

基于运动合成的小推力轨道优化方法*

蒋小勇,张洪波,汤国建

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:针对小推力轨道优化设计问题,提出一种基于运动合成的新方法。给出基于运动合成的小推力轨道机动表达方式,将小推力轨道运动分解成相对独立的三项:单独考虑日心引力的二体轨道运动,单独考虑小推力的运动,以及小推力的存在引起的日心引力摄动作用下的运动。分别给出各项运动的解析表达式,通过合成叠加得到小推力轨道的近似解析解。在此基础上,将小推力轨道优化问题转化成非线性规划问题,并利用序列二次规划方法求解。以小行星 1989ML、火星和金星交会任务为例分别进行仿真实验,结果表明,所设计轨道满足任务约束,验证了该方法具有可用性和高效性。

关键词:运动合成;小推力;转移轨道;非线性规划

中图分类号: V412.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2014)01-041-05

A low-thrust trajectory optimization method based on motion synthesis

JIANG Xiaoyong, ZHANG Hongbo, TANG Guojian

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A novel method based on motion synthesis is proposed for low-thrust trajectory design and optimization. Firstly, the representation of the low-thrust trajectory was obtained by using the motion synthesis technique. In this representation, the equations of motion was decomposed into three independent motions and the analytical expressions of the three motions were deduced separately. Then the approximate analytical expression of the low-thrust trajectory was obtained by synthesizing of the three motions. Secondly, based on this representation, the original problem was converted into a nonlinear programming problem. Finally, the method was applied to three rendezvous missions: from the Earth to the asteroid 1989ML, to the Mars, and to the Venus respectively. It is shown that the transfer orbits satisfy the mission constraints. Numerical results fully validate the availability and the high efficiency of the method.

Key words: motion synthesis; low-thrust; transfer orbit; nonlinear programming

小推力轨道的表达是解决小推力轨道优化问题的一个关键技术,也是对其优化方法分类的准则。目前较为通用的优化方法包括间接法、直接法和标称轨道法。间接法^[1-3]视原问题为最优控制问题,基于庞特里亚金极小值原理,用变分法推导最优控制的一阶必要条件和终端横截条件,最终将问题归结为用数值方法求解的两点边值问题。这种方法通过对协状态变量的直接数值积分来表达小推力轨道。其主要技术瓶颈在于协状态变量初始猜测不易确定,而且结果对初始猜测的依赖性高,收敛域小。直接法是通过离散和参数化,将原问题转换成非线性规划问题。目前较为常见的直接法是配点法^[4]和伪谱法^[5],它们都是同时离散控制变量和状态变量,用多项式来拟合小推力轨道。它们能避免轨道数值积分,但离散

的状态变量的初值不容易简便地给出,对结果有效性和鲁棒性有影响。近年来,标称轨道法,如指数正弦曲线法^[6-7]和逆多项式法^[8]等,在新任务初步评估的应用十分广泛。它是将小推力轨道表达为一簇参数化曲线,通过调节这些参数来满足任务约束。再由已确定的解析曲线逆向求解,得到相应的小推力方案。就目前而言,该方法主要应用在飞越任务和近似为同一平面内的轨道转移问题,而对于一般三维交会问题的应用则相对较少。

为了解决一般的三维交会问题,本文提出一种新的基于运动合成的小推力轨道表达方式。该表达方式借鉴了 Byrnes^[9]在计算地月转移轨道时所提出的多圆锥曲线技术,它是将月球探测器的运动分解成一个圆锥曲线运动和数个匀加速直线

* 收稿日期:2013-04-18

作者简介:蒋小勇(1986—),男,安徽庐江人,博士研究生,E-mail:jiangxiao-yong@163.com;
汤国建(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:tanguojian@nudt.edu.cn

运动以近似解析求解。基于运动合成的表达方式基于该思想,将探测器的运动分解成相对独立的三项运动:单独考虑日心引力的二体轨道运动,单独考虑小推力的运动,以及小推力的存在引起的日心引力摄动作用下的运动。给出这三项的解析表达式,再通过它们的合成叠加得到小推力轨道的近似解析表达式。在此基础上将轨道优化问题转化成非线性规划问题,形成一种基于运动合成的小推力轨道优化方法。从这种小推力轨道表达方式来看,该方法属于直接法的范畴。最后,通过三项深空交会任务对该方法的有效性进行验证。

1 基于运动合成的小推力轨道表达

在探测器只受日心引力和小推力的假设下,其动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_T \quad (1)$$

其中 \mathbf{r} 为探测器位置矢量, μ 为太阳引力常数, \mathbf{a}_T 为小推力加速度矢量。

在一段时间之内,该动力学方程右端可分解

$$\begin{cases} f = 1 - \frac{\mu^2}{2r_0^3(0)}t^2 + \frac{\mu}{2r_0^4(0)}r_0(0)t^3 - \frac{\mu^2}{24r_0^6(0)}\left[2 - 3\frac{r_0(0)}{\mu}(v_0^2(0) - 5r_0^2(0))\right]t^4 \\ \quad + \frac{1}{8}\frac{\mu^2\dot{r}_0(0)}{r_0^3(0)}\left[2 - \frac{r_0(0)}{\mu}(3v_0^2(0) - 7r_0^2(0))\right]t^5 \\ g = t - \frac{1}{6}\frac{\mu}{r_0^3(0)}t^3 + \frac{1}{4}\frac{\mu}{r_0^4(0)}\dot{r}_0(0)t^4 - \frac{1}{120}\frac{\mu^2}{r_0^6(0)}\left[8 - 3\frac{r_0(0)}{\mu}(3v_0^2(0) - 15r_0^2(0))\right]t^5 \end{cases} \quad (5)$$

其中, $r_0(0)$ 和 $v_0(0)$ 是 $\mathbf{r}_0(0)$ 和 $\mathbf{v}_0(0)$ 的模值, $\dot{r}_0(0) = \frac{\mathbf{r}_0(0) \cdot \mathbf{v}_0(0)}{r_0(0)}$ 。

其次,只考虑小推力加速度 \mathbf{a}_T 的作用。分别给定 \mathbf{a}_T 在这段时间内的初始时刻和终止时刻的值为 $\mathbf{a}_T(0) = [a_{x0} \ a_{y0} \ a_{z0}]^T$ 和 $\mathbf{a}_T(t_f) = [a_{xf} \ a_{yf} \ a_{zf}]^T$, 其中 t_f 为该段时间的终止时刻。而该段时间内的 $\mathbf{a}_T(t)$ 是由 $\mathbf{a}_T(0)$ 和 $\mathbf{a}_T(t_f)$ 插值获得,即

$$\mathbf{a}_T(t) = \mathbf{a}_T(0) + (\mathbf{a}_T(t_f) - \mathbf{a}_T(0)) \frac{t}{t_f} \quad (6)$$

令 $\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_T(0)$, $\mathbf{s}_2 = (\mathbf{a}_T(t_f) - \mathbf{a}_T(0))/t_f$, 则

$$\mathbf{a}_T(t) = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 t \quad (7)$$

对式(7)积分,可得到只考虑小推力加速度 \mathbf{a}_T 作用的位置速度增量,即

$$\begin{cases} \mathbf{v}_T(t) = \int_0^t \mathbf{a}_T(\tau) d\tau = \mathbf{s}_1 t + \frac{\mathbf{s}_2}{2} t^2 \\ \mathbf{r}_T(t) = \int_0^t \mathbf{v}_T(\tau) d\tau = \frac{\mathbf{s}_1}{2} t^2 + \frac{\mathbf{s}_2}{6} t^3 \end{cases} \quad (8)$$

再次,只考虑 $\Delta\mathbf{g}(t)$ 的作用,令其为关于时间

成相对独立的三项,即

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0(t) + \mathbf{a}_T + \Delta\mathbf{g}(t) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{g}_0(t)$ 是假设探测器不受小推力作用的日心引力加速度, $\Delta\mathbf{g}(t)$ 是由于小推力的存在而引起的日心引力加速度摄动。

对这三项逐一考察。首先,只考虑日心引力,有

$$\mathbf{g}_0(t) = -\mu \frac{\mathbf{r}_0(t)}{r_0^3(t)} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{r}_0(t)$ 是只考虑日心引力的探测器位置。在较短时间内, $\mathbf{r}_0(t)$ 和相应的速度 $\mathbf{v}_0(t)$ 可由 f 和 g 级数来表示

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0(t) = f\mathbf{r}_0(0) + g\mathbf{v}_0(0) \\ \mathbf{v}_0(t) = \frac{df}{dt}\mathbf{r}_0(0) + \frac{dg}{dt}\mathbf{v}_0(0) \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{r}_0(0)$ 和 $\mathbf{v}_0(0)$ 分别是初始时刻的 $\mathbf{r}_0(t)$ 和 $\mathbf{v}_0(t)$, 而 f 和 g 级数为

t 的二次多项式

$$\Delta\mathbf{g}(t) = \mathbf{k}_1 t + \mathbf{k}_2 t^2 \quad (9)$$

其中,系数 \mathbf{k}_1 和 \mathbf{k}_2 都是三维列向量,若要确定它们的值,需要给定 $\Delta\mathbf{g}(t)$ 在两个点的值。由于 $\Delta\mathbf{g}(t)$ 可近似表示为

$$\Delta\mathbf{g}(t) = -\mu \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} + \mu \frac{\mathbf{r}_0(t)}{r_0^3(t)} \approx -\mu \frac{\mathbf{r}_1(t)}{r_1^3(t)} + \mu \frac{\mathbf{r}_0(t)}{r_0^3(t)} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{r}_1(t)$ 是同时考虑 $\mathbf{g}_0(t)$ 和 \mathbf{a}_T 的探测器位置,有

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_T(t) \quad (11)$$

因此,根据式(4)和式(8),可由式(10)近似得到 $\Delta\mathbf{g}(t)$ 在中间点和终止点的值 $\Delta\mathbf{g}(\frac{t_f}{2})$ 和 $\Delta\mathbf{g}(t_f)$, 从而可以确定系数 \mathbf{k}_1 和 \mathbf{k}_2 :

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{g}(t_f) = \mathbf{k}_1 t_f + \mathbf{k}_2 t_f^2 \\ \Delta\mathbf{g}(\frac{t_f}{2}) = \mathbf{k}_1 \frac{t_f}{2} + \mathbf{k}_2 \frac{t_f^2}{4} \end{cases} \quad (12)$$

解式(12)可得

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \frac{\left(4\Delta\mathbf{g}\left(\frac{t_f}{2}\right) - \Delta\mathbf{g}(t_f)\right)}{t_f} \\ \mathbf{k}_2 = \frac{\left(2\Delta\mathbf{g}(t_f) - 4\Delta\mathbf{g}\left(\frac{t_f}{2}\right)\right)}{t_f^2} \end{cases} \quad (13)$$

对式(9)积分,可得到只考虑 $\Delta\mathbf{g}(t)$ 作用的位置速度增量,即

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{v}(t) = \int_0^t \Delta\mathbf{g}(t) dt = \frac{\mathbf{k}_1}{2}t^2 + \frac{\mathbf{k}_2}{3}t^3 \\ \Delta\mathbf{r}(t) = \int_0^t \Delta\mathbf{v}(t) dt = \frac{\mathbf{k}_1}{6}t^3 + \frac{\mathbf{k}_2}{12}t^4 \end{cases} \quad (14)$$

最后,合成上述三项运动,可以得到探测器状态的近似解析解

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0(t) + \mathbf{v}_T(t) + \Delta\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_T(t) + \Delta\mathbf{r}(t) \end{cases} \quad (15)$$

由此可以得到探测器在该段时间内终止时刻状态的近似解析解。将这一状态作为下一时间段的初始状态,不断迭代上述过程,最终可以获得整个轨道的终端状态。

2 基于运动合成的小推力轨道优化

由上节的推导可知,对于一段小推力轨道,只需给出初始状态 $\mathbf{r}(0)$ 和 $\mathbf{v}(0)$ 、转移时间以及始末点的小推力加速度矢量 $\mathbf{a}_T(0)$ 和 $\mathbf{a}_T(t_f)$,就可以由式(15)得到该段内小推力轨道的近似解析解。那么,对于划分成 N 段的小推力轨道,给定轨道的初始状态、转移时间以及 $N+1$ 个小推力矢量 \mathbf{T}_i (假设每一段末端的 $\mathbf{T}_i(t_f)$ 和下一段起始点的 $\mathbf{T}_{i+1}(0)$ 相重合,因此 N 段轨道共需 $N+1$ 个值,这样既可以保证小推力的连续性,又降低了输入参数的维度。),整个轨道的状态也就可以近似解析确定。因此,小推力轨道优化问题可以自然地转化成非线性规划问题,该非线性规划问题的输入参数为

$$\mathbf{y} = [t_0 \quad t_f^{total} \quad T_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad T_{N+1} \quad \alpha_{N+1} \quad \beta_{N+1}]^T \quad (16)$$

其中, t_0 为轨道的初始时刻,给定 t_0 则初始状态确定。 t_f^{total} 为整个轨道的终了时刻, T_i 由球坐标 $[T_i \quad \alpha_i \quad \beta_i]^T$ 来表示,其中 T_i 为推力幅值, α_i 为

方位角, β_i 为高低角。这种表示方式能方便地给出推力幅值约束,它与直角坐标的转化如下:

$$\begin{cases} T_x = T\cos(\beta)\cos(\alpha) \\ T_y = T\cos(\beta)\sin(\alpha) \\ T_z = T\sin(\beta) \end{cases} \quad (17)$$

目标函数取最小化轨道机动的能量消耗,即

$$J = \int_{t_0}^{t_f^{total}} \frac{T}{m} dt \quad (18)$$

其中, m 为探测器质量。

交会任务的边界条件为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_0) \\ \mathbf{v}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f^{total}) \\ \mathbf{v}(t_f^{total}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}_f \end{bmatrix} \quad (20)$$

初始状态一般给定为 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{v}_0 ,而 $\mathbf{r}(t_f^{total})$ 和 $\mathbf{v}(t_f^{total})$ 是在输入参数确定后,由上述运动合成技术近似解析求取。优化过程中不断调整输入参数,最终使得式(20)得到满足。

而小推力约束为

$$T_i \leq T_{\max} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

这可以方便地通过在生成输入参数时对推力幅值范围的直接限定来满足。

3 仿真算例及分析

为了验证基于运动合成的小推力轨道优化方法,本文给出三项深空轨道交会任务来进行测试。它们分别是从小行星出发的探测器与小行星 1989ML、火星以及金星交会任务。所涉及的四个任务天体的轨道要素如表 1 所示。三项任务的其他任务约束是相同的:发射窗口为 2020 年 1 月 1 日(58849 MJD)到 2025 年 12 月 31 日(61040 MJD),转移时间为 100 ~ 800 天;小推力幅值限制为低于 0.3N,发动机比冲为 3000s,探测器初始质量为 1000kg;要求交会时位置误差不超过 1.0km、速度误差不超过 1.0m/s。所有仿真计算采用 Intel Core 2 Quad 2.4 GHz 处理器和 MATLAB 编程环境,NLP 求解算法采用序列二次规划方法,具体实现是调用 MATLAB 内嵌的最优化工具箱。

表 1 地球、小行星 1989ML、火星和金星的轨道要素

Tab. 1 Orbital elements of Earth, asteroid 1989ML, Mars and Venus

天体	MJD 时间	半长轴/AU	偏心率	轨道倾角/°	升交点赤经/°	近日点幅角/°	平近点角/°
地球	51544.5	1.000	0.017	0.000	348.739	102.947	100.464
1989ML	55400.0	1.273	0.137	4.378	183.230	104.397	235.951
火星	51544.5	1.524	0.093	1.851	336.041	49.579	355.453
金星	51544.5	0.723	0.007	3.395	131.533	76.681	181.980

表 2 给出了这三项轨道交会任务的仿真结果。首先,三项任务的位置和速度误差都满足任务要求,并且其他各项任务约束都得到满足,说明都设计实现了交会任务,证明了该方法的有效性。其次,三次仿真试验的 CPU 计算时间都在 300 ~ 400s,说明该方法能较快速地获得优化结果。相对而言,到小行星 1989ML 的最优轨道的转移时间最长,但它的计算时间却最短。这是因为,仿真计算时到小行星 1989ML 的转移轨道只被划分成 12 段,而后两者的转移轨道都被划分成 20 段(这将会在下面具体给出的任务结果图中体现出来),因此后两者的优化参数将相应增加,搜索空间更加广阔,计算时间也就相应地长一些。最后,就能量消耗而言,第一项任务的最低,而后两项水平相当。因为任务的其他约束都相同,因此差异性是由轨道要素引起的。在所有轨道要素中半长轴是主要因素,到小行星 1989ML 比到火星能量消耗少,主要是因为前者的半长轴更低。但金星与地球间的半长轴差异与小行星 1989ML 到地球的相当,且比火星的要小,而能量消耗情况却正好相反。这是由升降轨的差别造成的,一般而言,降轨时日心引力将增大,因此相同的能量消耗所产生的机动能力将相应降低,而升轨时与此相反。

表 2 三项交会任务的仿真结果

Tab. 2 Results for three rendezvous missions

任务参数	小行星 1989ML	火星	金星
能量消耗/(km/s)	4.577	5.818	5.870
小推力峰值/N	0.291	0.253	0.286
出发时刻/MJD	60316.833	59548.206	59754.1035
转移时间/d	543.906	416.424	365.224
位置误差/km	0.523	0.271	0.024
速度误差/(m/s)	0.427	0.384	0.649
计算时间/s	312.335	391.097	377.873

图 1 给出了最优地球 - 1989ML 转移轨道在日心黄道惯性系 $X - Y$ 平面内的投影。图中黑实线为小推力转移轨道,灰色虚线为地球轨道,灰色点划线为小行星 1989ML 的轨道。可以看出,经过约 1.3 个轨道周期,探测器从地球出发实现了与小行星 1989ML 的交会。图 2 给出了该最优转移轨道所对应的小推力及其在日心惯性系三轴分

量上的变化曲线。图中共有 13 个转折点,因此优化计算时轨道被分为 12 段。在每段之内小推力都是沿直线变化,各段之间连续但出现拐点,并且小推力幅值都在 0.3N 以内。图 3 和图 4 分别给出了最优地球 - 火星转移轨道及其推力变化曲线。图 5 和图 6 分别给出了最优地球 - 金星转移轨道及其推力变化曲线。从图 4 和图 6 可以看出,优化计算时分段数更多,为 20 段,这样有利于获得能量消耗更省的转移轨道,但会导致计算时间相应增加;两图中小推力幅值也都在 0.3N 以内。

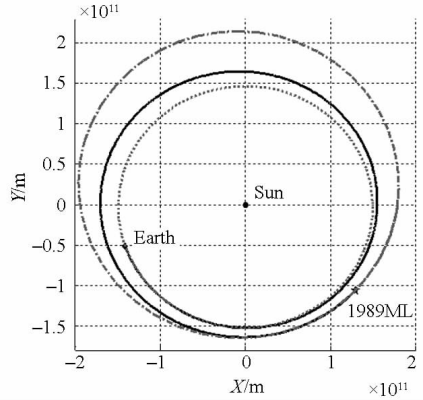


图 1 最优地球 - 1989ML 转移轨道
Fig. 1 Optimal Earth-1989ML transfer

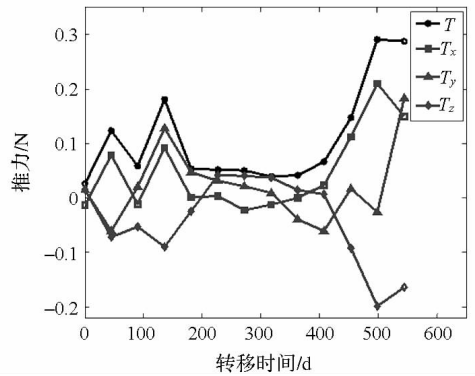


图 2 最优地球 - 1989ML 转移轨道小推力变化曲线
Fig. 2 Thrust profile for optimal Earth-1989ML transfer

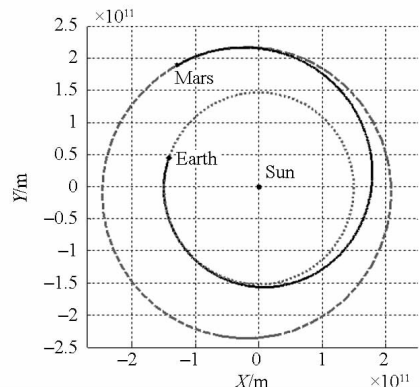


图 3 最优地球 - 火星转移轨道
Fig. 3 Optimal Earth-Mars transfer

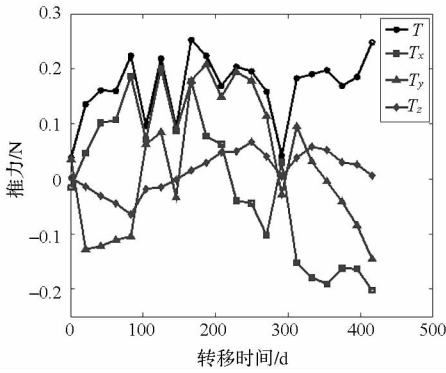


图 4 最优地球 - 火星转移轨道小推力变化曲线
Fig. 4 Thrust profile for optimal Earth-Mars transfer

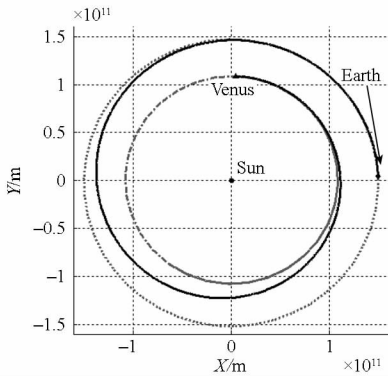


图 5 最优地球 - 金星转移轨道
Fig. 5 Optimal Earth-Venus transfer

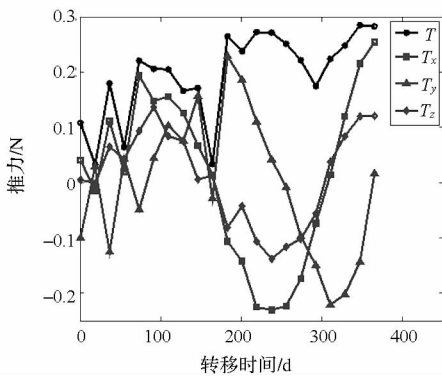


图 6 最优地球 - 金星转移轨道小推力变化曲线
Fig. 6 Thrust profile for optimal Earth-Venus transfer

4 结束语

本文提出了一种基于运动合成的小推力轨道表达方式。它将一段时间内的探测器运动分解成三项相对独立的运动:只考虑日心引力的二体轨道运动,只考虑插值小推力的匀变加速度运动,以及小推力的存在引起的日心引力摄动作用下的运动。给出这三项的解析表达式,再通过它们的合成叠加得到小推力轨道的近似解析表达式。在此

基础上将轨道优化问题转化成非线性规划问题,形成一种基于运动合成的小推力轨道优化方法。并分别通过地球到小行星 1989ML、火星以及金星的交会任务对该方法的有效性进行了验证。仿真结果表明,该方法能适用于多种深空探测任务优化设计,设计轨道满足任务要求,证明了该方法的有效性。同时,仿真试验的 CPU 计算时间在 300 ~ 400s,说明其具有较高的计算效率,能满足任务设计周期需求。

参考文献 (References)

- [1] Christopher L R, Cesar A O. Indirect optimization of three-dimensional finite-burning interplanetary transfers including spiral dynamics [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32 (2): 444 - 454.
- [2] Ranieri C L, Ocampo C A. Indirect optimization of two dimensional finite-burning interplanetary transfers including spiral dynamics [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31 (3): 720 - 728.
- [3] Prussing J E, Sandrik S L. Second-order necessary conditions and sufficient conditions applied to continuous-thrust trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28 (4): 812 - 816.
- [4] 尚海滨,崔祜涛,崔平远,等. 基于改进配点法的星际小推力轨道设计与优化[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39 (12): 1904 - 1907.
SHANG Haibin, CUI Hutao, CUI Pingyuan, et al. Optimization of interplanetary low-thrust transfer trajectory using enhanced transcription and collocation [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39(12): 1904 - 1907. (in Chinese)
- [5] 尚海滨,崔平远,徐瑞,等. 基于高斯伪光谱的星际小推力转移轨道快速优化[J]. 宇航学报, 2010, 31 (4): 1005 - 1011.
SHANG Haibin, CUI Pingyuan, XU Rui, et al. Fast optimization of interplanetary low-thrust transfer trajectory based on Gauss pseudospectral algorithm [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(4): 1005 - 1011. (in Chinese)
- [6] Petropoulos A E, Longuski J M. Shape-based algorithm for automated design of low-thrust gravity-assist trajectories [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2004, 41(5): 787 - 796.
- [7] Izzo D. Lambert's problem for exponential sinusoids [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29 (5): 1242 - 1245.
- [8] Wall B J, Conway B A. Shape-based approach to low-thrust rendezvous trajectory design [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32 (1): 95 - 101.
- [9] Bynnes D V, Hooper H L. Multi-conic: a fast and accurate method of computing space flight trajectories [C]//Proc of Astrodynamics Conference, Santa Barbara: American Astronautical Society and American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1970.