

## 压缩感知理论与光学压缩成像系统\*

严奉霞,王泽龙,朱炬波,刘吉英  
(国防科技大学理学院,湖南长沙 410073)

**摘要:** 压缩感知理论为提升信息获取能力提供了新的思路,它表明当被探测信号具有稀疏性时,则获取信号所必需的测量数据与其稀疏度  $K$  量级相当,而远小于信号的维数  $N$  (Shannon 采样定理所要求的采样数)。基于压缩感知理论的成像技术(压缩成像)则将感知、压缩和数据处理三个过程完美地结合在一起,避免了传统成像系统“先采样再压缩”方式带来的传感器和计算资源浪费。本文从稀疏性、投影测量矩阵的设计与可重构条件、压缩感知重构算法三个方面概述了压缩感知理论及进展,并以光学成像为背景,详细阐述了最近提出的几类光学压缩成像系统,最后,探讨了压缩感知及压缩成像方面目前所面临的一些挑战性问题。

**关键词:** 压缩感知;光学压缩成像;稀疏表示;投影测量矩阵

中图分类号:TP316 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2014)02-0140-08

## Compressive sensing theory and optical compressive imaging systems

YAN Fengxia, WANG Zelong, ZHU Jubo, LIU Jiyong

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Compressive sensing provides a new way for increasing the ability of information acquisition. Compressive sensing asserts that it is possible to accurately reconstruct signals from sub-Nyquist sampling, provided some additional assumptions (sparse or compressible) are made about the signal in question. The compressive imaging technology, which is based on the compressive sensing theory, integrates the processes of sensing, compression and processing perfectly, avoiding the resource waste caused by a traditional “sample-then-compress” framework. With a review of some of the recent progress in compressive sensing theory from the following three aspects: sparsity, the design of measuring matrix and recovery conditions, the reconstruction algorithms, several optical compressive imaging systems are introduced, and some key challenges in this area have been discussed in the end.

**Key words:** compressive sensing; compressive imaging; sparse representation; measurement matrix

目前大部分信息获取系统(如模数转换、医学成像、音频、视频电子等)都建立在经典 Shannon 采样定理的基础之上。即采样频率必须是信号最高频率的两倍,才能精确恢复原信号。类似地,由线性代数的基本定理可知,对于离散有限维信号,为精确重构,获取的测量数据量应至少为信号的长度(即信号维数)。

以遥感侦察成像为例,其中“信号”对应于图像,而“采样”则是图像中的各像素的测量值。提升分辨率意味着减少探测器像素尺寸、增加阵元数量,这将造成系统的复杂度和实现难度非线性地增加。另外,在实际的遥感侦察系统中,受传输带宽限制,探测器获取大量的数据之后,并不是直接存储/传输,而需先进行数据压缩,去掉大部分冗余数据之后再存储/传输,从而显著降低数

据量。这个长久以来统治所有信息获取系统的流程存在这样的矛盾:一方面,探测器尽可能地获取更多的数据,而另一方面,数据压缩却想方设法丢弃更多的(冗余)数据。因此,突破 Shannon 采样定理是从本质上提升现有遥感成像系统的关键。Candes、Romberg 和 Tao<sup>[1-2]</sup> 以及 Donoho<sup>[3]</sup> 于 2004 年提出的压缩感知(也称压缩采样)理论(Compressive Sensing, CS)给出了全新的数据获取方法,该理论基于信号的稀疏性,利用少量非相关的线性测量,通过稀疏优化算法实现信号的高精度重构,是对经典 Shannon 定理的突破。

压缩感知理论自提出以来就引起了国内外的高度关注,在医学成像<sup>[4-6]</sup>、光学成像<sup>[7-12]</sup>、雷达<sup>[13-16]</sup>等领域取得成功的应用。详见网站 <http://dsp.rice.edu/CS>。到目前为止,已有数千

\* 收稿日期:2013-07-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61002024);国家部委资助项目

作者简介:严奉霞(1979—),女,湖南华容人,博士,副教授,Email:xialang3@163.com

篇关于压缩感知的论文相继发表,已有上百个国际会议或专题围绕这一主题召开。Science 和 SIAM Review 等顶级期刊都发表长文对压缩感知进行系统介绍,IEEE 等出版社也出版专刊对这一理论做系统阐述,美国 2013 年 5 月发布的《2025 年的数学科学》也将压缩感知作为主要研究方向之一<sup>[17]</sup>。可以说,压缩感知掀起了信息获取领域的一场风暴,其在各个领域的应用还在飞速涌现。正如 Strohmer 教授指出<sup>[18]</sup>:压缩感知赶上了好时机——过去二十年来,信号处理、应用调和与分析、成像科学、信息理论等领域的研究者们已经孵化出一种紧密合作和相互影响的研究氛围,或者说,工程师、统计学家和数学家相互合作和互相学习的强烈愿望为压缩感知的研究奠定了基石。这也无疑为压缩感知在各研究领域的迅速应用做出了贡献。

本文在概述压缩感知理论的基础上,着重介绍压缩感知及光学压缩成像系统的研究进展及面临的挑战性问题。

## 1 压缩感知基本原理

压缩感知的基本思想是:如果被探测的信号具备稀疏特性,则获取信号所必需的测量数据与其稀疏度  $K$  量级相当,而远小于信号的维数  $N$ 。

在离散情况下,假设信号  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  在正交基  $\Psi$  上具有  $K$ -稀疏表示  $\mathbf{x} = \Psi\boldsymbol{\alpha}$ 。压缩感知理论表明:通过合理设计投影测量矩阵  $\Phi$ ,求解如下的  $l_0$  拟范数最小化问题可以从不完全测量数据  $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$  中精确恢复信号  $\mathbf{x}$ <sup>[2]</sup>:

$$\min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N} \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \quad \text{s. t. } \mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} = \Phi\Psi\boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

这里,  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0$  表示向量  $\boldsymbol{\alpha}$  中非零分量的个数,  $K \ll N, M \ll N$ 。压缩感知提供了一种对有限维矢量同时进行“感知”和“压缩”的框架。具体来说,在压缩感知框架下,我们并不是直接获取信号  $\mathbf{x}$ ,而是利用一个  $M \times N$  的投影测量矩阵  $\Phi$  来获取  $M$  ( $\ll N$ ) 个线性测量值  $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x}$ 。这里,  $\mathbf{y}$  称为测量矢量。

压缩感知的极大优势在于利用少量的观测数据恢复高维稀疏信号,这将有利于指导实际应用中的测量装置设计。特别地,当实际测量受物理限制或者数据采集昂贵时,压缩感知的优势更为明显。

压缩感知理论的研究主要包含以下三个方面。

(1)信号稀疏性:“稀疏性”是压缩感知所利用的最主要的信号结构,是压缩感知的前提和

基础。

(2)投影测量矩阵的设计:主要设计原则是保证从测量矢量  $\mathbf{y}$  恢复出一大类信号  $\mathbf{x}$  的前提下尽可能地减少测量数  $M$ 。

(3)压缩感知重构算法:模型(1)通常表现为 NP 难解的<sup>[19]</sup>,因此需要寻找可用多项式时间求解的近似模型和算法。

## 2 压缩采样理论研究进展

### 2.1 稀疏性

“稀疏性”是自然界有意义信号的本质属性,是数据压缩算法的基础,也是压缩感知中所利用的最主要的信号结构。

定义 1(信号的稀疏性):对于  $N$  维信号  $\mathbf{x}$ ,若存在  $N \times N$  维变换矩阵  $\Psi$  和相应的稀疏向量  $\boldsymbol{\alpha}$  (仅含有  $K$  个非零元且  $K \ll N$ ),使得  $\mathbf{x} = \Psi\boldsymbol{\alpha}$ ,则称其具有稀疏性, $K$  为信号  $\mathbf{x}$  的稀疏度。

由于光学图像通常满足分片光滑性,利用 Fourier 变换、离散余弦变换(DCT)和小波变换(DWT)等均能实现信号的稀疏表示或近似稀疏表示。例如,国际通用的 JPEG 和 JPEG2000 图像压缩标准的核心分别为 DCT 和 DWT。这也从一定程度上表明,自然界中的大部分信号均满足稀疏性。

图像处理中的大量事实也表明,图像结构的复杂性和奇异特性的多样性,使得仅用一组完备基通常难以得到理想的稀疏表示<sup>[20]</sup>。为此,需要构造超完备字典来获得图像的稀疏表示。目前,常用的稀疏表示图像的超完备字典包括: Ridgelets<sup>[21]</sup>、Curvelet<sup>[22]</sup>、Beamlet<sup>[23]</sup>、Contourlet<sup>[24]</sup>、Bandelet<sup>[25]</sup>、Directionlet<sup>[26]</sup> 和复数小波(CWT)<sup>[27-28]</sup> 等。其中复数小波变换具有较好的方向选择性,同时实现简单,计算量小。另一类获取稀疏表示基的方法是通过训练一类图像得到,包括最优方向(MOF)方法<sup>[20]</sup>和 K-SVD 方法<sup>[29]</sup>。这类方法将图像分成若干小块,然后对每个小块进行训练,获得该小块的最优表示。这类方法得到的稀疏表示基之间不具有较好的结构性质,利用这组基表示图像时很难设计快速算法。

事实上,大多数自然/人造信号和图像除了具有稀疏性以外,其大系数的支撑通常还具有潜在的内部相关结构(例如,许多图像经小波变换后其小波系数具有树结构),为充分利用这种结构稀疏性,Baraniuk 等研究了带有附加结构的  $K$ -稀疏信号,恰当利用结构稀疏性能极大提升压缩

感知在实际应用中的效果<sup>[30]</sup>。值得一提的是,在 2009 年到 2012 年的三年间,欧洲第七框架规划专门支持了一个 SMALL ( Sparse Models, Algorithms and Learning for Large-scale data ) 项目<sup>[31]</sup>,对自适应稀疏结构进行了深入研究,并取得了丰富的研究成果,该项目指出:“稀疏表示为包括压缩感知在内的信号处理领域打开了新的思考之门。”

### 2.2 投影测量矩阵的设计与可重构条件

投影测量矩阵在压缩感知中起到至关重要的作用。投影测量矩阵  $\Phi$  的主要设计原则是保证从测量矢量  $y$  恢复出一大类信号  $x$  的前提下尽可能地减少测量数  $M$ 。但是,显然,  $M (< N)$  这一要求使得矩阵  $\Phi$  不是列满秩的,所以其零空间为非空集合;这表明,对给定的信号  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  和给定的感知矩阵  $\Phi$ ,将有无穷多个信号  $x$  得到相同的测量  $y_0 = \Phi x_0 = \Phi x$ 。

因此,投影测量矩阵  $\Phi$  的设计主要在于,尽管  $M \ll N$ ,对于感兴趣的信号类中的不同信号  $x, x'$ ,要保证能从它们的测量  $y = \Phi x, y' = \Phi x'$  中唯一地被识别出来。即,能否通过对模型(1)的近似求解而精确(不含噪)或稳定(含噪)恢复原信号,一般通过矩阵  $\Phi$  的某种性质度量满足一些条件来描述,这些性质包括: Spark<sup>[32]</sup>、相关性(coherence)<sup>[33]</sup>、约束等距性质(RIP)<sup>[34]</sup>和零空间性质(NSP)<sup>[35]</sup>等。下面仅以 RIP 性质为例,给出其定义及相关结论。

**定义 2<sup>[34]</sup>:**对所有  $K$  稀疏向量  $x$  和某个  $\delta_K < 1$ ,若下面的不等式成立

$$(1 - \delta_K) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|x\|_2^2$$

则称矩阵  $\Phi$  满足  $K$  阶约束等距性质,约束等距常数  $\delta_K$  定义为对所有的  $K$  稀疏信号, RIP 成立的最小常数。

近年来,国内外有许多工作利用 RIP 刻画  $\ell_p (0 < p \leq 1)$  最小化恢复稀疏信号的性能,下面对现有结果进行简单归纳。针对  $\ell_1$  最小化模型恢复任意  $K$ -稀疏信号,研究结果表明:对任意给定的  $K$ -稀疏信号  $x$ ,为从观测数据  $y = \Phi x$  中精确恢复  $x$ ,投影测量矩阵  $\Phi$  须满足表 1 所列参数的 RIP。

注意到,在用 RIP 给出  $\ell_1$  最小化精确恢复任意  $K$ -稀疏信号的条件时,参数从  $\delta_{2K} < 1/3$  改进到  $\delta_{2K} < 0.4931$ ,阶数从  $2K$  阶改进到  $K$  阶。恢复条件的放宽方便了投影测量矩阵的设计。

关于  $\ell_p (0 < p < 1)$  最小化模型和贪婪策略恢

复任意  $K$ -稀疏信号的条件,这里不再详述,感兴趣的读者可参考文献[41]。

表 1  $\ell_1$  最小化恢复任意  $K$ -稀疏信号的条件  
Tab. 1 The conditions of recovering  $K$ -sparse signals based  $\ell_1$  minimization

$\delta_K + \delta_{2K} + \delta_{3K} < 1$	Candes, Tao <sup>[2]</sup>
$\delta_{2K} + 3\delta_{4K} < 1$	Candes, Tao <sup>[34]</sup>
$\delta_{2K} < \frac{1}{3}$	Cohen, Devore <sup>[35]</sup>
$\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$	Candes <sup>[4]</sup>
$\delta_{2K} < \frac{2}{3 + \sqrt{2}} \approx 0.4531$	Fourcart, Lai <sup>[36]</sup>
$\delta_{2K} < \frac{3}{4 + \sqrt{6}} \approx 0.4652$	Fourcart <sup>[37]</sup>
$\delta_{2K} < \frac{2}{2 + \sqrt{5}} \approx 0.4721$	Cai, Wang, Xu <sup>[38]</sup>
$\delta_K < 0.307$	Cai, Wang, Xu <sup>[39]</sup>
$\delta_{2K} < 0.4931$	Mo, Li <sup>[40]</sup>

### 2.3 压缩感知重构算法

如前所述,压缩感知问题的模型如(1)所示,若测量数据中含有噪声,则重构模型变为

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad \text{s. t.} \quad \|y - \Phi \Psi \alpha\|_2 \leq \sigma \quad (2)$$

其中参数  $\sigma$  反映了测量噪声的水平。

式(1)和(2)等含有  $\ell_0$  范数的稀疏重构问题已被证明是 NP 难解的<sup>[19]</sup>,需要寻找多项式时间内可解的近似方法,现有的主要方法可以分为:

(1)凸优化方法:基本思想是将(1)和(2)式“松弛”为凸优化问题,利用凸函数性质,实现多项式时间内的稀疏重构。由于  $\ell_1$  范数是最接近  $\ell_0$  范数的凸函数<sup>[42]</sup>,因此常将  $\ell_0$  范数松弛为  $\ell_1$  范数。求解  $\ell_1$  最小化模型的方法包括:内点法<sup>[43]</sup>、梯度投影算法<sup>[44]</sup>、迭代阈值法<sup>[45]</sup>、Bregman 迭代法<sup>[46-47]</sup>和交替方向法<sup>[48]</sup>等。

内点法为最早的  $\ell_1$  范数凸优化求解方法,但其重构结果受参数影响较大,且计算复杂度高、不适用于二维成像等大数据量应用问题。迭代阈值法的基本思想来源于小波软阈值去噪方法,对求解大尺度问题效率很高,但大多数这类算法在“稀疏度-欠采样”平衡方面比凸优化要差<sup>[18]</sup>,而最近 Donoho 等提出的 AMP ( Approximate Message Passing ) 算法<sup>[49]</sup>在这方面是一个突破。求解  $\ell_1$  最小化模型的其他算法,如不动点迭代法<sup>[50]</sup>,梯度投影算法<sup>[51]</sup>等,这里不做展开。

(2)贪婪算法:基本思想是迭代地从字典中

选择原子,并计算相应的系数,使得这些原子的线性组合与测量数据之间的差别逐渐减小。主要的贪婪算法有:正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法<sup>[52-53]</sup>、Stagewise OMP (StOMP)算法<sup>[54]</sup>、Regularized OMP (ROMP)算法<sup>[55]</sup>以及 Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP)<sup>[56]</sup>等。这些算法计算简单,容易实现。

在大规模问题的快速算法方面,爱丁堡大学小组研究了硬阈值、迭代硬阈值、基于 CoSaMP 和子空间追踪的两步阈值等贪婪算法的 GPU 实现。他们研制的软件能在秒以内的时间解决目前文献中无法解决的高维问题。利用自动的多线程,与标准 MatLab CPU 实现相比, GPU 实现能达到 70 倍的加速<sup>[57]</sup>。

(3)其他算法:一些非凸优化算法,如将  $l_0$  范数松弛为  $l_p$  ( $0 < p < 1$ ) 范数<sup>[58]</sup>;或者通过先验分布引入稀疏性,再用 Bayesian 方法实现信号稀疏重构<sup>[59]</sup>;数值求解  $l_p$  ( $0 < p < 1$ ) 最小化模型的方法包括:不动点迭代法<sup>[60]</sup>和迭代重加权最小二乘法<sup>[61]</sup>等。由于  $l_p$  范数的非凸性,数值求解  $l_p$  最小化通常只能保证获得其局部最优解,但在多数情况下,该局部最优解即为需要的稀疏解。此外,还有一些启发式算法,如借鉴图模型和编码理论中的 belief-propagation 和 message-passing 技术<sup>[62,49]</sup>。

### 3 光学压缩成像系统研究进展

本质上说,压缩感知可以应用于所有具有下述特点的任务:利用线性测量数据来重构信号或图像,而获取大量的测量数据是一个高成本的、过量的、困难的、危险的、不可能的或其他所不期望的过程<sup>[63]</sup>。因此,压缩感知在医疗影像、太赫兹成像、光学成像、雷达、超宽带信号检测、模拟信号采集等诸多领域展现出巨大的应用潜力。本节主要介绍压缩感知在光学成像应用方面的发展。

开发实际的光学系统以充分利用压缩感知理论是目前信号处理、光学、优化、天文学和编码理论等领域研究者所面临的挑战问题。除了对所收集到测量数据有一些固有的硬件约束如投影矢量和测量的非负性之外,实际的 CS 成像系统还必须是稳健的、尺寸合理的<sup>[64]</sup>。截至目前,已经建立了几种压缩感知光学成像装置并在实验室进行了测试。概括来说,这些方案的主要挑战是找到一种能有效在以下几个方面进行折中的系统结构:a) 物理上的考虑如尺寸和花费;b) 重构精度;c) 重构速度。下面对几类压缩成像系统结构

进行介绍。

#### (1)单像素相机

压缩感知应用于光学成像的首个实际系统是 Rice 大学 Baraniuk 等建立的“单像素相机”<sup>[7]</sup>。其原理图与实际系统如图 1 所示。

左图中,入射光线经过第一个透镜之后进入成像系统,照射在放置于像平面的数字微镜设备(Digital Micro-mirror Device, DMD)阵列上。DMD 阵列由数百万个尺寸为  $\mu\text{m}$  量级的微小反射镜组成,每个反射镜的角度可独立控制(图中使用黑白两色表示两个不同的反射角度),从而可控制其上的反射光线的方向。DMD 阵列的反射光线经过第二个透镜,将投影的总强度用单个探测元来测量。DMD 上每个微小反射镜的角度是可以控制的,频率可达  $10^3\text{Hz}$ ,因此可在相对短的时间内得到一系列投影测量值。由这些观测值利用 CS 重构方法就能得到原始图像。这种结构的主要优点是可实现任意二进制投影矩阵,因此对测量数据可以直接用已有的 CS 理论。缺点是需要将相机始终对准感兴趣目标直到获取了重构所需的足够多的采样,而有些应用中是不允许长时间的。

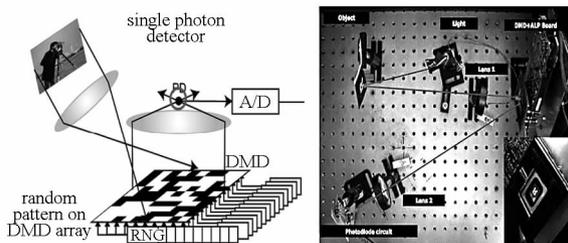


图 1 Rice 大学单像素相机原理图与实际系统

Fig. 1 The schematic diagram and optical system of the single pixel imager

同时, Rice 大学在美国国防高级研究计划局(DARPA)“DARPA A2I Receiver Program”项目<sup>[65]</sup>的资助下,对含单像素相机在内的许多应用开展了深入的研究,包括:单像素显微镜、CS Terahertz 成像、压缩阵列信号处理、CS 在计算机视觉中的应用、基于 CS 的数据隐藏等。

特别地,作者所在的研究小组针对成像系统与成像场景间存在相对运动这一情况研究了运动补偿压缩成像方法。首先对运动环境下的压缩采样进行建模,然后结合压缩感知框架下的稀疏约束重构,提出了联合重构方法。在此基础上,基于单像素相机原理设计了物理模拟实验,如图 2 所示,其中成像目标置于电控运动平台之上,模拟成像系统与成像场景之间的相对运动。

实验结果表明,当数据获取时间内相对运动较大时,考虑运动模型对重构图像质量有很大提高,进一步,结合运动模型,还能进行超分辨率成像<sup>[66]</sup>。

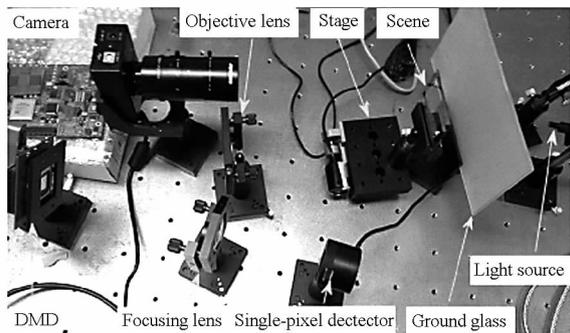


图 2 运动情况下的单像素压缩成像系统

Fig. 2 Dynamic single-pixel imaging system

## (2) 编码孔径相机

Marica 和 Willett<sup>[64]</sup>、Romberg<sup>[67]</sup> 等利用编码孔径提出了压缩感知思想的实际实现。他们指出,如果用伪随机结构来设计编码孔径,那么得到的观测模型满足 RIP 条件。进一步,如果在随机矩阵结构上能加速,相应的感知矩阵具有 Toeplitz 结构,则能在重构算法中实现快速计算。“随机透镜成像”系统 MIT 研发的一类压缩成像并行结构,它采用反射式或投射式的随机透镜实现图像在成像物理层的压缩测量,省略了成像透镜,大大缩短了成像装置的体积<sup>[11]</sup>。

## (3) CMOS 压缩成像相机

Robucci、Majidzadeh 等提出在 CMOS 电子学层面实现模拟的随机卷积步骤<sup>[68]</sup>。其优点是不需要附加的光学器件来进行空间光调制,从减小相机尺寸的角度看,是一个不错的平衡。利用 CMOS 每个像素均可编程的特点,通过适当的电路和模拟域的操作,可以实现特定投影测量矩阵的压缩采样。相比于其他需要增加昂贵光学器件的实现方法,CMOS 实现的成本较低。但这种系统不能充分发挥压缩成像带来的优势,如高的信噪比与量子效率。

## (4) 无透镜单像素压缩成像系统

贝尔实验室最近提出了一种无透镜单像素压缩成像系统<sup>[69]</sup>,其原理如图 3 所示,主要包括孔径组件与单像素探测器,其中的孔径用 LCD 来实现,分别用来进行二维编码与压缩测量,大大简化了成像系统,还避免了因光学散焦等造成的图像降质。

## (5) 多光谱压缩成像系统

现有多光谱成像系统在某一时刻只能形成多

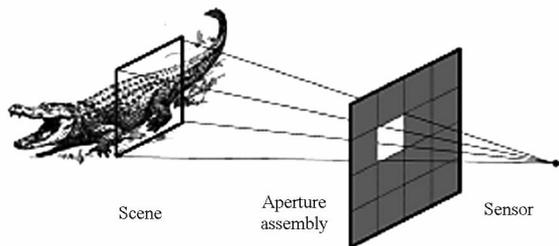


图 3 无透镜单像素成像原理

Fig. 3 Lensless compressive sensing imaging

光谱“数据体”中的二维,因此需要多个时刻才能形成三维的观测,并且所需的测量数大于重构数据体的像素数。而基于压缩感知的多光谱成像所需的测量数少于重构数据体的像素数。Duke 大学的 DISP 小组开发了一种新的多光谱压缩成像系统(CASSI)<sup>[70-71]</sup>。它利用编码孔径和色散介质调制场景的光场,一个探测器获取三维数据体的二维、多路投影。因此,CASSI 不直接测量三维数据体的“体素”,而是通过少量的压缩编码测量和稀疏重构算法来估计数据体。

另外,国内的中科院上海光机所提出并建成了基于位相掩膜的单帧曝光多光谱压缩成像原理样机<sup>[72]</sup>。

其他基于压缩感知原理建立的光学成像系统有:压缩结构光成像<sup>[8-9]</sup>、压缩对偶摄影<sup>[10]</sup>以及 DARPA 资助的超薄成像系统<sup>[74]</sup>和红外多路成像系统<sup>[74]</sup>等。

## 4 压缩感知相关的一些挑战性问题

最近几年,压缩感知的理论和应用都得到了飞速的发展,但仍然存在很多问题亟待解决。本节简要讨论与压缩感知相关的一些挑战性问题。

### (1) 结构稀疏性及其他先验信息

“经典”的压缩感知理论并没有考虑信号非零项位置的任何结构或其他先验信息。我们如何利用“信号中所具有的稀疏模式并不完全一样”这一先验知识?结构稀疏性只是很多先验信息中的一种,还有如信号系数的非负性,以及与应用相关的先验信息,如一定分子构型的相似性或因为排斥力导致的稀疏系数之间的最小距离等。特别是在低 SNR 条件下,恰当利用可能的先验信息能对重构信号质量产生很大的影响。

### (2) 结构感知矩阵

随机矩阵的相关理论已经日趋完善,但在实际应用中,感知矩阵往往由感知过程的物理特性所描述,且受实际实现过程的约束限制。另外,带有特定结构的感知矩阵还能在矩阵矢量乘法中实

现快算算法,从而大大加速重构算法。因此,实际中的感知矩阵并不是 Gaussian 或 Bernoulli,而是具有特殊结构的矩阵。关于结构感知矩阵的理论界还远不如 Gaussian 类随机矩阵(要么需要更多的测量数,要么需要信号具有更强稀疏性,要么就不具有普适性)完善。能否发展一些工具来建立结构矩阵的压缩感知理论(与随机矩阵相比拟)来克服已有理论的局限,是目前该领域亟待解决的问题。

### (3) 压缩成像中的非负性与光子噪声<sup>[64]</sup>

由压缩感知理论可知,伪随机感知矩阵满足 RIP 性质,因此理论上能保证高斯或有界噪声下的重构精度。但是,这些感知矩阵是零均值的,因此大约有一半的元素是非负的。而利用线性光学器件是不可能构造出这种系统的。另外,高斯或有界噪声模型并不适合所有的光学系统。最后,还有一些物理上的约束条件如:探测器上接收的总光强不可能超过进入相机孔径的光强。在压缩感知成像系统实现中考虑这些实际的因素将成为一个持续热门的研究方向。

### (4) 硬件设计

压缩感知使得发展新的数据获取硬件成为可能。目前,压缩感知已经在很多应用领域中发挥作用,如核磁共振成像(MRI)、天文、模数转换等,详见 Igor Carron 给出的压缩感知硬件列表<sup>[75]</sup>。但是,如何结合实际应用需求(如光学遥感成像、雷达成像等),从系统的高稳定性和低复杂度出发,设计和制造基于压缩感知的硬件仍然是一个巨大的挑战。

另外,在压缩感知硬件发展中,噪声是主要的限制因素,如何进行修正仍然是一个问题。要想在硬件发展领域取得突破,需要工作在理论、算法和硬件设计等不同方面的科学家们之间形成有效的反馈闭环。

## 5 总结

本文仅对压缩感知的基本理论及其在光学成像中的应用进展进行了总结,并指出了压缩感知面临的一些挑战性问题。需要指出的是,国内相关研究也取得了丰富的成果,例如,浙江大学、中科院数学与系统科学研究院、北京交通大学在压缩感知可重构条件方面;西安交通大学、香港理工大学在  $\ell_p$  ( $0 < p \leq 1$ ) 模型优化的理论和算法方面;南京大学、香港浸会大学在稀疏优化方面;中国科技大学、西安电子科技大学、哈尔滨工业大学、中科院电子所在电子、遥感、SAR 等应用领

域中的工作等。另外,中科院上海光机所、中科院光电研究院等单位在压缩感知关联成像、压缩感知高光谱成像等方面都开展了深入的研究。然而,作为一篇综述性的论文,笔者在撰写期间深感该领域内研究进展之神速,许多并行的理论和技术难以充分涵盖,对于无法尽述之处深感遗憾。

压缩感知是一个新兴的、快速发展的领域,吸引了包括信号处理、统计、计算机科学和其他科学领域(如网络科学)的广泛关注。为实现基于压缩感知的技术革新,我们需要以集成和跨学科的方式来发展硬件和算法。压缩感知迫使我们以一种真正集成的方式来思考信息、复杂度、硬件和算法等。同时,压缩感知也将促使数学家和工程师们一起开展更深层次的交叉研究。

## 参考文献 (References)

- [1] Candès E J. Compressive sampling [C]//Proceedings of International Congress of Mathematics, Madrid, Spain, 2006, 3: 1433 - 1452.
- [2] Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51 (12): 4203 - 4215.
- [3] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (4): 1289 - 1306.
- [4] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (2): 489 - 509.
- [5] Lustig M, Donoho D, Pauly J M. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58 (6): 1182 - 1195.
- [6] Trzasko J, Manduca A. Highly undersampled magnetic resonance image reconstruction via homotopic  $\ell_0$  - minimization[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2009, 28 (1): 106 - 121.
- [7] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83 - 91.
- [8] CAVE Project. Compressive structured light for recovering inhomogeneous participating media [R/OL] <http://www1.cs.columbia.edu/CAVE/projects/csl/>
- [9] Gu J, Nayar S K, Grinspun E, et al. Compressive structured light for recovering inhomogeneous participating media [C]//Proceedings European Conference on Computer Vision, 2008: 845 - 858.
- [10] Sen P, Darabi S. Compressive dual photography [C]//Proceedings of Eurographics, 2009, 28(2): 609 - 618.
- [11] Fergus R, Torralba A, Freeman W T. Random lens imaging [R]. MIT Computer Science and Artificial Intelligence Laboratory, 2006.
- [12] Sun B, Edgar M P, Bowman R, et al. 3D computational imaging with single-pixel detectors[J]. Science, 2013, 340: 844 - 847.
- [13] Baraniuk R, Steeghs P. Compressive radar imaging [C]//Proceedings of IEEE Radar Conference, 2007: 128 - 133.
- [14] Bhattacharya S, Blumensath T, Mulgrew B, et al. Fast

- encoding of synthetic aperture radar raw data using compressed sensing [C]//Proceedings of IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing, 2007; 448 - 452.
- [15] Bhattacharya S, Blumensath T, Mulgrew B, et al Synthetic aperture radar raw data encoding using compressed sensing [C]// Proceedings of IEEE Radar Conference, 2008; 1 - 5.
- [16] Fanjiang A. Compressive inverse scattering I. High frequency SIMO measurements [EB/OL]. arXiv: 0906. 5405
- [17] National Research Council of The National Academies. The mathematical science in, 2025 [R]. 2013.
- [18] Strohmer T. Measure what should be measured; progress and challenges in compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(12): 887 - 893.
- [19] Donoho D L, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(7): 2845 - 2862.
- [20] Olshausen B A, Field D J. Emergence of simple cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images [J]. Nature, 1996, 381(6583): 607 - 609.
- [21] Candes E. Ridgelets: theory and applications [D]. Stanford: Stanford University, 1998.
- [22] Candès E J, Donoho D L. Continuous curvelet transform: I. Resolution of the wavefront set [J] Applied and Computational Harmonic Analysis, 2003, 19: 162 - 197.
- [23] Donoho D, Huo X. Beamlets and multiscale image analysis [C]// In Multiscale and Multiresolution Methods, LNCSE, 2002, 20: 149 - 196.
- [24] Do M N, Vetterli M. Framing pyramids [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(9): 2329 - 2342.
- [25] Penne E, Mallat S. Nonlinear image approximation with bandelets [J] Multiscale Model Simulation, 2003, 4(3): 992 - 1039.
- [26] Velisavljevic V, Beferull-Lozano B, Vetterli M. Directionlets: anisotropic multi-directional representation with separable filtering [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(7): 1916 - 1933.
- [27] Kingsbury N. Image processing with complex wavelets [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, Mathematical, Physical & Engineering Sciences, 1999, 357(1760): 2543 - 2560.
- [28] 严奉霞. 复数小波理论及其在图像去噪与增强中的应用研究 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2007.  
YAN Fengxia. Complex wavelet theory and its application in image denoising and enhancement [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2007. (in Chinese)
- [29] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: an algorithm for designing over-complete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2006, 54(11): 4311 - 4322.
- [30] Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, et al. Model-based compressive sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(4): 1982 - 2001.
- [31] <http://small-project.eu/>.
- [32] Donoho D L, Elad M. Maximal sparsity representation via  $\ell_1$  minimization [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2002.
- [33] Donoho D L, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(7): 2845 - 2862.
- [34] Candes E, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Communications on Pure Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207 - 1223.
- [35] Cohen A, Dahmen W, DeVore R. Compressed sensing and best k-term approximation [J]. Journal of the American Mathematical Society, 2009, 22: 211 - 231.
- [36] Foucart S, Lai M. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via  $\ell_q$  minimization for  $0 < q \leq 1$  [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 16: 395 - 407.
- [37] Foucart S. A note on guaranteed sparse recovery via  $\ell_1$ -minimization [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 395 - 407.
- [38] Cai T, Wang L, Xu G. Shifting inequality and recovery of sparse signals [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2010, 58(3): 1300 - 1308.
- [39] Cai T, Wang L, Xu G. Stable recovery of sparse signals and an oracle inequality [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(7): 3516 - 3522.
- [40] Mo Q, Li S. New bounds on the restricted isometry constant  $\delta_{2K}$  [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2011, 31(3): 460 - 468.
- [41] 黄石生. 数学成像的稀疏约束正则方法 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2012.  
HUANG Shisheng. Sparse constrained regularized methods of mathematical imaging [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012. (in Chinese)
- [42] Tropp J A. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems [C]//Proceedings of the IEEE special issue on applications of sparse representation and compressive sensing, 2009.
- [43] Gribonval R, Nielsen M. Highly sparse representations from dictionaries are unique and independent of the sparseness measure [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 22: 335 - 355.
- [44] Figueiredo M, Nowak R, Wright S. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Process: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Process, 2007, 1(4): 586 - 598.
- [45] Daubechies I, Defrise M, Mol C D. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57: 1413 - 1457.
- [46] Yin W, Osher S, Goldfarb D, et al. Bregman iterative algorithms for  $\ell_1$ -minimization with applications to compressed sensing [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1: 143 - 168.
- [47] Osher S, Mao Y, Dong B, et al. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising [J]. Communications in Mathematical Sciences, 2010, 8(1): 93 - 111.
- [48] Osher S, Burger M, Goldfarb D, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration [J]. SIAM Multiscale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 460 - 489.
- [49] Donoho D, Maleki A, Montanari A. Message-passing algorithm for compressive sensing [J] Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS), 2009, 106(45): 18914 - 18919.

- [50] Hale E, Yin W, Zhang Y. Fixed-point continuation for  $\ell_1$ -minimization: Methodology and convergence [ J ]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 19: 1107 – 1130.
- [51] Deng J, Ren G H, Jin Y S, et al. Iterative weighted gradient projection for sparse reconstruction. [ J ]. Information Technology Journal, 2011, 10: 1409 – 1414.
- [52] Mallat S G, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397 – 3415.
- [53] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [ J ]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655 – 4666.
- [54] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stage-wise orthogonal matching pursuit [ EB/OL ]. <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/2006/>
- [55] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [ J ]. Foundations of Computational Mathematics, 2008, 9(3): 317 – 334.
- [56] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [ J ]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26: 301 – 321.
- [57] Blanchard J D, Tanner J. GPU accelerated greedy algorithms for compressive sensing [ EB/OL ]. <http://www.math.grinnell.edu/blanchaj/GAGACS.pdf>
- [58] Candes E J, Wakin M B, Boyd S P. Enhancing sparsity by reweighted  $\ell_1$  minimization [ J ]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5): 877 – 905.
- [59] Wipf D, Rao B. Sparse Bayesian learning for basis selection [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(8): 2153 – 2164.
- [60] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization [ J ]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(10): 707 – 710.
- [61] Daubechies I, DeVore R, Fornasier M. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery [ J ]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2010, 63(1): 1 – 38.
- [62] Baron D, Sarvotham S, Baraniuk R G. Bayesian compressive sensing via belief propagation [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009.
- [63] Scherzer O. Handbook of mathematical methods in imaging [ R ]. Springer, Springer Science Business Media, LLC.
- [64] Willett R M, Marcia R F, Nichols J M. Compressed sensing for practical optical imaging systems: a tutorial [ J ]. Optical Engineering, 2011, 50(7), 072601: 1 – 12.
- [65] <http://dsp.rice.edu/a2i>
- [66] Wang Z L, Zhu J B, Yan F X, et al. Superresolution imaging by dynamic single-pixel compressive sensing system [ J ]. Optical Engineering, 2013, 52(6), 063201: 1 – 9.
- [67] Romberg J. Compressive sampling by random convolution [ J ]. SIAM Journal Imaging Sciences, 2009, 2(4): 1098 – 1128.
- [68] Robucci R, Gray J D, Chiu L K, et al. Compressive sensing on a CMOS separable-transform image sensor [ C ]// Proceedings of IEEE, 2010, 98(6): 1089 – 1101.
- [69] Huang G, Jiang H, Matthews K, et al. Lensless compressive sensing imaging [ J/OL ]. arXiv: 1302.1789. 2013.
- [70] Wagadarikar A, John R, Willett R, et al. Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging [ J ]. Applied Optics, 2008, 47(10): B44 – B51.
- [71] Gehm M E, John R, Brady D J, et al. Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging [ J ]. Optics Express, 2007, 15(21): 14013 – 14027.
- [72] [http://www.siom.cas.cn/xwzx/kydt/201308/t20130814\\_3912010.html](http://www.siom.cas.cn/xwzx/kydt/201308/t20130814_3912010.html)
- [73] Portnoy A D, Pitsianis N P, Brady D J, et al. Thin digital imaging system using focal plane coding [ C ]// Proceedings of SPIE-IS&T Electronic Imaging, SPIE, 2006.
- [74] Milojkovic P, Gill J, Frattin D, et al. Multi-channel, agile, computationally enhanced camera based on the PANOPTES architecture [ C ]// Unmanned Systems Technology XII// Proceedings of the SPIE, 2010.
- [75] <http://sites.google.com/site/igorcarron2/compressivesensinghardware>