

基于U变换的空间站交会调相非线性协方差分析方法*

黄海兵,张进

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:针对空间站交会调相过程中的长时间偏差传播问题,提出一种基于U变换的协方差分析方法UTCAM。在给出空间站交会轨道调相策略和轨道机动参数计算方法后,对UTCAM的原理和流程进行了介绍,通过和STK以及Monte-Carlo的对比验证表明,UTCAM与该两种分析方法的协方差相对误差均在1.2%以内,且计算耗时仅为Monte-Carlo的1/460,可快速准确地实现非线性系统的均值和协方差预报。最后基于UTCAM对长达20天的空间站交会调相的偏差传播进行了分析,并采用Monte-Carlo仿真对其分析结果进行了验证,验证了该方法的有效性。

关键词: U变换;偏差传播;轨道调相;协方差分析

中图分类号:V412.4 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2014)02-0018-06

A nonlinear covariance analysis method for space station rendezvous phasing based on unscented transformation

HUANG Haibing, ZHANG Jin

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: As for the long-time error propagation problem of the space station rendezvous phasing, a nonlinear covariance analysis method based on the unscented transformation (UTCAM) is presented. The strategy of rendezvous phasing and the computation method of orbit maneuver parameters is proposed, then the principles and flow of UTCAM are introduced. The comparison between UTCAM and the two methods of STK and the Monte-Carlo shows that the relative error of covariance analysis between those methods is under 1.2%, and the computation consumption time is only 1/460 that of Monte-Carlo, so it can accomplish the propagation of mean and covariance rapidly and exactly for nonlinear systems. Finally, the error propagation of a 20-day rendezvous phasing of space station is conducted by using UTCAM, and the results are validated by the Monte-Carlo simulation.

Key words: unscented transformation; error propagation; orbit phasing; covariance analysis

在交会对接任务中一般要求空间站在近圆回归轨道上运行,当追踪航天器入轨点进入空间站轨道面时,要求空间站和追踪航天器之间的纬度幅角差(相位角)和空间站轨道高度在设计范围内,且保证两航天器轨道共面。空间站相位调整,简称空间站调相,是指空间站进行若干次轨道机动,在追踪航天器入轨点进入空间站轨道平面时,满足对空间站的轨道高度、偏心率及纬度幅角的要求。空间站调相实质上属于多圈多冲量交会问题,这一问题和追踪航天器远距离导引段的轨道控制类似。

空间站调相段的轨道机动不仅要瞄准终端状态,还需要保证在设计允许的偏差范围内,以便追踪航天器能够顺利地进行远距离导引。空间站调相阶段时间较长,由于存在动力学模型、轨道确

定、轨道控制等偏差,需要在各种偏差情况下,得到调相段的实际飞行状态和标称状态的偏差演变规律,以便适时修正,满足终端的偏差需求。

常见的偏差分析方法包括Monte-Carlo仿真方法、协方差分析方法与协方差分析描述函数方法(Covariance Analysis Description Equation Technique, CADET)。文献[1]分析了交会各阶段的主要偏差项,总结了现有的偏差传播分析研究成果。

Monte-Carlo仿真方法是简单的随机抽样统计,适用于各种交会任务和任意偏差类型,但是为了得到较为准确的统计结果,通常需要较大的样本,还需要对结果进行统计,运算量相当庞大,仿真计算分析需要的时间较长。

协方差分析方法基于线性的或者线性化的动

* 收稿日期:2013-10-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11272346,11222215);高等学校全国优秀博士学位论文作者专项资金项目(201171)

作者简介:黄海兵(1978—),男,湖南邵东人,讲师,博士,E-mail:huanghaibing@126.com

力学方程,如交会对接任务中常采用C-W状态转移矩阵和相应的协方差传递矩阵进行计算^[2-3]。文献[4]基于轨道根数形式的摄动动力学方程,采用拟平均根数法,得到航天器状态的非线性显性表达式,然后泰勒展开,忽略高阶项,得到线性化模型,再采用协方差方法进行各类偏差的统计计算。

协方差分析描述函数法可进行线性和非线性方程的偏差传播分析。CADET最初目的是用于导弹制导系统性能分析^[5],CADET的基本思想是运用描述函数理论,首先对系统进行统计线性化,然后采用协方差分析,对线性化系统数学模型求出随机状态变量的均值和协方差矩阵传播微分方程。文献[6]采用CADET对航天器交会精度进行了计算分析。该方法有一个明显的缺点,对于较复杂的非线性微分方程,推导出的描述函数非常复杂。

本文拟提出采用基于U变换^[7]的非线性协方差分析方法(Unscented Transform Covariance Analysis Method,UTCAM)来进行空间站调相过程的偏差预报,U变换来源于UKF中的均值和协方差预报过程,其基本思想是通过确定性采样点对非线性函数的概率密度分布进行近似,而不是对非线性函数进行近似,与随机采样相比,U变换采样的粒子点(一般称为Sigma点)的个数仅为 $2n + 1$,其中 n 为状态量的个数。另外,U变换对非线性函数统计量的精度至少达到2阶,对于特殊的采样策略,如高斯分布4阶采样和偏度采样等可达到更高阶精度,同时,不要求导计算非线性系统的Jacobi矩阵,还可以处理非可导的非线性函数。

1 交会调相策略与机动参数计算

1.1 交会调相策略

图1给出了空间站轨道调相的示意图。相位和轨道高度主要是通过空间站的轨道调整来保证,一般说来,空间站相位调整主要通过第一次轨道调整(M1点)实现,而轨道高度调整主要是通过追踪航天器入轨前空间站的第二次(M3点)和第三次轨道机动(M4点)来完成,其中第二次完成高度瞄准,第三次主要是圆化轨道。如果第一次轨道调整距追踪航天器入轨时刻的时间较长,由于初始轨道偏差、轨道机动偏差和大气模型偏差等因素,可能导致追踪航天器入轨时刻不满足相位精度要求,此时必须在轨道高度调整前的某个时间再加一次用于修正的相位调整机动(M2点)。可见对于空间站调相任务,只需在轨道平面内研究即可,主要对空间站的3~4次轨道机动

参数进行研究,并且在考虑几种主要的偏差情况下,分析两航天器的终端相位差(M5点和M6点构成的角度 θ)及其偏差。

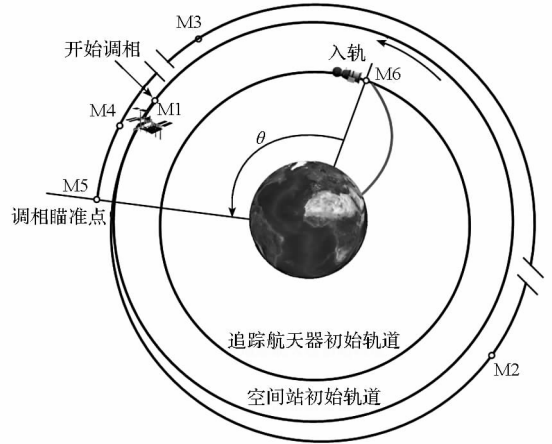


图1 空间站交会调相策略

Fig.1 Rendezvous phasing strategy of space station

1.2 机动参数计算

为了瞄准追踪航天器入轨时空间站轨道高度、偏心率与相位角,最少需要施加三次轨道机动,空间站轨道机动方案^[8]安排如下:

- (1)距终端约 N_1 圈进行切向机动 Δv_{i1} ,调整相位角;
- (2)距终端约 N_2 圈(约1天)进行切向机动 Δv_{i2} ,调整轨道高度;
- (3)距终端约 N_3 圈(小于1天)进行切向机动 Δv_{i3} ,圆化轨道。

第一次轨道机动参数 Δv_{i1} 的计算可以采取如图2所示流程迭代计算获得高精度解。

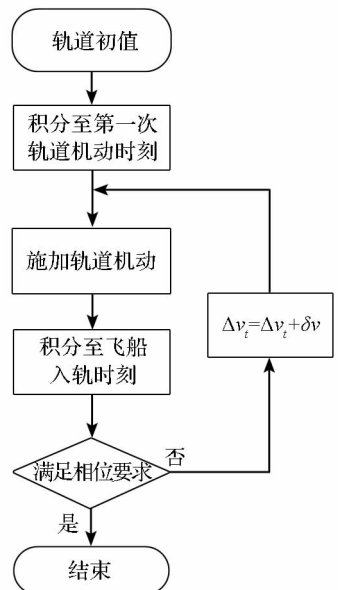


图2 机动参数计算流程

Fig.2 Computation flow of maneuver parameter

Δv_{i2} 在近地点执行调整远地点轨道高度,根据高斯型摄动方程有

$$\Delta v_{i2} = -\frac{n_2}{4} \sqrt{\frac{1-e_2}{1+e_2}} \delta H \quad (1)$$

其中, $n_2, e_2, \delta H$ 分别为 δv_{i2} 执行前的平均角速度、偏心率、远地点高度与瞄准轨道高度差。

Δv_{i3} 用于调整偏心率,当机动前近地点高度与瞄准轨道高度一致时(对应 δv_{i2} 执行前近地点高于瞄准轨道),在近地点进行轨道圆化;当远地点高度与瞄准轨道高度一致时(对应 δv_{i2} 执行前近地点低于瞄准轨道),在远地点进行轨道圆化。

在近地点圆化时,机动参数为

$$\Delta v_{i3} = -\frac{n_3 a_3}{2 \sqrt{1-e_3^2}} e_3 \quad (2)$$

在远地点圆化时,机动参数为

$$\Delta v_{i3} = \frac{n_3 a_3}{2 \sqrt{1-e_3^2}} e_3 \quad (3)$$

其中, n_3, a_3 与 e_3 分别为 δv_{i3} 执行前的平均角速度、半长轴、偏心率。

当不满足终端偏差约束时,还需在第一次机动后施加一次修正的调相机动 $\delta v'_{i1}$,其计算方法同第一次机动。

2 轨道偏差预报与转换方法

2.1 方法原理

UTCAM 主要借鉴 UKF 中的均值和协方差更新过程。考虑一个 L 维随机向量 \mathbf{x} 经过非线性变换后得到 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, 并假设 \mathbf{x} 的均值和协方差分别为 $\bar{\mathbf{x}}$ 和 \mathbf{P}_x 。在确保采样均值和协方差为 $\bar{\mathbf{x}}$ 和 \mathbf{P}_x 的前提下,选择一组 Sigma 点集,将非线性变换应用于采样的每个 Sigma 点,得到的非线性转换后的点集 $\{\mathbf{Y}_i\}$,非线性变换后的函数均值 $\bar{\mathbf{y}}$ 和协方差 \mathbf{P}_y 是变换后 Sigma 点集的统计量。U 变换可按照如图 3 所示的 3 个步骤来完成。

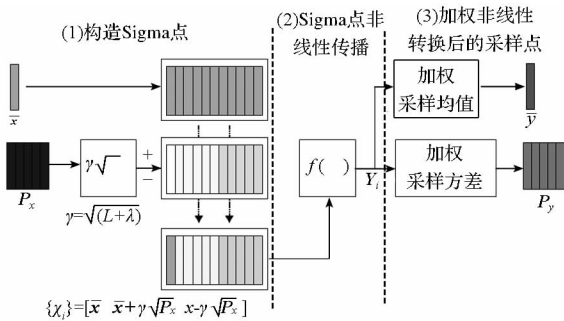


图 3 U 变换框图

Fig. 3 Frame graph of unscented transform

(1) 构造 Sigma 点

根据随机向量 \mathbf{x} 的均值 $\bar{\mathbf{x}}$ 和协方差 \mathbf{P}_x ,在均值 $\bar{\mathbf{x}}$ 的附近构造一组 Sigma 点 χ_i

$$\chi_0 = \bar{\mathbf{x}}$$

$$\chi_i = \bar{\mathbf{x}} + (\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_x})_i \quad i=1, \dots, L$$

$$\chi_i = \bar{\mathbf{x}} - (\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_x})_i \quad i=L+1, \dots, 2L \quad (4)$$

显然,其样本均值和方差分别为 $\bar{\mathbf{x}}$ 和 \mathbf{P}_x ,于是可以用这组 Sigma 点 χ_i 来近似表示高斯分布的状态变量 \mathbf{x} 的分布。

式(4)中,矩阵开根号约定为

$$\sqrt{\mathbf{P}_x} \sqrt{\mathbf{P}_x}^T = \mathbf{P}_x \quad (5)$$

可以通过协方差矩阵的乔里斯基分解求得。

$(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_x})_i$ 表示矩阵的第 i 列, λ 为可调尺度参数,调整它可以改变逼近精度,一般可按 $L+\lambda=3$ 取值。

(2) 对 Sigma 点进行非线性传播

对所采样的输入变量 Sigma 点集 $\{\chi_i\}$ 中的每个 Sigma 点进行 $f(\cdot)$ 非线性变换,得到变换后的 Sigma 点集 $\{\mathbf{Y}_i\}$ 。

(3) 计算 \mathbf{y} 的均值和协方差

对变换后的 Sigma 点集 $\{\mathbf{Y}_i\}$ 进行加权处理,从而得到输出变量的统计量 $\bar{\mathbf{y}}$ 和 \mathbf{P}_y

$$\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathbf{Y}_i \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_y = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (7)$$

其中, $W_i^{(m)}$ 和 $W_i^{(c)}$ 分别为根据 \mathbf{Y}_i 计算 \mathbf{y} 的均值和协方差所用加权系数,在标准的 U 变换中可取为

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda+L} & i=0 \\ \frac{1}{2(\lambda+L)} & i=1, \dots, 2L \end{cases} \quad (8)$$

从上面的三个步骤可以看出,U 变换不需要计算非线性函数的 Jacobi 矩阵,变换中仅涉及函数计算,且该函数可以是“黑箱”形式,即使系统模型非常复杂,也不会增加 U 变换实现的难度。

2.2 分析流程

空间站调相过程中除了考虑初始位置速度偏差,还需考虑大气模型偏差,当进行轨道机动时,还存在执行偏差,图 4 给出了基于 UTCAM 的空间站调相偏差分析流程,其中带灰色底纹的过程为 U 变换基本步骤。

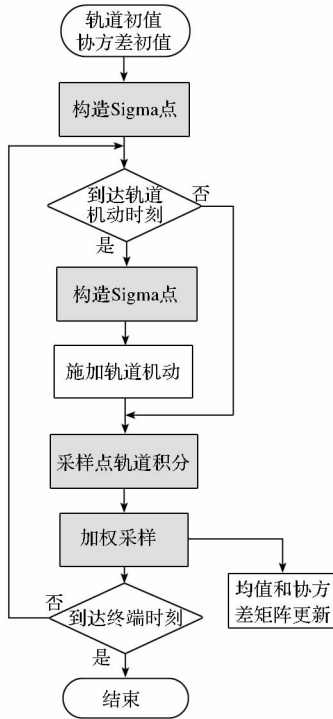


图 4 空间站调相偏差分析流程

Fig. 4 Error analysis flow chart of space station phasing

3 算例

3.1 有效性验证

采用考虑初始轨道偏差的空间站飞行过程的均值和协方差传播分析的算例来验证 UTCAM 方法的有效性。对于同一算例,分别采用本文提出的 UTCAM、STK 和 Monte-Carlo 三种方法进行计算,具体计算中,STK 采用高精度轨道积分 HPOP 中的协方差计算功能模块, Monte-Carlo 仿真的样本本取为 6000。

空间站初始状态与仿真步长设置如表 1,摄

表 1 算例参数

Tab.1 Parameters of examples

参数	取值
初始时刻	21 Jun 2010 12:00:00.0
轨道参数	[6700km, 0.001, 42°, 100°, 50°, 80°] ^T
位置偏差	[10; 10; 10] ^T m
速度偏差	[0.01; 0.01; 0.01] ^T m/s
仿真步长	60s

① 表中轨道参数按半长轴、偏心率、轨道倾角、升交点赤经、近拱点角和真近点角的顺序。

动轨道积分基于 AstroLib^[9],考虑的摄动因素包括地球非球形摄动及大气阻力摄动,引力场为 21 × 21 阶次的 JGM3 模型,大气模型为 NRLMSISE-

00 模型,阻力系数取 2.2, F10.7 通量为 150,地磁指数 $A_p = 26.065587$ 。空间站质量 100000kg,阻力面积为 300m²,位置和速度偏差均在地心 J2000 坐标系中给出。

表 2 给出了 STK 与 UTCAM 在 1 天后位置均值和协方差矩阵的对比,其中位置均值相差仅在 1m 以内,协方差矩阵对应元素的相对误差最大仅为 1.13%。

表 3 为 Monte-Carlo 和 UTCAM 两种方法计算的空间站 1 天后的位置和速度的均值以及协方差矩阵的对比结果。可以看出,轨道预报 1 天后 Monte-Carlo 仿真 6000 次的统计均值和 UTCAM 均值预报的结果高度一致,位置均值误差仅在 2m 以内。位置协方差矩阵各元素的相对误差很小,对应元素相对误差最大仅为 1.17%。另外,采用 UTCAM 只需对轨道积分 13(考虑 6 个偏差因素情况)次,相比 Monte-Carlo 6000 次轨道仿真积分,耗时仅为 Monte-Carlo 的 1/460,另外,UTCAM 计算完成后无须对数据进行统计等后处理。

通过 STK 与 Monte-Carlo 两种方法对本文提出的 UTCAM 进行对比验证,可以看出,UTCAM 不仅计算耗时少,且结果与 STK 以及 Monte-Carlo 的结果具有很好的 consistency,可以用于后续的空间站调相过程中的协方差分析。

3.2 交会调相协方差分析

空间站调相过程中除了考虑初始位置速度偏差,还需考虑大气模型偏差,当进行轨道机动时,还存在速度增量大小偏差。

空间站初始状态与初始状态偏差同表 1,追踪航天器假设在 2010 年 7 月 10 日发射,入轨点升交点经度 100°,当追踪航天器入轨时,要求空间站为近圆两天回归轨道,根据空间站轨道倾角对应的轨道高度约为 336km(取地球半径为 6378.137km),空间站纬度幅角为 200°。

空间站调相过程共计 306 圈,第一次机动 δv_{i1} 在第 2 圈执行,距离终端 305 圈,修正机动 $\delta v'_{i1}$ 执行圈次待定,初始位置与速度偏差与表 1 一致,大气模型误差采用相对形式给出,其均方差为 $\sigma_p = 0.05$,轨道机动误差的均方差为机动冲量大小的线性函数 $\sigma_{v_i} = c_1 \delta v_i + c_2$,其中, $c_1 = 0.0005$, $c_2 = 0.005$ m/s。最终在各自误差影响下,追踪航天器入轨时相位角偏差不允许超过 5°。

表 4 给出了 UTCAM 与 Monte-Carlo 两种方法得到的位置均值和协方差计算结果,可以看出,UTCAM 计算结果和 Monte-Carlo 统计结果在空间

站近 20 天的调相过程中位置均值相对误差仅在 2% 以内。对比表 4 中位置协方差矩阵各元素可知,UTCAM 计算结果和 Monte-Carlo 统计结果的相对误差在 7% 以内。

通过如下坐标变换可以得到 VVLH 轨道坐标系中的协方差矩阵为

$$\mathbf{P}_{\text{VVLH}} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{\text{ECI}}\mathbf{A}^T \quad (9)$$

其中, \mathbf{P}_{VVLH} 和 \mathbf{P}_{ECI} 分别表示 VVLH 轨道坐标系和地心 J2000 坐标系中位置协方差矩阵,而矩阵 \mathbf{A} 为从地心 J2000 坐标系到 VVLH 轨道坐标系的坐标变换矩阵。

图 5 给出了 VVLH 轨道坐标系下的空间站径向、切向和法向的位置偏差均方根曲线,可以看出,三个方向的均方根幅值都随时间呈二次函数增长,其中切向位置偏差最大,其终端时刻均方根达 645km。由于法向位置偏差呈周期性振荡增长,且振荡周期为轨道周期,因此图 5(c)中的曲线呈现密集区域。

再分别采用 UTCAM 和 Monte-Carlo 两种方法将位置偏差转换成轨道根数偏差,两种方法给出的结果一致,终端相位角偏差均方根约 5.5° ,超出相位角偏差终端约束 5° 的要求。可见此时需要在中间某个圈次施加修正脉冲,为了节省燃料,在满足终端相位角约束的情况下,应尽量提前施加该修正脉冲 $\delta v'_{i1}$ 。而修正脉冲的速度增量需要根据当前的状态重新计算,此时采用 UTCAM 难以直接分析。将 UTCAM 分析的结果逐圈对比可知,在距离终端 170 圈施加修正脉冲后引起的切向位置偏差均方根为 194.2km,根据简单的公式,可得此时相位角偏差的 3σ 值为

$$\varepsilon_{\delta\theta_{\max}} = 3 \times \frac{194.2}{6700} \times \frac{180}{\pi} = 4.98^\circ$$

可见,在距离终端 170 圈施加修正脉冲,可以保证空间站终端相位角偏差 5° 的约束,满足追踪航天器交会的初始条件。

表 2 STK 与 UTCAM 对比验证结果

Tab. 2 Validate results between STK and UTCAM

方法	STK			UTCAM		
均值(km)	-4978.099	592.838	4434.739	-4978.099	592.837	4434.738
	0.018549	0.540639	-0.04886	0.018758	0.540156	-0.049041
协方差	0.540639	15.8535	-1.43192	0.540156	15.674096	-1.421521
	-0.04886	-1.43192	0.129443	-0.049041	-1.421521	0.129054

表 3 Monte-Carlo 与 UTCAM 对比验证结果

Tab. 3 Validate results between Monte-Carlo and UTCAM

方法	Monte-Carlo			UTCAM		
均值(km)	-4978.099	592.838	4434.736	-4978.099	592.837	4434.738
	0.018891	0.545621	-0.049490	0.018758	0.540156	-0.049041
协方差	0.545621	15.859991	-1.437860	0.540156	15.674096	-1.421521
	-0.049490	-1.437860	0.130463	-0.049041	-1.421521	0.129054

表 4 空间站位置均值和协方差

Tab. 4 Mean and covariance of space station position

方法	UTCAM			Monte-Carlo		
均值(10^6m)	-3.708	5.344	-1.519	-3.690	5.361	-1.500
	1.242	1.242	1.426	1.253	1.246	1.437
协方差(10^{11})	1.242	1.311	1.447	1.246	1.273	1.439
	1.426	1.447	1.644	1.437	1.439	1.651

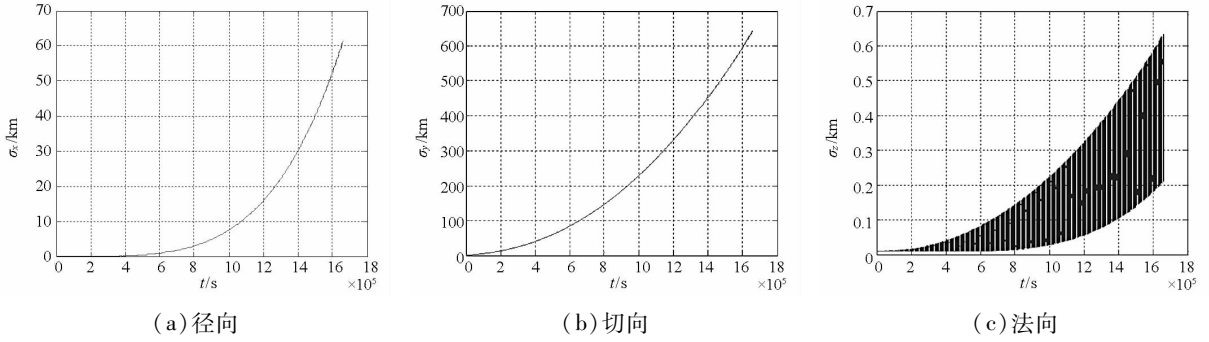


图5 位置偏差均方根曲线

Fig. 5 Root mean square graph of position errors

4 结论

提出了基于U变换的非线性协方差传播与转换的分析方法,通过与STK协方差计算和Monte-Carlo打靶统计的结果进行对比,验证了该方法的有效性。最后采用该方法解决了空间站调相这一长时间多偏差因素的协方差传播分析难题。如何把该方法应用于考虑偏差因素的轨道优化设计中是作者下一步的研究工作。

参考文献 (References)

- [1] 唐国金, 罗亚中, 张进. 空间交会对接任务规划[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
TANG Guojin, LUO Yazhong, ZHANG Jin. Space rendezvous and docking mission planning[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [2] Geller D K. Linear covariance techniques for orbital rendezvous analysis and autonomous onboard mission planning[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(6): 1404 - 1414.
- [3] 王大鹏, 刘育强, 陈绍龙, 等. 基于线性协方差方法的交会对接误差分析[J]. 中国空间科学技术, 2011, 31(1): 48 - 55.
WANG Dapeng, LIU Yuqiang, CHEN Shaolong, et al. Error analysis for rendezvous and docking with linear covariance method[J]. Chinese Space Science and Technology, 2011, 31(1): 48 - 55. (in Chinese)
- [4] 张丽艳, 戚发轫, 李颀黎. 交会对接远距离导引精度分

析[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(6): 667 - 670.
ZHANG Liyan, QI Faren, LI Yili. Precision analysis of long distance navigation of rendezvous [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(6): 667 - 670. (in Chinese)

- [5] Taylor J H. Handbook for the direct statistical analysis of missile guidance systems via CADET[R]. AD - A013397, Massachusetts: Analytic Sciences Corporation, 1975.
- [6] 梁立波, 罗亚中, 杏建军, 等. 基于协方差分析描述函数法的非线性交会精度分析[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(9): 1977 - 1981.
LIANG Libo, LUO Yazhong, XING Jianjun, et al. Precision analysis of nonlinear rendezvous by covariance analysis description equation technique[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(9): 1977 - 1981. (in Chinese)
- [7] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant - Whyten H F. A new approach for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477 - 482.
- [8] 张进, 黄海兵, 王为, 等. 空间交会目标航天器相位调整策略[J]. 中国空间科学技术, 2011, 31(1): 33 - 41.
ZHANG Jin, HUANG Haibing, WANG Wei, et al. Target spacecraft phasing strategy in orbital rendezvous[J]. Chinese Space Science and Technology, 2011, 31(1): 33 - 41. (in Chinese)
- [9] 王华, 唐国金, 李海阳. 航天系统分析与仿真基础程序库: AstroLib[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(13): 2917 - 2920.
WANG Hua, TANG Guojin, LI Haiyang. AstroLib: foundational library for aerospace system analysis and simulation[J]. Journal of System Simulation, 2007, 19(13): 2917 - 2920. (in Chinese)