

应用压力间断解析解修正 AUSM⁺-up 格式*

李 干,程谋森,李小康

(国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘要: AUSM⁺-up 格式是近年来发展的 AUSM 类格式,通过对流通量中引入压力耗散,同时在压力通量中引入速度耗散,使之在各种马赫数下均有良好的收敛性和稳定性。然而,通过对格式的分析,我们发现当马赫数为零时,在压力间断位置会出现质量通量无穷大的非物理现象。为了克服这一缺陷,采用特征线法获得了压力间断问题的解析解;以此为基础,对对流通量中的压力耗散项进行修正,发展出新的 AUSM⁺-up 格式。以新的格式对不同速度驱动下的冲击波发展、不同强度压力间断问题和激波衍射问题进行了仿真,计算结果与理论解吻合得较好。

关键词: 压力间断;解析解;AUSM⁺-up 格式

中图分类号:V211.3 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2014)03-0001-05

Applying the analytic solution of pressure discontinuity to modify the AUSM⁺-up scheme

LI Gan, CHENG Mousen, LI Xiaokang

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: AUSM⁺-up scheme is one of the most important schemes of ASUM-family. By introducing pressure dissipative mechanism into the convective fluxes and velocity diffusion into pressure fluxes, the convergence and robustness are remarkably improved in all Mach number regimes. However, based on an analysis of the scheme, it is found that a nonphysical phenomenon of infinite mass flux emerges when the Mach number is zero. For conquering the imperfection, the analytic solution of pressure discontinuity is obtained by the characteristic method. According to the results, the item of pressure dissipation is modified, and a new AUSM⁺-up scheme is developed. Using the new scheme, the strong discontinuity problems of shock wave, pressure discontinuity and shock wave diffraction are simulated. The Calculation results fit the theory results well.

Key words: pressure discontinuity; analytic solution; AUSM⁺-up scheme

好的计算流体力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)格式要求具有间断与粘性分辨率好、计算效率高、可靠性好且适用范围广等特点^[1]。朝着这一目标,20世纪90年代,Liou等综合矢量通量分裂格式(Flux Vector Splitting, FVS)^[2]和通量差分格式(Flux Difference Splitting, FDS)^[3-4]的优点,在混合通量差分思想的引导下构造出著名的迎风型矢量通量分裂格式(Advection Upstream Splitting Method, AUSM)^[5]。AUSM的基本思想是把无粘通量分为对流项和压力项分别进行处理,将FVS在非线性波捕捉上的鲁棒性和FDS对线性波的高分辨率结合起来,使其在复杂流场计算方面显示出强大的优势^[4]。经过二十多年的发展,AUSM类格式逐步完善,相继出现了AUSMDV、AUSM⁺、AUSMPW和AUSM⁺-UP等

一系列改进格式^[5]。AUSM⁺是目前应用较为广泛的一种AUSM类格式,格式简单、稳定性好、计算精度高并消除了AUSMDV等格式出现的“粉刺”现象,但是在强激波后会产生压力过冲,且马赫数较小时存在压力震荡^[4]。AUSM⁺-UP格式是近年发展的格式,通过对流通量中加入压力耗散机制、同时在压力通量中加入速度耗散机制,消除了AUSM⁺格式的缺陷,在各种马赫数下都有良好的收敛性和稳定性^[7],因此被广泛应用于多相流^[8-9]、低马赫数^[10]和全速域^[11]等问题中。然而,通过分析我们发现当马赫数为零时,AUSM⁺-UP格式在压力间断位置会出现质量通量无穷大的非物理现象,为了克服这一问题,我们以压力间断问题的解析解为基础,对格式进行修正,并通过算例验证修正格式的合理性。

* 收稿日期:2013-10-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51306203)

作者简介:李干(1985—),男,江西宁都人,博士研究生,E-mail:ligan0001@gmail.com;

程谋森(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:chengmousen@vip.sina.com

1 AUSM⁺-up 格式

1.1 AUSM⁺-up 格式基本思想

作为 AUSM 系列格式之一, AUSM⁺-UP 格式同样将无粘通量分为对流项和压力项进行处理。考虑一维 Euler 方程:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中, $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho \mathbf{E})^T$, $\mathbf{E} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u \mathbf{H})^T$ 其半离散格式为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{(\tilde{m}\boldsymbol{\psi} + \mathbf{P})|_{i-1/2}^{i+1/2}}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

式中: $\tilde{m} = \rho u$, $\boldsymbol{\psi} = (1, u, \mathbf{H})^T$, $\mathbf{P} = (0, p, 0)^T$ 。AUSM⁺-up 格式的关键在于确定质量通量 \tilde{m} 和压力通量 \mathbf{P} 。

质量通量取决于界面处的声速 $a_{1/2}$ 和马赫数 $M_{1/2}$ 。为了更好地捕捉冲击间断, Liou 等^[12] 建议将 $a_{1/2}$ 定义为

$$a_{1/2} = \min(\hat{a}_L, \hat{a}_R),$$

where $\hat{a}_{L/R} = a^*/\max(a^*, |u_{L/R}|)$ (3)

其中, u_L 和 u_R 分别为界面左右节点速度, $a^* = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p}{\rho}$ 为临界声速。

借鉴数值声速的概念^[13], Liou 等^[7] 将 $M_{1/2}$ 定义为

$$M_{1/2} = \mathcal{M}^+(M_L) + \mathcal{M}^-(M_R) + M_p \quad (4)$$

其中, $M_{L/R} = \frac{u_{L/R}}{a_{1/2}}$ 为界面两侧节点马赫数,

$\mathcal{M}^+(M_L)$ 和 $\mathcal{M}^-(M_R)$ 为权重多项式^[12]:

$$\mathcal{M}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|) & \text{if } |M| \geq 1, \text{ else} \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 [1 + 4\beta(M \mp 1)^2] & \end{cases} \quad (5)$$

M_p 为压力耗散项, 以增强低马赫数下格式的鲁棒性, 定义为

$$M_p = -\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{p_R - p_L}{\rho_{1/2} a_{1/2}^2} \quad (6)$$

其中, $\rho_{1/2} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}$, $\bar{M}^2 = \frac{(u_L^2 + u_R^2)}{2a_{1/2}^2}$,

$f_a = M_o(2 - M_o)$, $M_o^2 = \min(1, \max(\bar{M}^2, M_\infty^2))$ 。

确定界面马赫数后, 质量通量和压力通量可以定义为

$$\tilde{m}_{1/2} = a_{1/2} M_{1/2} \begin{cases} \rho_L & \text{if } M_{1/2} > 0 \\ \rho_R & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{1/2} = \mathcal{F}^+(M_L) \mathbf{P}_L + \mathcal{F}^-(M_R) \mathbf{P}_R$$

$$-K_u \mathcal{F}^+ \mathcal{F}^-(\rho_L + \rho_R)(f_a a_{1/2})(u_R - u_L) \quad (8)$$

其中:

$$\mathcal{F}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{2M}(M \pm |M|) & \text{if } |M| \geq 1, \text{ else} \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 [(\pm 2 - M) + 4\alpha M(M \mp 1)^2] & \end{cases} \quad (9)$$

在压力通量的定义中引入速度耗散项, 以表征动压对压力通量的影响。最后, 完整的通量可以表示为

$$\mathbf{E}_{1/2} = \tilde{m}_{1/2} \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_L & \text{if } \tilde{m}_{1/2} > 0 \\ \boldsymbol{\psi}_R & \text{otherwise} \end{cases} + \mathbf{P}_{1/2} \quad (10)$$

格式中涉及的可变参数为 K_p 、 K_u 、 σ 、 α 和 β 计算时可取为

$$K_p = 0.25, K_u = 0.75,$$

$$\sigma = 1.0, \alpha = \frac{3}{16}(-4 + 5f_a^2), \beta = \frac{1}{8} \quad (11)$$

AUSM⁺-up 格式是拓展 AUSM⁺ 格式获得的, 在压力通量中增加了速度耗散项 u , 在对流通量中增加了压力耗散项 p , 因此命名为 AUSM⁺-up^[7]。

1.2 AUSM⁺-up 格式的缺陷

观察 AUSM⁺-up 格式的构造, 可以发现压力和速度耗散项的引入使得格式更贴近物理过程, 压力耗散反映了压差驱动的速度发展, 速度耗散描述了动压对静压的影响。然而, 上述 AUSM⁺-up 格式存在一个较明显的缺陷: 当远场马赫数和流场速度均为零且存在压力间断时, 根据式(7)计算的间断面质量通量为无穷大, 这一现象显然是非物理的, 需要从物理过程出发进行修正。

2 AUSM⁺-up 格式修正

2.1 压力间断问题分析

考虑一维管道内存在压力间断时流动的发展, 问题如图 1 所示。

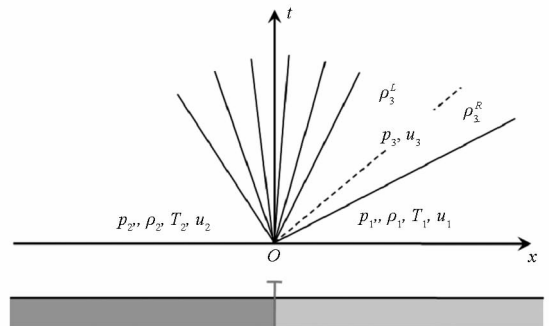


图 1 一维压力间断流场波系图

Fig. 1 Structure of the flow induced by 1D pressure discontinuity

若两侧均为绝热指数为 γ 的多方气体,当 $u_1 = u_2 = 0$ 时,根据稀疏波和冲击波关系可得

$$\begin{cases} p_3 = p_2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_3}{a_2} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{p_3 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M^2 - 1) \\ \frac{u_3}{a_1} = \frac{2}{\gamma+1} \left(M - \frac{1}{M} \right) \end{cases} \quad (12)$$

其中, $M = D/a_1$, D 为冲击波速度, a_1 为 1 区声速。进一步化简得

$$\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} (M^2 - 1) + 1 \right] = \theta \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{a_1}{a_2} \left(M - \frac{1}{M} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (13)$$

其中 $\theta = \frac{p_2}{p_1}$ 。

因此,根据上式可知,当 $\theta \approx 1$ 时有

$$(M-1) \rightarrow \frac{\gamma+1}{4\gamma} \frac{a_2}{a_2+a_1} (\theta-1) \quad (14)$$

当 $\theta \gg 1$ 时,有

$$M \rightarrow \frac{(\gamma+1)a_2 + \sqrt{[(\gamma+1)a_2]^2 + 4(\gamma^2-1)a_1a_2}}{2(\gamma-1)a_1} \quad (15)$$

即

$$\begin{cases} u_3 \rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{a_1 a_2}{a_2 + a_1} \frac{p_2 - p_1}{p_1} & \theta \approx 1 \\ u_3 \rightarrow \frac{2}{\gamma-1} a_2 & \theta \gg 1 \end{cases} \quad (16)$$

2.2 压力耗散修正

式(14)给出了压差驱动速度随压差程度之间的变化关系,为了修正 AUSM⁺-up 格式的缺陷,将压力耗散项定义为

$$M_p = \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{\hat{a}}{\gamma(a_L + a_R)} \cdot$$

$$\left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{a_L + a_R}{|\hat{a}|} \right) + \left(\theta - 1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{a_L + a_R}{|\hat{a}|} \right) \exp\left(\frac{-\theta+1}{K_{p+}} \right) \right] \quad (17)$$

其中, $\hat{a} = \begin{cases} a_L & \text{if } p_L > p_R \\ -a_R & \text{else} \end{cases}$, $\theta = \frac{\max(p_L, p_R)}{\min(p_L, p_R)}$,

K_{p+} 为格式调节参数。这样,就能在所有速度区间和压力区间内避免出现质量通量无穷大的奇点,并且以理论解为基准,使格式更贴近实际物理过程。

3 格式验证及分析

3.1 活塞驱动流场计算

采用修正格式和不含压力耗散项的格式分别

对一维欧拉方程进行空间离散,并以二阶荣格库塔进行时间迭代,对不同活塞运动驱动的流场进行计算,所得结果如图 2、图 3 和图 4 所示。从图中可以看到,不同活塞速度下,修正格式计算结果与理论解析解都吻合的较好。对比不同格式的计算结果可以发现,随着活塞速度的减小,二者计算结果的差异逐渐增大。压力耗散项的引入能够有效提高格式计算的准确性,并遏制间断面附近的色散。尤其是,当活塞速度较小时,不含压力耗散项格式的计算结果具有明显的震荡现象,修正格式引入的压力耗散项近似为 $\frac{1}{\gamma} \frac{a_1}{a_2 + a_1} \frac{p_2 - p_1}{p_1}$ (不妨认为 $p_2 > p_1$),根据弱冲击波近似关系可得:

$p_2 - p_1 \approx \rho_1 a_1 u_3$, 因此 $M_p \approx \frac{u_3}{2a_1}$ 。代入半离散方程

可知,活塞速度小(压差小)时,耗散项的引入相当于引入了一个三阶正色散,能够有效减小震荡。速度较大时,压力通量的速度耗散项增大,修正格式和不含压力耗散项格式的计算结果相近。压力耗散项有效提高了修正格式在低马赫数下的计算能力。

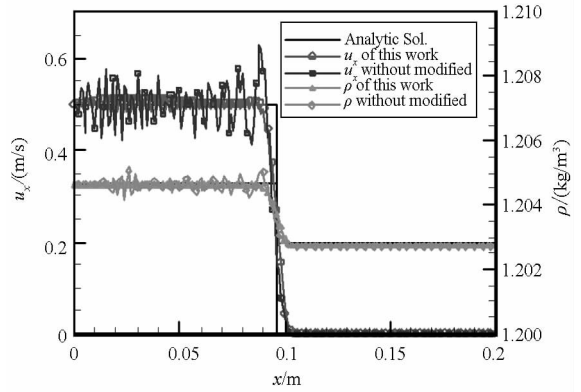


图2 $u_x = 0.5 \text{ m/s}$ 时活塞驱动流场发展

Fig. 2 Flow drove by piston as $u_x = 0.5 \text{ m/s}$

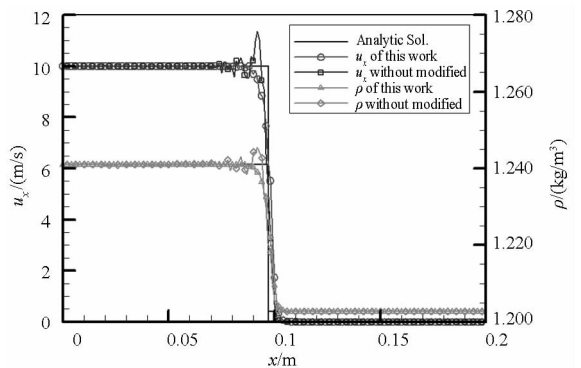


图3 $u_x = 10 \text{ m/s}$ 时活塞驱动流场发展

Fig. 3 Flow drove by piston as $u_x = 10 \text{ m/s}$

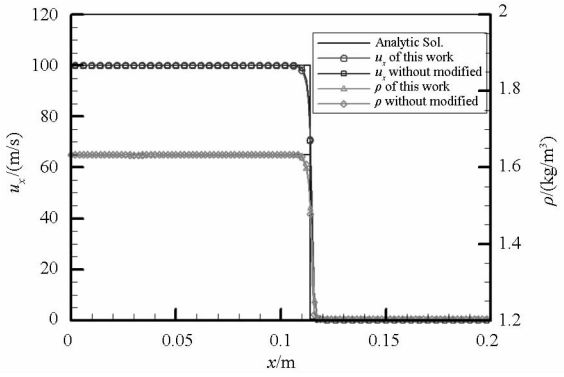


图 4 $u_x = 100\text{m/s}$ 时活塞驱动流场发展

Fig. 4 Flow drove by piston as $u_x = 100\text{m/s}$

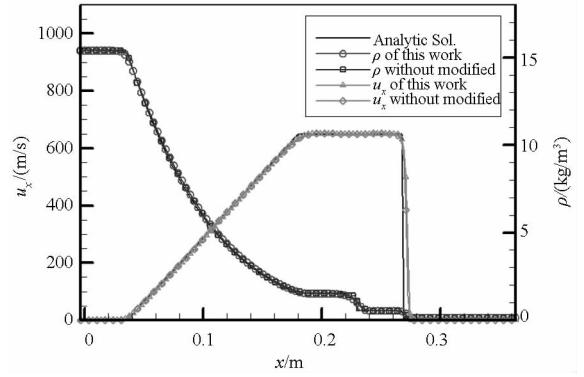


图 7 压力间断比例为 128.0 时流场的发展

Fig. 7 The flow field as $p_2/p_1 = 128.0$

3.2 压力间断问题

分别采用修正格式和不含压力耗散项格式对压力间断诱导的流场进行计算。不同间断压力比例下流场的发展情况如图 5、图 6 和图 7 所示。从图中可以明显地观察到：修正格式的计算结果始终与解析解吻合，随着压力比例的增大，两种格式的计算结果趋于一致。压差比例较小时，修正格式具有明显的优势，压力耗散有效改善了低压差情况下流场计算的准确性和稳定性。

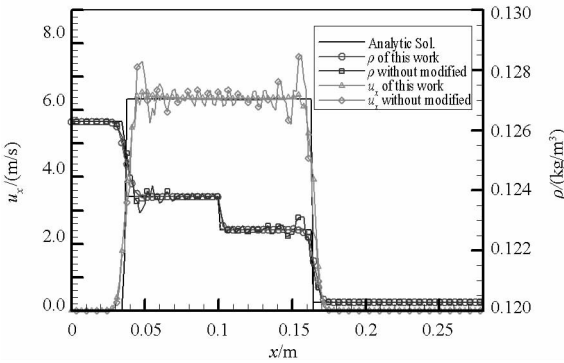


图 5 压力间断比例为 1.05 时流场的发展

Fig. 5 The flow field as $p_2/p_1 = 1.05$

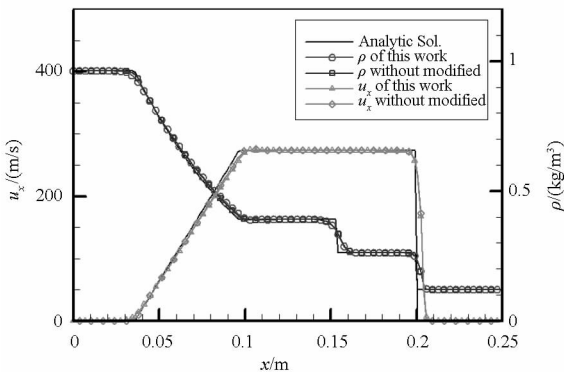


图 6 压力间断比例为 8.0 时流场的发展

Fig. 6 The flow field as $p_2/p_1 = 8.0$

3.3 冲击波相交问题

两道马赫数分别为 Ma_1 、 Ma_2 的冲击波从计算域两侧同时向中心传播，分别采用修正格式和不含压力耗散项格式进行计算，不同马赫数组合下流场的发展情况如图 8 和图 9 所示。从计算结果可以看出，无论是弱冲击波相遇还是强冲击波碰撞，修正格式都能获得准确结果，并且能够有效控制间断两侧的振荡。

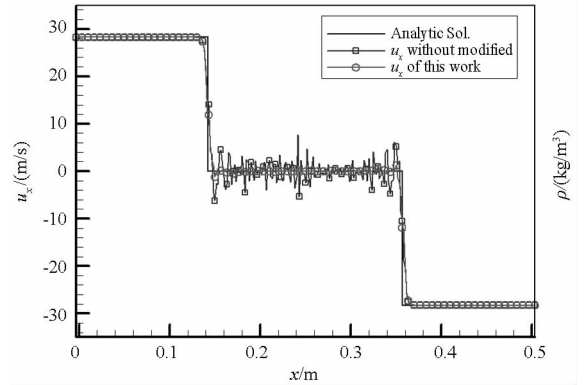


图 8 冲击波相交问题, $Ma_L = -Ma_R = 1.05$

Fig. 8 Colliding shocks problem, $Ma_L = -Ma_R = 1.05$

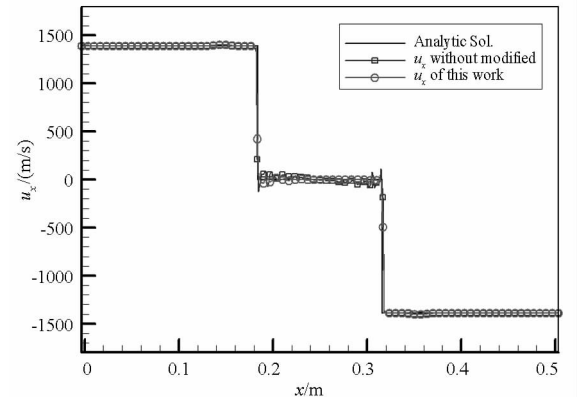


图 9 冲击波相交问题, $Ma_L = -Ma_R = 5.0$

Fig. 9 Colliding shocks problem, $Ma_L = -Ma_R = 5.0$

3.4 激波衍射问题

为了验证修正格式对复杂流场的适应能力,我们对二维激波衍射问题进行了计算。空间离散采用修正格式,时间迭代采用二阶荣格库塔方法,计算结果如图 10 所示。图 10(a)和图 10(b)为

$Ma = 3.0$ 时不同网格密度下的计算结果,网格加密后格式能够准确捕捉流场的精细结构。图 10(b)和图 10(c)为相同网格密度下不同 Ma 的计算结果,从密度等值线的分布可以清晰地观察到激波的衍射现象及波后的波系结构,和文献[7]和文献[14]的结果相吻合。

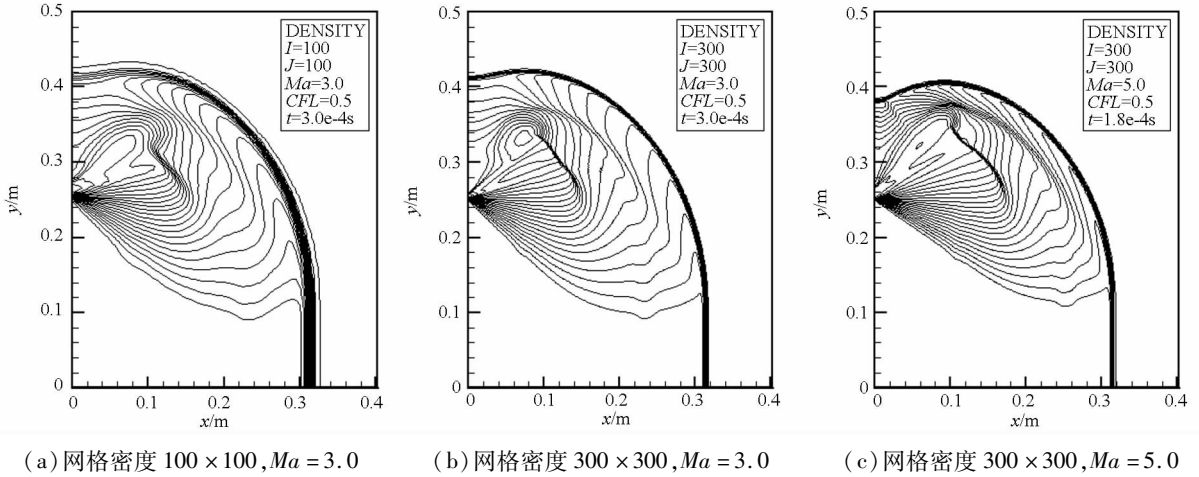


图 10 修正格式用于激波衍射问题求解

Fig. 10 Supersonic shock wave diffraction problem solved by the modified scheme

4 结论

本文采用特征线法获得了压力间断问题的解析解;以此为基础,对流通量中的压力耗散项进行修正,发展出新的 AUSM⁺-up 格式。以新的格式对不同速度驱动的冲击波发展和不同强度压力间断问题进行了仿真,计算结果与理论解吻合得较好,获得的主要结论有:

- 1) 速度或压差较小时,压力耗散项相当于引入三阶正色散(对应于 $p_L > p_R$);
- 2) 压力耗散项的引入能够提高了格式在低马赫数和弱压力间断下的计算能力,有效改善格式计算的准确性和稳定性;
- 3) 修正格式可以用于多维、复杂流场的计算,可准确把握流场的精细结构。

参考文献 (References)

- [1] 阎超,于剑,徐晶磊,等. CFD 模拟方法的发展成就与展望[J]. 力学进展, 2011, 41(5): 562-589.
YAN Chao, YU Jian, XU Jinglei, et al. On the achievements and prospects for the methods of computational fluid dynamics[J]. Advances in Mechanics, 2011, 41(5): 562-589. (in Chinese)
- [2] van Leer B. Flux-vector splitting for the euler equations[R]. Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, 1982, 507-512.
- [3] Roe P L. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1981, 43(2): 357-372.
- [4] 阎超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2006.
YAN Chao. Computational fluid dynamics method and its application [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2006. (in Chinese)
- [5] Liou M S, Steffen C J Jr. A new flux splitting scheme[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(1): 23-39.
- [6] Liou M S. Ten years in the making—AUSM family[C]. AIAA paper, 2001;2001-2521.
- [7] Liou M S. A sequel to AUSM, part II: AUSM⁺-up for all-speeds[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 214(1): 137-170.
- [8] Chang C H, Liou M S. Simulation of multifluid multiphase flows with AUSM⁺-up scheme[C]//Computational Fluid Dynamics 2004, Springer Berlin Heidelberg, 2006:613-618.
- [9] Robbins D J, Cant R S, Gladden L F. Development of accurate, robust liquid equations of state for multi-phase CFD simulations with a modified AUSM⁺-up scheme [J]. Computers & Fluids, 2013, 77: 166-180.
- [10] Dellacherie S. Analysis of godunov type schemes applied to the compressible euler system at low mach number[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(4): 978-1016.
- [11] Xisto C M, Páscoa J C, Oliveira P J, et al. A hybrid pressure-density-based algorithm for the Euler equations at all Mach number regimes[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2012, 70(8): 961-976.
- [12] Liou M S. A sequel to AUSM: AUSM⁺ [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 129(2): 364-382.
- [13] Conquel F, Liou M S. Field by field hybrid upwind splitting methods [C]. 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper, 93-3302-CP.
- [14] Hillier R. Computation of shock wave diffraction at a ninety degrees convex edge[J]. Shock Waves, 1991, 1(2): 89-98.