证

若各伪距观测值精度不同,记精度最小为 σ ,为后续表示方便,可将各伪距观测值精度 σ_i 表示为:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 / k_i$$

$$D_{\hat{v}} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_j} & \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_{j-1}} + \frac{1}{k_j} & \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_j} \\ \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_j} & \frac{1}{k_{j+1}} + \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_j} & \frac{1}{k_j} & \cdots & \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_j} \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \triangleq \sigma^2 R^{-1} \quad (18)$$

记:

$$\hat{\Lambda} \triangleq \begin{pmatrix} k_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & k_{j-1} & & & \\ & & & k_{j+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & k_n \end{pmatrix},$$

$$\hat{N}^T \triangleq (1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)}, k \triangleq \sum_{i=1}^n k_i,$$

则:

$$R^{-1} = \hat{\Lambda}^{-1} + \frac{1}{k} \hat{N} \hat{N}^T$$

利用矩阵理论^[7]可得:

$$R = \hat{\Lambda} - \frac{1}{k} \hat{\Lambda} \hat{N} \hat{N}^T \hat{\Lambda} \quad (19)$$

由于各伪距观测值精度不同,基本定位模型也要用高斯-马尔科夫最小二乘进行求解,则参考式(9),基本定位模型的最小二乘解及解的精度为:

$$\begin{cases} \hat{X} = (A^T A A)^{-1} A^T A \hat{Y} \\ D_{\hat{X}} = \sigma^2 (A^T A A)^{-1} \end{cases} \quad (20)$$

其中, $0 < k_i \leq 1$, 则对于基本定位模型式(3), 其观测噪声 V 的方差阵 D_V 为:

$$D_V = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{k_n} \end{pmatrix} \triangleq \sigma^2 \Lambda^{-1} \quad (17)$$

其中:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

对于单差定位模型式(5), 取第 j 颗卫星的伪距观测值为单差基准, 则其观测噪声 \hat{V} 的方差阵 $D_{\hat{v}}$ 为:

参照 2.1 节中 $\Delta r_{(k)}$ 和 $D_{\Delta r}$ 的求解过程, 可得:

$$\begin{cases} \Delta r_{(k)} = [E^T (\Lambda - \frac{1}{k} \Lambda N N^T \Lambda) E]^{-1} E^T (\Lambda - \frac{1}{k} \Lambda N N^T \Lambda) Y \\ D_{\Delta r} = \sigma^2 [E^T (\Lambda - \frac{1}{k} \Lambda N N^T \Lambda) E]^{-1} \end{cases} \quad (21)$$

单差定位模型的最小二乘解及解的精度仍为式(13), 其中的 K 矩阵如式(16), R 矩阵如式(19)。比较 N 和 \hat{N} 可知, 两者存在如下关系:

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} I_{j-1} & O_1 & O_2 \\ O_3 & O_4 & I_{n-j} \end{pmatrix} N \triangleq F N$$

其中, I_{j-1} 为 $j-1$ 阶单位矩阵, O_1 为 $(j-1) \times 1$ 维零矩阵, O_2 为 $(j-1) \times (n-j)$ 维零矩阵, O_3 为 $(n-j) \times (j-1)$ 维零矩阵, O_4 为 $(n-j) \times 1$ 维零矩阵, I_{n-j} 为 $n-j$ 阶单位矩阵。

则:

$$K^T R K = K^T \hat{\Lambda} K - \frac{1}{k} K^T \hat{\Lambda} F N N^T F^T \hat{\Lambda} K$$

通过矩阵乘法可得:

$$\begin{aligned}
 K^T \hat{A} K &= \begin{pmatrix} k_1 & & 0 & -k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & k_{j-1} & -k_{j-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & \cdots & -k_{j-1} & k-k_j & -k_{j+1} & \cdots & -k_n \\ 0 & \cdots & 0 & -k_{j+1} & k_{j+1} & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -k_n & 0 & & k_n \end{pmatrix} = \Lambda - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_{j-1} & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 & \cdots & k_{j-1} & 2k_j - k & k_{j+1} & \cdots & k_n \\ 0 & \cdots & 0 & k_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda - B \\
 K^T \hat{A} F &= \begin{pmatrix} k_1 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & k_{j-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & \cdots & -k_{j-1} & 0 & -k_{j+1} & \cdots & -k_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & k_{j+1} & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & k_n \end{pmatrix} = \Lambda - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 & \cdots & k_{j-1} & k_j & k_{j+1} & \cdots & k_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda - C
 \end{aligned}$$

则:

$$\begin{aligned}
 K^T \hat{A} F N N^T F^T \hat{A} K &= (\Lambda - C) N N^T (\Lambda - C)^T \\
 &= \Lambda N N^T \Lambda - \Lambda N N^T C^T - C N N^T \Lambda + C N N^T C^T
 \end{aligned}$$

容易计算得到:

$$\Lambda N N^T C^T + C N N^T \Lambda - C N N^T C^T = k B$$

综上可得:

$$\begin{aligned}
 K^T R K &= \Lambda - B - \frac{1}{k} (\Lambda N N^T \Lambda - k B) \\
 &= \Lambda - \frac{1}{k} \Lambda N N^T \Lambda \tag{22}
 \end{aligned}$$

将式(22)代入式(13)与式(21)比较后发现,两者完全相同,也就是说即便在伪距观测值不等精度的情况下单差定位模型解和精度依然与基本定位模型解和精度相同。

2.4 运算效率分析

从式(8)、式(9)和式(20)可以看出,如果位置的最小二乘解可以得到,那么解的精度就可迅速获取而不需要重新计算,因此这里仅分析得到最小二乘解所需要的运算次数。

在统计运算次数时做如下假设:一次减法运算等价于一次加法运算,一次除法运算等价于一次乘法运算。若 $M_{n \times n}$ 表示 n 阶可逆方阵, M^* 为其伴随矩阵, M^{-1} 为其逆矩阵, $|M|$ 为其行列式, $S_{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维矩阵, $T_{m \times l}$ 表示 $m \times l$ 维矩阵,根据矩阵加法、乘法和求逆运算的规则,可得常用矩阵运算所需的加法和乘法次数如表 1 所示。

表 1 矩阵运算的加法乘法次数

Tab. 1 Basic operation times of matrix

矩阵运算	加法次数	乘法次数
ST	$n(m-1)l$	nml
$S+S$	nm	0
$ M $	$n! - 1$	$(n-1)n!$
M^*	$n^2[(n-1)! - 1]$	$n^2(n-2)(n-1)!$
M^{-1}	$(n+1)! - n^2 - 1$	$(n^2 - n - 1)n! + n^2$

对于式(9)和式(20)中的权矩阵 R 和 Λ ,由于其矩阵元素的形式已知,故不采用常规矩阵求逆运算。若有 n 个伪距观测值,当它们精度相同时,只需进行 1 次加法和 1 次乘法运算即可获取 R 的所有元素;当精度不同时,需进行 $2(n-1)$ 次加法和 n^2 次乘法运算获取 R 的所有元素,需要进行 n 次乘法获取 Λ 的所有元素。利用表 1,并根据式(8)、式(9)和式(20)可大致统计出基本定位模型和单差定位模型最小二乘解所需的基本运算次数,如表 2 所示。

表 2 n 个伪距观测值时基本运算次数统计

Tab. 2 Basic operation times of n pseudo-ranges for positioning

定位模型	加法次数	乘法次数
相等精度 BPM	$32n + 83$	$36n + 280$
相等精度 DPM	$3n^2 + 11n - 11$	$3n^2 + 15n - 22$
不等精度 BPM	$4n^2 + 28n + 83$	$4n^2 + 37n + 280$
不等精度 DPM	$3n^2 + 13n - 14$	$4n^2 + 15n - 23$

根据表 2 可知,对于相等精度伪距观测值的情形,当伪距观测值的个数 $n \leq 10$ 时,单差定位

模型的计算效率要高于基本定位模型,但 n 越大这种效率优势就越不明显,当 $n > 14$ 时单差定位模型的计算效率就低于基本定位模型;对于不等精度伪距观测值的情形,伪距观测值的个数越多,单差定位模型的计算效率就越比基本定位模型的高,其效率优势就越明显。也就是说,单差定位模型更适用于多模接收机的定位解算。

3 实验结果与分析

采用测量型天线和某型号接收机于 2010 年 4 月 28 日在某已知点静止采集 GPS 伪距数据 20min。这些伪距观测值的精度可认为是相同的,为分析不等精度时两种定位模型的解,特将这些观测值的精度进行了适当的调整。

在 PC 机上 C 语言环境下采用 WGS84 坐标系对伪距数据进行如下处理:

- (1)对等精度的伪距观测值分别采用基本定位模型和单差定位模型进行位置解算;
- (2)对等精度的伪距观测值通过取不同的单差基准采用单差定位模型进行位置解算;
- (3)对不等精度的伪距观测值分别采用基本定位模型和单差定位模型进行位置解算;
- (4)选取含有 5 颗星的某一历元和含有 9 颗星的某一历元,针对等精度和不等精度的情形分别采用基本定位模型和单差定位模型进行位置解算并重复 10 000 次,记录所需时间。

这里仅绘制出两种定位模型位置差的 X 向分量来说明问题,如图 1 ~ 图 3 所示;两种定位模型运算效率的比较见表 3 所示。

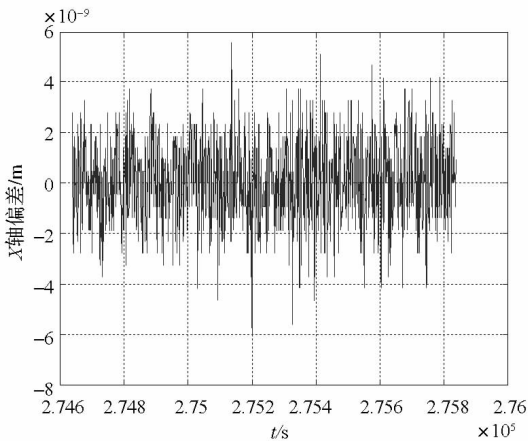


图 1 等精度 BPM 和 DPM 位置解的比较
Fig. 1 Comparison of position of BPM and DPM with equal precision pseudo-ranges

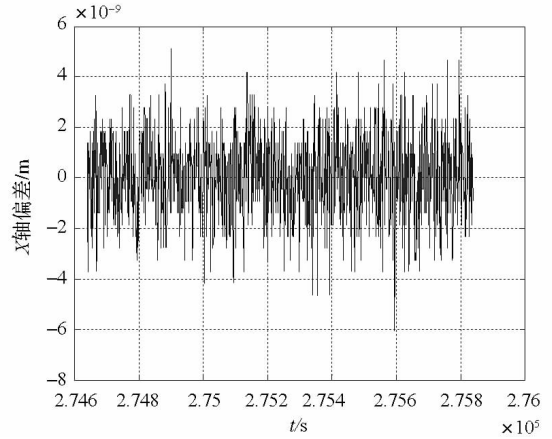


图 2 等精度不同单差基准 DPM 位置解的比较
Fig. 2 Comparison of position of DPM with equal precision pseudo-ranges but different range reference

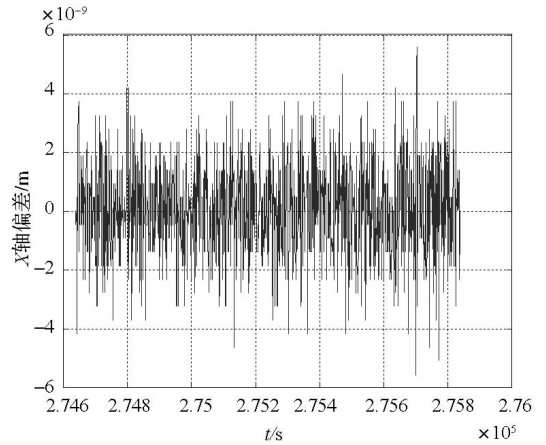


图 3 不等精度 BPM 和 DPM 位置解的比较
Fig. 3 Comparison of position of BPM and DPM with unequal precision pseudo-ranges

表 3 BPM 和 DPM 运算效率比较 (ms)

Tab. 3 Comparison of operation efficiency of BPM and DPM (unit: ms)

	5 颗卫星	9 颗卫星
相等精度 BPM	468	516
相等精度 DPM	375	562
不等精度 BPM	500	766
不等精度 DPM	360	547

图 1 显示了在等精度伪距情况下分别采用 BPM 模型和 DPM 模型所获得的定位结果的差值情况,图 2 显示了在等精度伪距情况下采用不同单差基准情形时 DPM 模型所获得的定位结果的差值情况,图 3 显示了在不等精度伪距情况下分别采用 BPM 模型和 DPM 模型所获得的定位结果的差值情况。可以看出三幅图中的差值均在 10^{-9} m 量级,这主要是由计算误差引起

的,因此可认为三种情形下 BPM 模型定位结果和 DPM 模型定位结果相同,这进一步验证了前述理论分析的正确性。表 3 中分别统计了有 5 颗和 9 颗卫星时采用 BPM 和 DPM 进行定位时的耗时情况。可以看出,在等精度伪距情形下,5 颗卫星时 DPM 模型定位相对于 BPM 模型的效率优势要比 9 颗卫星时的更明显;在不等精度伪距情形下,9 颗卫星时 DPM 模型定位相对于 BPM 模型的效率优势要比 5 颗卫星时的更明显,这与之前的运算效率分析结果基本相符。

4 结论

(1) 不管伪距观测值等精度与否,两种定位模型的最小二乘位置解和解的精度是等价的;

(2) 采用单差定位模型进行解算时,单差基准的选择不会影响位置解和解的精度;

(3) 对于等精度的伪距观测值,当伪距数目在 10 个及以下时,单差定位模型的运算效率比基本定位模型的要高些,随着伪距数的增加,这种效率优势变得不明显,当伪距数大于 14 时,基本定位模型的运算效率就高于单差定位模型;

(4) 对于不等精度的伪距观测值,单差定位模型的运算效率比基本定位模型的要高,并且伪距数越多,这种优势越明显;

(5) 单差定位模型更适用于多模接收机进行位置解算。

参考文献 (References)

- [1] 李征航,黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.
LI Zhenghang, HUANG Jinsong. GPS surveying and data processing[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2005. (in Chinese)
- [2] 刘伟平,郝金明,汪平. 标准单点定位与精密单点定位精度对比研究[J]. 测绘通报, 2010(4):5-7.
LIU Weiping, HAO Jinming, WANG Ping. Research on comparison of the precision of standard point positioning and precise point positioning [J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2010(4):5-7. (in Chinese)
- [3] 胡文涛,徐国杰. 基于单点定位的伪距双差研究及程序实现[J]. 测绘信息与工程, 2009, 34(6):9-10.
HU Wentao, XU Guojie. Research and implementation of pseudo-range double difference based on single point positioning[J]. Journal of Geomatics, 2009, 34(6):9-10. (in Chinese)
- [4] 廖华. GPS 伪距单点定位算法的综合比较[J]. 测绘科学, 2011, 36(1):20-21.
LIAO Hua. Comprehensive comparisons on single-positioning algorithms of GPS pseudo-range[J]. Science of Surveying and Mapping, 2011, 36(1)20-21. (in Chinese)
- [5] 刘基余. GPS 卫星导航定位原理与方法[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2008.
LIU Jiyu. GPS Satellite Navigation Principles and Methods[M]. 2nd Edition. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [6] 秦永元,张洪钺,汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2007.
QIN Yongyuan, ZHANG Hongyue, WANG Shuhua. Kalman filter and integrated navigation orinciples[M]. Xi'an: North-Western Polytechnical University Press, 2007. (in Chinese)
- [7] Wilkinson J H, 石钟慈, 邓健新. 代数特征值问题[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
Wilkinson J H, SHI Zhongci, DENG Jianxin. The algebraic eigenvalue problem[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)