doi:10.11887/j.cn.201401025　　http://journal.nudt.edu.cn

基于PMLM的PD$^{\mu}$运动控制器的设计研究*

王一光[1],陈兴林[1],李晓杰[2]

(1.哈尔滨工业大学 航天学院,黑龙江 哈尔滨 150001;
2.哈尔滨工程大学 自动化学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘　要:近年来随着非整数阶微积分理论的不断完善,使分数阶微积分在控制方面的应用受到越来越多的关注。特别是分数阶PI$^{\lambda}$D$^{\mu}$控制,在很多领域中得到了应用。针对运动控制系统中经常采用的比例微分控制器,提出了一种分数阶PD$^{\mu}$控制器的设计和整定方法。由于所设计系统的相角裕度与超调量有确定的对应关系,所以通过对相角变化率的设计可以使系统相角在剪切频率附近保持稳定,从而减小系统开环增益波动对超调量的影响。以给定的剪切频率ω_c和相角裕度γ_m作为设计指标,由系统相频特性方程和相角变化率方程可以确定PD$^{\mu}$控制器的微分阶次μ和微分系数K_d,通过剪切频率点的幅频特性方程可以确定比例系数K_p。将方法应用于一个直线运动控制试验台,通过与整数阶ITAE最优控制方法进行的对比仿真和试验验证了方法的有效性和优越性。由试验结果可以看出,在保证系统设计指标的前提下所设计的PD$^{\mu}$控制器对于系统参数波动引起的超调量的变化具有很好的抑制作用。

关键词:分数阶微积分;分数阶控制器;PD$^{\mu}$控制器;运动控制

中图分类号:TP273　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001-2486(2014)01-0142-06

A PD$^{\mu}$ motion controller design method for PMLM

WANG Yiguang[1], *CHEN Xinglin*[1], *LI Xiaojie*[2]

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Recently, with the improvement of non-integer order calculus theory, fractional order calculus receives more and more attentions in the application of controlling. Especially, the fractional order PI$^{\lambda}$ D$^{\mu}$ controlling is applied in many fields. For the traditional PD controller which is usually used in motion control system, a kind of designing and tuning method of PD$^{\mu}$ controller is proposed. Since there is explicit corresponding relation between phase margin and overshoot of the designed system, by designing the rate of change of phase the system's phase can be made stable around cut off frequency and the influence of open loop gain's variations on the overshoot can be reduced. Cut-off frequency ω_c and phase margin γ_m given are considered as design specifications in this method. PD$^{\mu}$'s derivation order μ and derivation coefficient K_d can be derived from system's phase equation and rate of change equation. Proportional coefficient K_p can be obtained from the magnitude equation on the cut off frequency. Finally, this method is applied to a linear motion control experiment platform. By simulations and experiments comparing with integer order ITAE-optimal method, the effectiveness and excellence of this method is verified. From the results, it can be noticed that the controlling system designed in this method has a good inhibition effect on the overshoot variations caused by the fluctuations of the system parameters on the premise of meeting the design specifications.

Key words: fractional calculus; fractional order controller; PD$^{\mu}$ controller; motion control

从17世纪Leibniz和L'Hospital提出非整数阶微积分的概念到现在,非整数阶微积分的发展已经有300多年的历史。其间,Euler、Lagrange、Abel、Riemann、Liouville和Letnikov等均对其发展做出过贡献[1]。

由于实际系统一般都是分数阶的[1],采用分数阶才能更好地描述具有分数阶特性系统的本质特征和行为。分数阶控制研究一般包含三方面内容[2]:(1)为精确描述系统而建立的分数阶系统模型;(2)为获得更好控制效果而应用分数阶控制策略;(3)利用分数阶运算对信号、数据等进行处理。本文所涉及内容属于第2方面研究范畴。

PID控制器作为最早实用化的控制器已有50多年历史,现在仍然是应用最广泛的工业控制

* **收稿日期**:2013-05-15
基金项目:国家科技重大专项资助项目(2009ZX02207);国家重点基础研究发展计划项目(973-10007.07-LB7)
作者简介:王一光(1980—),男,黑龙江哈尔滨人,博士研究生,E-mail:yiguangwang@yahoo.com;
陈兴林(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:hitautomation@yahoo.com

器[3-4]。近些年来分数阶 PID 的理论与应用问题引起了越来越多的关注[5-10]。Podlubny[5] 首先提出了分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$,由于其比整数阶 PID 控制器多 2 个可调变量,所以设计起来更加灵活、准确。Lv[6] 提出了一种基于 ISE 准则的分数阶控制器。Ma [7] 将分数阶 PI^{λ} 控制器运用于运动控制系统。文献[8-10]给出了分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的整定和设计方法。Chen[11] 讨论了整数阶 PID 控制器针对参数变化的鲁棒性。尽管 Xue[12] 针对 ISE 和 ITAE 标准,设计了最优分数阶 PID 和 PI 控制器,并讨论了参数变化情况下系统的鲁棒性,但未以鲁棒性作为控制目标,并且未设计专门针对参数波动的分数阶控制器。本文提出了一种把参数波动的鲁棒性作为设计目标的分数阶 PD^{μ} 控制器设计方法,经过试验和比较证明其对于系统参数波动所引起的超调量的变化具有很好的抑制作用。

1　控制对象

在直线运动控制中,比较常用的是永磁直线电机(PMLM), 模型结构如图 1 所示,动力学表达式[13]为

$$M\ddot{x}+D\dot{x}=F_m \tag{1}$$

$$K_e\dot{x}+L_a\frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t}+R_aI_a=u(t) \tag{2}$$

$$F_m=K_mI_a \tag{3}$$

其中,x 表示位置;M、D、F_m 分别表示力学参数中的惯性、粘性、电机推力;u、I_a、R_a、L_a 分别表示直流电压、电枢电流、电枢电阻和电枢电感;K_m 表示电动机推力系数,K_e 是反电动势系数。

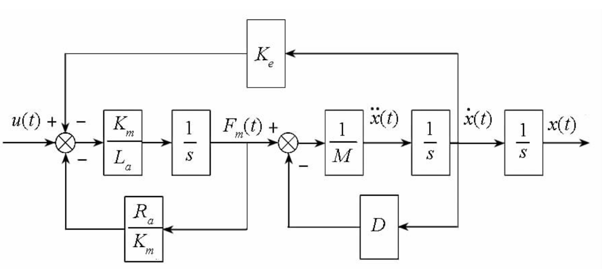

图 1　PMLM 模型

Fig. 1　Model of PMLM

由于电气时间常数通常远小于机械时间常数,所以忽略电枢电感,取 $L_a=0$。简化模型为:

$$\ddot{x}=-\frac{K_eK_m+R_aD}{MR_a}\dot{x}+\frac{K_m}{MR_a}u \tag{4}$$

控制对象的传递函数为:

$$G(s)=\frac{\dfrac{K_m}{K_eK_m+R_aD}}{s\left(\dfrac{R_aM}{K_eK_m+R_aD}s+1\right)} \tag{5}$$

因为 $G(s)$ 的分子可由控制器参数 K_p 来调整,所以选取研究对象为:

$$G_p(s)=\frac{1}{s(Ts+1)} \tag{6}$$

易得

$$|G_p(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}} \tag{7}$$

$$\angle G_p(\mathrm{j}\omega)=-\frac{\pi}{2}-\arctan(\omega T) \tag{8}$$

2　分数阶鲁棒 PD^{μ} 控制器的设计

2.1　控制器参数整定

选取控制器为分数阶 PD^{μ} 控制器[14],传递函数为:

$$G_c(s)=K_p+K_pK_ds^{\mu} \tag{9}$$

其中,$0<\mu\leqslant1$,需要整定的参数有 K_p、K_d 和 μ。当 $\mu=1$ 时,控制器为整数阶 PD 控制器。由式(9)得

$$\begin{aligned}G_c(\mathrm{j}\omega)&=K_p+K_pK_d(\mathrm{j}\omega)^{\mu}\\&=K_p+K_pK_d\omega^{\mu}\left(\cos\frac{\pi\mu}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

$$\angle G_c(\mathrm{j}\omega)=-\frac{\pi(1-\mu)}{2}+\arctan\frac{K_d\omega^{\mu}+\sin\frac{\pi(1-\mu)}{2}}{\cos\frac{\pi(1-\mu)}{2}} \tag{11}$$

$$|G_c(\mathrm{j}\omega)|=K_p\times\sqrt{\left(K_d\omega^{\mu}\cos\frac{\pi\mu}{2}+1\right)^2+\left(K_d\omega^{\mu}\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)^2} \tag{12}$$

系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=G_c(s)G_p(s) \tag{13}$$

相频特性为

$$\begin{aligned}\angle G_k(\mathrm{j}\omega)&=\angle G_c(\mathrm{j}\omega)+\angle G_p(\mathrm{j}\omega)\\&=-\frac{\pi(1-\mu)}{2}+\arctan\frac{K_d\omega^{\mu}+\sin\frac{\pi(1-\mu)}{2}}{\cos\frac{\pi(1-\mu)}{2}}\\&\quad-\frac{\pi}{2}-\arctan(\omega T)\end{aligned} \tag{14}$$

对于典型二阶系统

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta w_ns+\omega_n^2} \tag{15}$$

其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta w_n)} \tag{16}$$

根据剪切频率的定义

$$|G(\mathrm{j}\omega_c)| = \left|\frac{\omega_n^2}{\mathrm{j}w_c(\mathrm{j}w_c + 2\zeta w_n)}\right| = 1 \qquad (17)$$

得

$$w_c = w_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2} \qquad (18)$$

根据相角裕度的定义

$$\gamma_m = 180° + \angle G(\mathrm{j}\omega_c) = 180° - 90° - \arctan\frac{w_c}{2\zeta w_n} = \arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \qquad (19)$$

由超调量的定义可得

$$\sigma_p\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = \mathrm{e}^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad (20)$$

由式(19)和式(20)绘制典型二阶系统相角裕度和超调量的关系曲线，如图 2 所示。

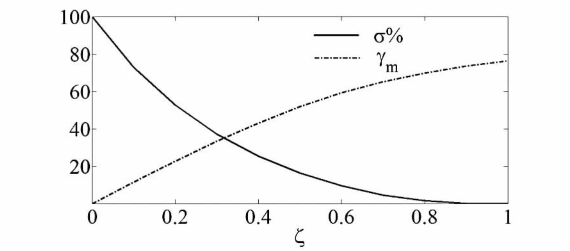

图 2　$\sigma_p\%$ 与 γ_m 关系曲线

Fig. 2　Curves of $\sigma_p\%$ and γ_m

由图 2 可知，对于典型二阶系统，$\sigma_p\%$ 与 γ_m 有确定的对应关系，γ_m 越大则 $\sigma_p\%$ 越小。所以为了抑制由参数波动引起的超调量的波动，必须使剪切频率附近的开环传递函数的相角保持稳定，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}\angle G_k(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_c} = 0 \qquad (21)$$

对于给定 ω_c 和 γ_m 指标的系统，由式(14)和式(21)可得

$$\angle G_k(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=\omega_c} = -\frac{\pi(1-\mu)}{2} + \arctan\frac{K_\mathrm{d}\omega_c^\mu + \sin\frac{\pi(1-\mu)}{2}}{\cos\frac{\pi(1-\mu)}{2}} - \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_c T) = \gamma_m - \pi \qquad (22)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\angle G_k(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_c} = \frac{K_\mathrm{d}\,\mu\,\omega_c^{\mu-1}\cos\frac{\pi(1-\mu)}{2}}{\left(\sin\frac{\pi(1-\mu)}{2} + K_d\omega_c^\mu\right)^2 + \cos^2\frac{\pi(1-\mu)}{2}} - \frac{T}{(T\omega_c)^2+1} = 0 \qquad (23)$$

式(22)和式(23)是关于 K_d 和 μ 的方程，通过解方程组可以确定 K_d 和 μ。开环系统剪切频率 ω_c 满足

$$|G_k(\mathrm{j}\omega_c)| = |G_c(\mathrm{j}\omega_c)| \cdot |G_p(\mathrm{j}\omega_c)| = \frac{K_p\sqrt{\left(K_d\omega_c^\mu\cos\frac{\pi\mu}{2}+1\right)^2 + \left(K_d\omega_c^\mu\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)^2}}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2T^2}} = 1 \qquad (24)$$

代入 K_d 和 μ，通过式(24)可以求出 K_p。

2.2　分数阶微积分估计方法

由于分数阶微积分问题的特殊性，并不能利用现有的整数阶系统分析方法来进行研究和解决，一般是将分数阶系统进行近似化处理。近似化分为直接近似化和间接近似化两种。直接近似化是将分数阶系统转化为离散的整数阶系统，即利用 z 变换来近似；间接近似化是将分数系统转化为连续的整数阶系统，即利用拉普拉斯变换来近似。

间接近似化方法是：首先在连续时域内选定近似频率，然后再近似成适合的有理传递函数。本文采用 Oustaloup 近似法[15]。

对于传递函数

$$H(s) = \left(\frac{s}{\omega_\mu}\right)^{(\alpha)}, \alpha \in R^+ \qquad (25)$$

在给定的频率段中，用

$$\hat{H} = \left(\frac{\omega_\mu}{\omega_h}\right)^\alpha \prod_{k=-N}^{N}\frac{1+\frac{s}{\omega_k'}}{1+\frac{s}{\omega_k}} \qquad (26)$$

来代替 $H(s)$。其中

$$\omega_k' = \omega_b\left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+0.5(1-\alpha)}{2N+1}}$$

$$\omega_k = \omega_b\left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+0.5(1+\alpha)}{2N+1}}$$

2.3　稳定性判据

稳定性是控制系统的基本要求。分数阶系统的稳定性评价条件与整数阶系统有很大差别[16]。对于分数阶系统传递函数

$$G(s) = \frac{b_m s^{m\alpha} + b_{m-1}s^{(m-1)\alpha} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n\alpha} + a_{n-1}s^{(n-1)\alpha} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (27)$$

设 $\lambda = s^\alpha$，代入(27)得

$$G(\lambda) = \frac{b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{(m-1)} + \cdots + b_1\lambda + b_0}{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_1\lambda + a_0} \qquad (28)$$

分数阶系统的稳定性可以通过函数 $G(\lambda)$ 在 λ 平面的极点分布来确定，如图 3 所示。

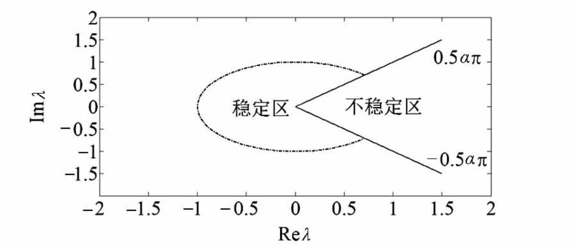

图 3　稳定性区域

Fig. 3　Regions of stability

3　仿真与试验

系统仿真工具采用的是 MATLAB 7.10.0(R2010a)；试验平台采用型号为 BLMC－192 的直线电机，气浮导轨支撑，电机驱动器采用的是 Soloist CL。通过简单辨识可得系统的名义传递函数为

$$G_p(s)=\frac{0.027}{s(0.0465s+1)} \tag{29}$$

3.1　直线运动控制平台 PD$^{\mu}$ 控制器设计

给定期望 $\omega_c=62.8\mathrm{rad/s}$，$\gamma_m=70^{\circ}$，根据 2.1 介绍的方法绘制式(22)和式(23)的曲线如图 4 所示。

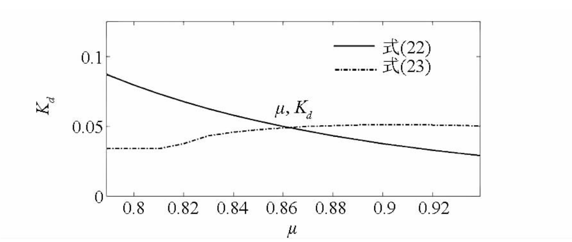

图 4　关于 μ 和 K_d 的曲线

Fig. 4　Curves of μ and K_d

由曲线交点得出 $\mu=0.8622$，$K_d=0.0491$。将 μ 和 K_d 代入式(24)可得 $K_p=88.6592$，即

$$G_c(s)=88.6592(1+0.0491s^{0.8622}) \tag{30}$$

开环传递函数为

$$G_k(s)=G_c(s)\times G_p(s)=\frac{2.393784(1+0.0491s^{0.8622})}{s(0.0465s+1)} \tag{31}$$

闭环系统的传递函数为

$$G_b(s)=\frac{G_k(s)}{1+G_k(s)}=\frac{4.3532s^{0.8622}+88.6592}{0.0465^2+s+4.3532s^{0.8622}+88.6592} \tag{32}$$

根据 2.3 节的稳定性判别方法，取 $\alpha=0.0001$，则 $G(\lambda)$的极点分布如图 5 和图 6 所示。

由图 6 可见，系统的极点都分布在稳定区内，

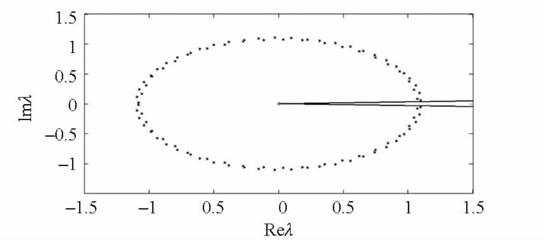

图 5　$G(\lambda)$极点分布图

Fig. 5　Poles map of $G(\lambda)$

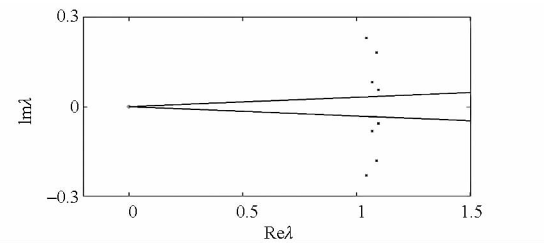

图 6　极点局部放大图

Fig. 6　Part enlargement of poles map

所以基于 PD$^{\mu}$方法设计的闭环系统是稳定的。

根据 2.2 节介绍的分数阶微积分估计方法，取频率范围为[1e(－4,1e4]，$N=4$，得到控制器的近似传递函数为

$$G_{cL}(s)=\frac{2811s^9+4.8\mathrm{e}006s^8+9.375\mathrm{e}008s^7+}{s^9+9973s^8+1.138\mathrm{e}007s^7+}$$
$$\frac{2.331\mathrm{e}010s^6+7.47\mathrm{e}010s^5+3.091\mathrm{e}010s^4+}{1.652\mathrm{e}009s^6+3.091\mathrm{e}010s^5+7.47\mathrm{e}010s^4+}$$
$$\frac{1.652\mathrm{e}009s^3+1.138\mathrm{e}007s^2+9973s+1}{2.331\mathrm{e}010s^3+9.375\mathrm{e}008s^2+4.8\mathrm{e}006s+2811} \tag{33}$$

$G_{cL}(s)$的波特图如图 7 所示。

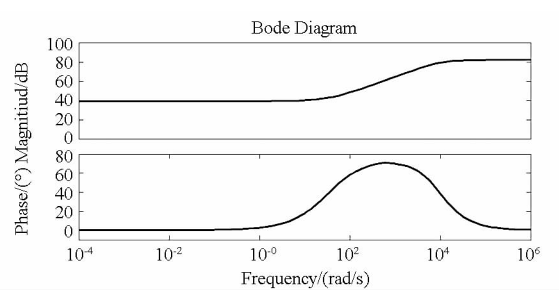

图 7　PD$^{\mu}$控制器波特图

Fig. 7　Bode plot of PD$^{\mu}$ controller

系统开环传递函数

$$G_{kL}(s)=G_{cL}(s)G_p(s) \tag{34}$$

其波特图如图 8 所示，从图中可以看出：在 ω_c 附近相角的变化率很小。由 2.1 节可知，对于增益波动引起的相角的变化，系统的超调量具有比较强的鲁棒性。

根据文献[17]介绍的最优 ITAE 控制器设计方法，对控制对象 $G_p(s)$进行最优 ITAE 设计得到的最优控制器参数为 $K_{pp}=333.5915$，$K_{ii}\approx0$，K_{dd}

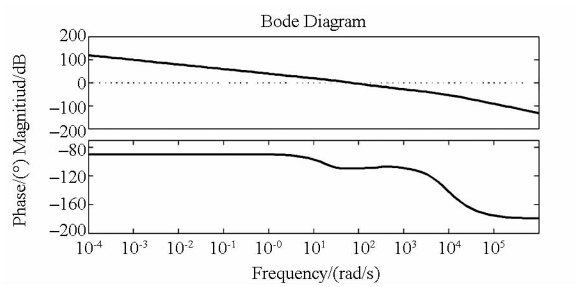

图 8　系统开环传递函数波特图

Fig. 8　Bode plot of open-loop transfer function

$=0.001\,523\,7417$。由于 K_{ii} 近似为 0，所以基于本系统的最优 ITAE 控制实质上为整数阶 PD 控制。传递函数为

$$G_I(s)=333.5915(1+0.0015237417s) \tag{35}$$

3.2　仿真研究

在 Matlab/Simulink 环境中，给闭环系统施加幅值为 0.1 的阶跃信号，在参数 K_p 和 K_{pp} 波动 ±20% 的情况下，PD^{μ} 控制器和 ITAE 最优控制器的阶跃响应曲线分别如图 9 和图 10 所示，可以看出，在参数波动的情况下，PD^{μ} 控制的超调量几乎保持恒定，而 ITAE 最优控制对于开环增益波动的鲁棒性要差很多。

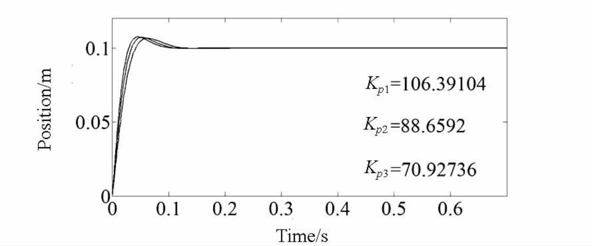

图 9　PD^{μ} 控制仿真阶跃响应曲线

Fig. 9　PD^{μ}' s simulation step response curves

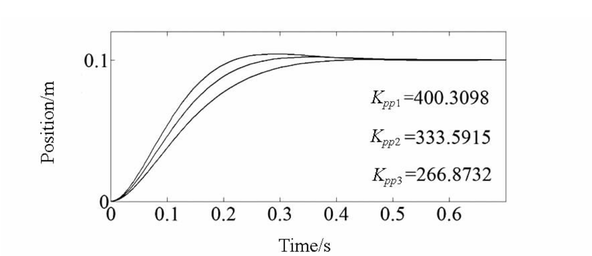

图 10　ITAE 最优控制仿真阶跃响应曲线

Fig. 10　ITAE' s simulation step response curves

3.3　试验研究

利用直线运动控制试验台来测试设计的控制器，直线运动控制试验台如图 11 所示。

位置信号由 HEIDENHAIN 的 LIF471 R 型光栅尺测量，100 细分后精度可达 0.1μm。利用冲击响应不变法[14]离散化式(30)，令 $T_s=0.001$s，得到

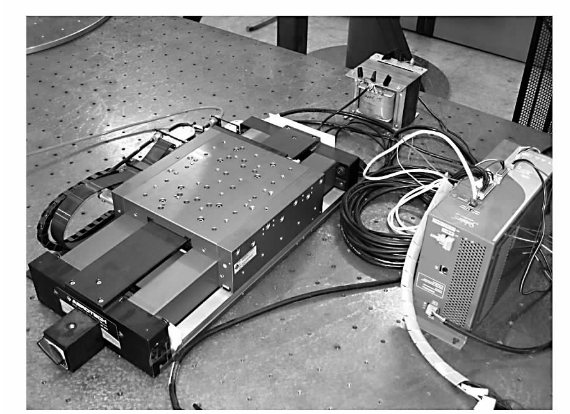

图 11　直线运动控制试验台

Fig. 11　Linear motion control experiment platform

$$G_{cP}(z^{-1})=\frac{4.558-14.95z^{-1}+18.42z^{-2}-10.37z^{-3}+2.524z^{-4}-0.1848z^{-5}}{0.002309-0.005327z^{-1}+0.003902z^{-2}-0.0007827z^{-3}-0.0001241z^{-4}+2.916e-005z^{-5}} \tag{36}$$

如图 12 所示，虚线和实线分别为离散前后的控制器波特图。

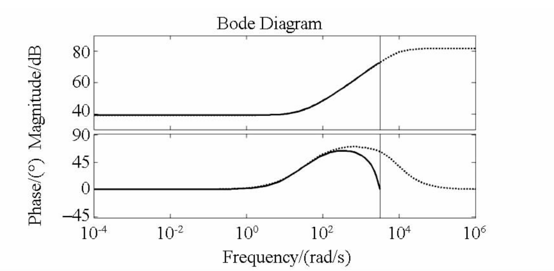

图 12　离散前后的 PD^{μ} 控制器波特图

Fig. 12　Bode plots of continuous and discrete PD^{μ} controllers

对于 ITAE 最优控制器，以周期 0.001s 离散化式(35)得

$$G_{cI}(z^{-1})=\frac{1350-683z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{37}$$

分别给定 PD^{μ} 控制器和 ITAE 最优控制器幅值为 0.1 的阶跃参考信号，在参数 K_p 和 K_{pp} 波动 ±20% 的情况下，由光栅尺测量的 PD^{μ} 控制和 ITAE 最优控制的位置反馈数据分别如图 13 和图 14 所示。由于光栅尺采集译码卡略有干扰，数据带有少量“毛刺”。实测数据与仿真结果一致，PD^{μ} 控制方法对于增益波动的鲁棒性明显优于 ITAE 控制方法。

4　结论

本文针对运动控制系统设计了对增益波动的超调量鲁棒的分数阶 PD^{μ} 控制器，通过仿真和试验证明了该控制方法的有效性和实用性。特别是

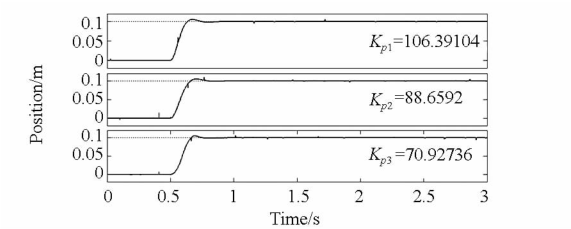

图 13　PD$^{\mu}$控制试验阶跃响应数据

Fig. 13　PD$^{\mu}$'s experiment step response data

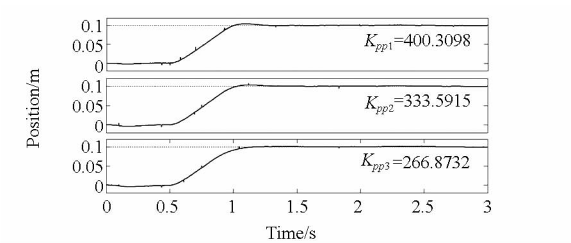

图 14　ITAE 最优控制试验阶跃响应数据

Fig. 14　ITAE's experiment step response data

在针对参数波动的鲁棒性方面，表现尤为突出。可以看到，同整数阶 ITAE 最优控制方法相比较，分数阶控制器在运动控制方面的优势明显。下一步，本课题还有待继续更加深入地进行分数阶智能控制器在运动控制方面的研究。

参考文献（References）

[1] Torvik P J, Bagley R L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(2): 294 – 298.

[2] 朱呈祥，邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策，2009, 24(2): 161 – 169.
ZHU Chengxiang, ZOU Yun. Summary of research on fractional-order control [J]. Control and Decision, 2009, 24 (2): 161 – 169. (in Chinese)

[3] 吴宇列，吴学忠，李圣怡. 冗余并联机构的 PD 控制[J]. 国防科技大学学报，2001, 23(3): 111 – 114.
WU Yulie, WU Xuezhong, LI Shengyi. PD control of redundant parallel manipulators [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2001, 23(3): 111 – 114. (in Chinese)

[4] 张文辉，齐乃明，李运迁. 基于模糊基函数网络的机械臂免模型输出反馈 PD 控制[J]. 国防科技大学学报，2010, 32(6): 163 – 170.
ZHANG Wenhui, QI Naiming, LI Yunqian. Output feedback PD control of robot manipulators dispense with model base on fuzzy-basis-function-network [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2010, 32 (6): 163 – 170. (in Chinese)

[5] Podlubny I. Fractional-order systems and PI$^{\lambda}$D$^{\mu}$-controllers [J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 1999, 44 (1): 208 – 214.

[6] Lv Z F. Time-domain simulation and design of SISO feedback control systems [D]. Doctoral Dissertation, National Cheng Kung University, Taiwan, China, 2004: 20 – 45.

[7] Ma C, Hori Y. Fractional-order control: Theory and applications in motion control [Past and present] [J]. Industrial Electronics Magazine, IEEE, 2007, 1(4): 6 – 16.

[8] Valério D, da Costa J S. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules [J]. Signal Processing, 2006, 86(10): 2771 – 2784.

[9] Monje C A, Vinagre B M, Chen Y Q, et al. Proposals for fractional PI$^{\lambda}$D$^{\mu}$ tuning [C] // Proceedings of The First IFAC Symposium on Fractional Differentiation and its Applications (FDA04). 2004: 115 – 120.

[10] Monje C A, Vinagre B M, Feliu V, et al. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications [J]. Control Engineering Practice, 2008, 16 (7): 798 – 812.

[11] Chen Y Q, Moore K L, Vinagre B M, et al. Robust PID controller autotuning with a phase shaper [C] // Proceedings of First IFAC workshop on fractional differentiation and its applications. 2004: 162 – 167.

[12] Xue D, Zhao C, Chen Y Q. Fractional order PID control of A DC-motor with elastic shaft: a case study [C] // Proceedings of American Control Conference, IEEE, 2006: 6.

[13] Tan K K, Lee T H, Huang S. Precision motion control: design and implementation [M]. Springer, 2008: 22 – 23.

[14] Concepción A. Monje fractional-order systems and controls [M]. London: Springer-Verlag, 2010: 107 – 200.

[15] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, et al. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis [J]. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 2000, 47 (1): 25 – 39.

[16] Matignon D. Stability properties for generalized fractional differential systems [C] // Proceedings of ESAIM, 1998: 145 – 158.

[17] Xue D, Chen Y Q, Atherton D P. Linear feedback control: analysis and design with MATLAB [M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008: 218 – 225.