Vol. 36 No. 3 Jun. 2014

doi:10.11887/j.cn.201403021

http://journal. nudt. edu. cn

# 具有适应值预测机制的遗传算法\*

赵 宁,赵永志,付晨曦

(西北工业大学 陕西省机电传动与控制工程实验室, 陕西 西安 710072)

摘 要:针对适应值计算费时的优化问题,提出一种具有适应值预测机制的遗传算法:为了有效控制预测适应值的准确度和预测频率,建立了一个基于可信度概念的适应值预测模型,引入可信度流失机制以减少预测误差的传播和累积,引入冗余个体剔除机制以减少计算消耗。利用3个基准函数对算法进行收敛性和有效性的测试,测试结果表明算法对于3个测试函数均能获得满意的最优解,并且都能减少60%以上的真实适应值计算次数。

关键词:适应值预测;遗传算法;共享半径;可信度;预测频率

中图分类号:TP301.6 文献标志码: A 文章编号:1001-2486(2014)03-0116-06

# Genetic algorithm with fitness approximate mechanism

ZHAO Ning, ZHAO Yongzhi, FU Chenxi

(Shanxi Engineering Laboratory for Transmissions and Controls, Northwestern Polytechnical University, Xi' an 710072, China)

Abstract: The evaluation of the fitness is computationally very expensive for some optimization problems; therefore a genetic algorithm named FAGA with fitness approximate mechanisms is introduced. In order to effectively control the accuracy and frequency of the fitness approximation, a fitness approximate model based on the concept of fidelity was established. The fitness of a particular individual in the population was obtained as weighted averages of other individuals within a certain area, the size of the area was limited by the fitness sharing radius, the weights of different individuals were determined by the non-dimensional Euclidean distances between individuals and the particular one, and whether to use the real fitness functions or not was decided by the fidelity thresholds. Besides, mechanisms of the loss of fidelity was adopted to reduce the approximate errors from spread and accumulation, and mechanisms of removing redundancy individuals in order to reduce the computing consumption was used at the same time. Three benchmark functions were used to test the convergence and effectiveness of FAGA. The test results show that FAGA achieves satisfactory the optimal solution among the three test functions, and more than 60% of the computation can be reduced at the same time.

Key words: fitness approximate; genetic algorithm; sharing radius; fidelity; approximate frequency

基于群体的智能优化算法,如遗传算法、蚁群算法、粒子群算法等,在复杂机械系统优化设计中得到广泛的应用<sup>[1]</sup>。然而,这些智能优化算法也同样面临着很多新的挑战,其中一个问题在于其寻优过程中适应值计算的耗时问题<sup>[1-4,6,8,12]</sup>。例如有些黑盒问题<sup>[2]</sup>,这类问题不能直接给出明确的适应值计算模型,通常需要使用有限元分析仿真或计算流体力学进行适应值计算,而这些仿真也非常费时<sup>[3-4]</sup>。因此,迫切需要寻找一种方法在保证算法寻优效果的前提下,缩短优化时间,提高优化设计的效率。

目前,提高群智能算法运行速度的方法主要 有两种:

一种是并行处理,在并行计算机上完成运算。 并行算法的实现原理为<sup>[5]</sup>:主处理器监控整个种 群,而子处理器完成费时的适应值计算,并根据一定规则与主处理器交换数据。虽然并行算法在处理很费时的适应值计算的优化问题上显示出有效性,但是有关参数的选取方面目前还缺乏指导性的实验结论<sup>[5]</sup>。

另一种是使用预测策略,对部分个体的适应值进行预测,从而避开了耗时的适应值计算。国内外研究对于适应值预测的方法主要包括<sup>[1,3]</sup>:多项式回归<sup>[6]</sup>、Kriging模型<sup>[7]</sup>、人工神经网络<sup>[8]</sup>、支持向量机<sup>[9]</sup>、适应值继承<sup>[10-11]</sup>、种群聚类<sup>[12]</sup>等。其中多项式回归、Kriging模型、人工神经网络和支持向量机模型都属于样本预测模型,此类模型构建的正确性与选取的样本有很大关系,随着维度的增加,种群进化的引导方向变得混乱<sup>[1,8]</sup>。适应值继承模型的实质是子代以一定的

<sup>\*</sup> 收稿日期:2013-09-21

方式直接得到父代的适应值。

使用预测策略需要解决的核心问题包括两个方面:1)如何保证预测结果的准确度;2)如何确定及控制预测的时机和频率。样本预测模型的重点在于提高预测结果的准确度,而对预测时机的决策以及预测频率的控制却无能为力。适应值继承类算法常采用"隔代预测"的方法来控制预测的时机和频率,这种方法指定了预测的周期,虽然能够给出一种周期性的预测模式,但是对于进化中的预测准确度却不能监控和操作。

显然,预测的准确度和预测的频率是一对基本 矛盾,预测频率的提高必然以牺牲预测的准确度为 代价。如何在这二者之间获得一种自适应的平衡 是本文研究的重点和难点。本文将构造出一种具 有 适 应 值 预 测 机 制 的 遗 传 算 法(Fitness Approximation Genetic Algorithm, FAGA)。该算法 包含一种基于可信度概念的适应值预测模型,可以 根据预测的准确度自适应地调整预测的时机和频 率,在预测准确度和预测频率之间反复博弈,最终 获得二者之间的平衡,从而在保证结果准确性的前 提下,最大程度上减少真实适应值的计算次数。

## 1 基于可信度的适应值预测模型

#### 1.1 可信度及适应值共享半径

对于种群中的每一个个体i,都有其对应的适应值fitness(i)以及该适应值的可信度R(i)。适应值fitness(i)可以是真实计算的适应值,也可以是通过适应值共享预测的值。当fitness(i)是真实计算的适应值时,其可信度R(i)=1;当fitness(i)是预测的值时,其可信度 $0 \leq R(i) < 1$ 。

如图 1 所示,对于种群中的每一个个体i,指定其适应值共享半径  $r_{share}$ ,解空间中到个体i的 无量纲欧氏距离不大于适应值共享半径  $r_{share}$ 的区域称作个体i的适应值共享区域,记作 $\Omega_i$ 。同理,对于个体j同样存在其适应值共享区域 $\Omega_j$ 。

#### 1.2 适应值计算方法

假设  $\Omega_i$  为个体 i 的适应值共享区域, $\Omega_i$  中包含 m 个其他个体,这 m 个其他个体组成集合 S =  $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ 。则个体 i 的适应值 fitness(i) 计算方法如下。

首先按式计算个体 i 的预测可信度

$$R(i) = \sum_{j=1}^{m} \omega(s_j) \cdot R(s_j) \tag{1}$$

式(1)中 $,s_j$  表示个体 i 的适应值共享区域  $\Omega_i$  中包含的一个个体 $,R(s_i)$ 表示该个体的可信

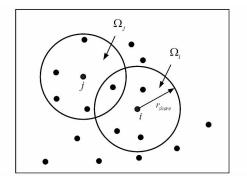


图 1 适应值共享区域

Fig. 1 Fitness sharing region

度, $\omega(s_i)$ 表示该个体对个体 i 可信度的贡献权重。设集合 S 中每个个体到个体 i 的无量纲欧氏距离分别为 $\overline{d}_1$ , $\overline{d}_2$ ,…, $\overline{d}_m$ ,则

$$\omega(s_j) = \frac{\exp(-\alpha \cdot \overline{d}_j)}{\sum_{k=1}^n \exp(-\alpha \cdot \overline{d}_k)}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

(2)

式(2)中, $\alpha$  为权重放缩系数,推荐取值为 20 ~ 30。越靠近个体 i 的个体对 R(i) 的贡献越大。

如图 2 所示,给定一个信任阈值  $R^*$ ,判断可信度 R(i)是否超过信任阈值  $R^*$ 。若  $R(i) \ge R^*$ ,则以适应值共享区域  $\Omega_i$  内所有其他个体的适应值加权得到个体 i 的预测适应值

$$fitness(i) = \sum_{j=1}^{m} \omega(s_j) \cdot fitness(s_j)$$
 (3)

否则  $R(i) < R^*$ , 计算个体 i 的真实适应值, 并将其适应值可信度 R(i) 置为 1。

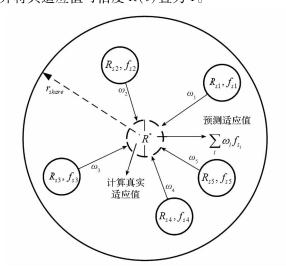


图 2 适应值预测模型

Fig. 2 Fitness approximate model

# 1.3 历史种群更新及可信度流失

随着种群的逐代进化,历史种群信息将逐渐 扩大规模。为了防止历史种群信息的规模过于庞 大而导致空间复杂度和计算量的增大,每一代进 化完成后,需要剔除冗余的数据,因此引入种群个 体冗余度的概念来判别数据是否冗余。数据库中 某个个体 *i* 的冗余度

$$I_r(i) = \sum_{k=1}^n \Delta \bar{x}_k(i) \tag{4}$$

式(4)中  $\Delta \bar{x}_k(i)$ 表示在设计空间的第 k 维上,个体 i 的前一个投影点与后一个投影点的坐标差值(取绝对值)。显然,个体的冗余度值越小,其冗余程度就越大。当某个体的冗余度小于给定阈值  $I_i^*$  时,该个体即被剔除。

此外,由于种群中并非所有的个体适应值都是真实计算得来的,通过适应值共享预测出的适应值是不准确的。因此,随着种群的逐代进化,具有预测适应值的个体可信度应该逐渐下降。设具有预测适应值的个体i在第t代的可信度为R(i,t),则第t+1代的可信度R(i,t)+1)可由式(5)更新得到,式中 $\beta$ 称作可信度流失速率因子,且 $0<\beta<1$ 。

$$R(i, t+1) = \beta \cdot R(i, t) \tag{5}$$

随着种群逐代进化,个体的可信度 R(i,t)下降到低于给定剔除阈值  $R_0$  时,该个体的适应值变得不再可信,须从历史种群数据库中剔除。

#### 1.4 预测准确度与频率自适应平衡原理

如图 3 所示,当预测频率提高,导致预测准确 度降低,会引起预测可信度的降低,从而降低预测 频率;反之,若预测频率降低,又会引起预测准确 度的提高,带来可信度提高,从而提高预测频率。 因此,本文提出的基于可信度概念的适应值共享 预测模型能够根据预测的准确度自适应地调整预 测的时机和频率,模型在预测准确度和预测频率 之间反复博弈,最终获得二者之间的平衡,从而在 保证结果准确性的前提下,最大程度上减少真实 适应值的计算次数,在计算费时的优化设计问题 中节省时间。



图 3 预测准确度与预测频率的平衡原理

Fig. 3 Approximation accuracy and frequency automatic ballance principle

### 1.5 适应值预测算法流程

Step1:初始化历史种群数据库,初始种群置空,适应值置0,可信度置0。

Step2:对于种群中的某个个体i,划定其适应值共享区域 $\Omega_i$ ,在历史种群数据库中找出 $\Omega_i$ 包含的个体的集合S。

Step3:按照式(1) 计算个体 i 的适应值预测可信度 R(i),判断若  $R(i) \ge R^*$ ,则按照式(3)预测个体 i 的适应值;否则,计算个体 i 的真实适应值,并置其适应值可信度 R(i)为1。

Step4:将个体 i 添加到历史种群数据库中。

Step5:判断当前种群中是否每个个体都已经 计算了适应值,是则转 Step6,否则转 Step2。

Step6:对历史种群数据库进行如下更新:1) 计算所有个体的冗余度  $I_r$ ,剔除所有冗余个体;2) 对于所有具有预测适应值的个体,按照式(5)更 新其可信度 R,剔除所有不可信个体。

## 2 模型关键参数取值的讨论

#### 2.1 适应值共享半径

显然适应值共享半径的大小  $r_{share}$ 显著影响了预测个体适应值的准确度: $r_{share}$ 越大,预测准确度越低,预测频率越高;反之  $r_{share}$ 越小,预测准确度越高,预测频率降低。

在种群进化的初期阶段,种群开发的目的更多在于开采全局信息,而对局部信息的准确度要求不高,因此可采用较大的共享半径  $r_{share}$ 。而当种群进化进入后期,种群逐渐收敛,密集分布于最优解附近的区域内,此阶段开发的目的在于充分挖掘局部信息,使种群进一步收敛到更高精度的区域内,因此须采用较小的共享半径  $r_{share}$ 。

本文采用一种自适应的适应值共享半径方法,根据当前种群分布的线度自适应调整适应值 共享半径

$$r_{share}(t) = q \cdot \max_{k=1,2,\dots,n} \{ \max(\bar{x}_k(t)) - \min(\bar{x}_k(t)) \}$$
(6)

式(6)中, $\max(\bar{x}_k(t))$ 和  $\min(\bar{x}_k(t))$ 分别表示第 t 代种群个体在第 k 维的无量纲坐标的上界和下界,n 表示设计变量的总维数,q 为压缩因子。

### 2.2 可信度

与可信度相关的模型参数有:信任阈值  $R^*$ 、剔除阈值  $R_0$  以及可信度流失速率因子  $\beta$ ,这三者共同控制了预测的可信度和频率。

信任阈值  $R^*$  是判断是否对适应值进行预测的 "门槛", $R^*$  值越大则预测的门槛越高, $R^*$  值越小则 预测的门槛越低。因此, $R^*$  的值太大会导致预测频 率太低,不能有效减少真实适应值计算的次数;而  $R^*$  的值太小又会导致预测的准确度降低,计算结果

不可信,同时还会导致种群进化的方向混乱。

剔除阈值  $R_0$  控制了历史种群中个体的可信度, $R_0$  越大则历史种群中个体的平均可信度越高,预测结果越可靠,但是会造成大量历史信息的流失; $R_0$  越小则历史种群中个体的平均可信度越低,预测结果越不可靠。

可信度流失速率因子 $\beta$ 的引入是为了控制累积误差。由于具有预测适应值的个体本身带有预测误差,在新的一次预测时,前一次的预测误差会被传播和累积,因此具有预测适应值的个体的可信度必须随着种群的进化而逐代降低,直到被剔除。 $\beta$  越大,不可信个体的剔除越慢,累积预测误差越大,预测结果越不可靠; $\beta$  越小,已经获得的历史信息流失越快,尽管预测误差得到了控制,但是预测的频率也会随之降低。

#### 2.3 冗余度阈值

理想的历史数据应该满足均布性,即数据点均匀地分散在区域内,并且没有重复和过于拥挤的数据点。而引入冗余度正是对种群中个体分散情况的描述,表明了个体与"邻居"的相对距离。冗余度阈值  $I_r^*$  是剔除冗余个体的"门槛", $I_r^*$  越大,剔除个体的概率越大,历史信息流失得越快; $I_r^*$  越小,剔除个体的概率越小,容易出现冗余个体聚集的现象,历史数据量增大,导致计算消耗的增大。

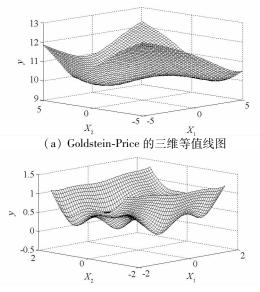
# 3 数值实验

数值实验的目的有两个:1)测试算法的收敛性,即测试该算法是否能有效地指引种群进化,正确获得原问题的最优解或近似最优解;2)测试算法的有效性,即测试该算法能多大程度地减少真实适应值的评价次数。

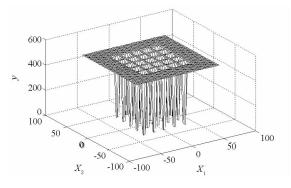
本文选用文献[1]中的3个基准函数进行测试,这3个基准函数分别为:1)Goldstein-Price函数;2)Six-Hump Camel-Back函数;3)Shekel's Foxholes函数。

三个基准函数的三维等值线图如图 4(a) - (c) 所示,可知 Goldstein-Price 是一个单峰函数,而 Six-Hump Camel-Back 和 Shekel's Foxholes 都是 2 维多模态函数,有若干局部最优点。尤其 Shekel's Foxholes,在局部最优点附近,函数严重病态。

参数设置如下:种群规模 Popsize = 50,交叉概率  $P_c = 0.8$ ,变异概率  $P_m = 0.3$ ,最大进化代数  $T_{max} = 200$ ,共享半径压缩因子 q = 0.2,信任阈值  $R^* = 0.6$ ,剔除阈值  $R_0 = 0.3$ ,可信度流失速率因子  $\beta = 0.9$ ,冗余度阈值  $I_t^* = 1e - 7$ 。每个问题独



(b) Six-Hump Camel-Back 的三维等值线图



(c) Shekel's Foxholes 的三维等值线图 图 4 三个基准函数的三维等值线图

Fig. 4 3D landscape of three benchmark functions

立运行 20 次,对算法进行收敛性及有效性的 测试。

图 5(a) - (c) 依次是测试函数 Goldstein-Price、Six-Hump Camel-Back 和 Shekel's Foxholes 的适应值进化曲线,从图中可以看出随着种群逐代进化,种群迅速收敛到了最优解附近,种群的平均适应值稳定提高。

图 6(a) -(c) 依次是测试函数 Goldstein-Price、Six-Hump Camel-Back 和 Shekel's Foxholes 每代的真实适应值计算比例,从图中可以看出每代真实适应值的计算比例大致稳定在 30% ~50%,这样保证了每代种群中都有一定比例的个体适应值是真实计算得来的,因而能够正确引导种群的进化方向。

表 1 给出了 FAGA 算法收敛性的测试结果, 其中"Opt."表示到目前为止文献给出的已知该 问题的最优解,"Best"表示 FAGA 算法独立运行 20 次找到的最优的结果,"Mean"表示运行结果 的平均值。表 2 给出了 FAGA 算法有效性的测试

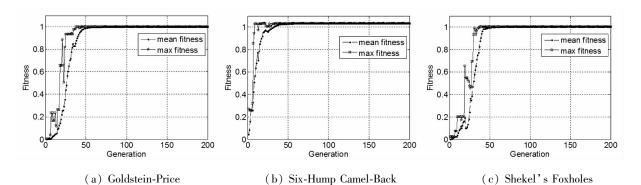
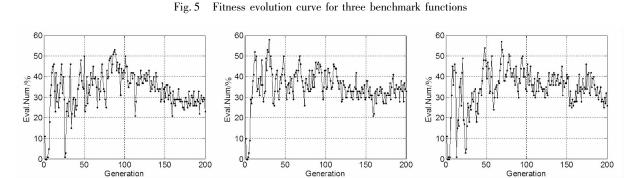


图 5 三个基准函数的适应值进化曲线



(a) Goldstein-Price

(b) Six-Hump Camel-Back

(c) Shekel's Foxholes

图 6 三个基准函数每代真实适应值计算比例

Fig. 6 Percentage of real fitness computed for three benchmark functions

结果,其中"Max. Num"表示可能计算真实适应值的最大次数,"Eval. Num"表示真实适应值实际计算的平均次数,"Percentage"表示真实适应值计算的平均比例。 $f_i$  (i=1,2,3)依次表示测试函数Goldstein-Price、Six-Hump Camel-Back和 Shekel's Foxholes。

表 1 算法收敛性测试结果

Tab. 1 Convergence test results of the algorithm

|       | Opt.          | Best            | Mean            |
|-------|---------------|-----------------|-----------------|
| $f_1$ | 3             | 3 + 0.889e - 10 | 3 + 1.520e - 10 |
| $f_2$ | 0.968 371 572 | 0.968 371 547   | 0.968 3715 86   |
| $f_3$ | 0.998 003 839 | 0.998 003 838   | 1. 248 796 691  |

表 2 算法有效性测试结果

 $Tab.\ 2\quad Effectiveness\ test\ results\ of\ the\ algorithm$ 

|       | Max. Num | Eval. Num | Percentage |
|-------|----------|-----------|------------|
| $f_1$ | 20 000   | 7 167.5   | 35.838%    |
| $f_2$ | 20 000   | 7 560.5   | 37.803%    |
| $f_3$ | 20 000   | 7 212.05  | 36.060%    |

从表 1 可以看出,FAGA 算法在函数  $f_1$ 、 $f_2$  和  $f_3$  上都获得了满意的最优解,甚至对于函数  $f_2$  和  $f_3$  找到了比已知最优解更好的解。

由表 2 可知, FAGA 算法可以大大减少真实适应值的计算次数。FAGA 相比于传统遗传算

法,对于三个测试函数分别减少了 64. 162%、62. 197%和 63. 940%的适应值平均计算次数。这意味着,在适应值函数的计算非常耗时的情况下,采用 FAGA 算法可以节省大约 2/3 的计算时间。

收敛性测试的结果检验了预测模型的准确度,而有效性测试的结果检验了预测模型对预测频率的控制情况。数值实验结果表明,FAGA中包含的基于可信度概念的适应值预测模型是有效的,既能保证预测结果的准确度,又能自适应地兼顾到与预测频率之间的平衡。

尽管在给定的算法参数下,FAGA 表现出有效性,但是仍然有一些细节问题值得深入研究:

- 1) 算法的关键参数如何取值;
- 2) 关键参数敏感性规律如何;
- 3)如何进一步提高算法的有效性,更大程度上地减少真实适应值的评价次数。

## 4 结论

针对适应值计算费时的优化问题,本文给出了一种具有适应值预测机制的遗传算法 FAGA,以适应值的共享预测取代真实适应值的计算,从而提高优化的效率。FAGA 中包含了一种基于可信度概念的适应值预测模型,该模型能够自动平

衡预测准确度与预测频率之间的矛盾运动。当预测准确度降低时,能够通过自动降低可信度来降低预测频率,从而促使预测准确度提高。

利用 3 个基准函数对 FAGA 进行收敛性和有效性的测试,测试结果表明 FAGA 对于 3 个测试函数均能获得满意的最优解,并且都能减少 60%以上的真实适应值计算次数。结合收敛性测试和有效性测试的结果可知 FAGA 是一种正确、高效的智能优化算法,其中包含的基于可信度概念的适应值预测模型能够在保证预测准确度的同时,有效地控制预测频率。

### 参考文献(References)

- [1] 孙超利. 面向机械系统优化设计的微粒群算法[M]. 北京:机械工业出版社,2012.
  SUN Chaoli. Particle swarm optimization for mechanical systems design[M]. Beijing; China Machine Press, 2012.
- [2] Shan S Q, Wang G G. Survey of modeling and optimization strategies to solve high-dimensional problems with computationally-expensive black-box functions [J]. Structual and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41(2): 219 -241.
- [3] Jin Y C. A comprehensive survey of fitness approximation in evolution computation [J]. Soft Computing, 2005, 9(1): 3 12.
- [4] Wang G G, Shan S. Review of metamodeling techniques in support of engineering design optimization [J]. Journal of

- Mechanical Design, 2006, 129(4): 370 380.
- [5] 王小平,曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安:西安交通大学出版社,2002.
  WANG Xiaoping, CAO Liming. Genetic algorithm-theory, application and software [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002. (in Chinese)
- [6] Paenke I, Branke J, Jin Y C. Efficient search for robust solutions by means of evolutionary algorithms and fitness approximation [J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2006, 10(4): 405-420.
- [7] Li M. An improved kriging-assisted multi-objective genetic algorithm[J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(7): 1-11.
- [8] Jin Y C, Olhofer M, Sendhoff B. A framework for evolutionary optimization with approximate fitness functions [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(5): 481 –494.
- [9] Malak R J, Predis C J J. Using support vector machines to formalize the valid input domain of predictive models in systems design problems[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132 (10): 1-14.
- [10] Smith R E, Dike B A, Stegmann S A. Fitness inheritance in genetic algorithm [C]// Proceedings of the 1995 ACM Symposium on Applied Computing, 1995: 345 350.
- [11] Sastry K, Goldberg D E, Pelikan M. Don't evaluate, inherit [C]// Proceedings of genetic and Evolutionary Computation Conference, 2001; 551 558.
- [12] Kim H S, Cho S B. An efficient genetic algorithms with less fitness evaluation by clustering[C]// Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2001,2: 887 –894.

#### (上接第71页)

# 参考文献(References)

- [1] Barbour N, Schmidt G. Inertial sensor technology trends [J]. IEEE Sensor Journal, 2001, 1(4): 332 339.
- [2] 杨俊波. MEMS 真空封装关键技术研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2005.
  YANG Junbo. Research on the key technology of MEMS vacuum packaging [D]. Wuhan: HuaZhong University of Science and Technology, 2005. (in Chinese)
- [3] 徐淑静,高振宁. 一种新的微机械陀螺品质因数测试方法[J]. 微纳电子技术,2011,48(6):391-394.
  XU Shujing, GAO Zhenning. A new test method for the quality factor of MEMS gyroscope [J]. Micronanoelectronic Technology,2011,48(6):391-394. (in Chinese)
- [4] Zhang M, Llaser N, Mathias H. Improvement of the architecture for MEMS resonator quality factor measurement[C]//Proceedings of 15th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, 2008: 255 – 258.
- [5] Zhang M, Llaser N, Mathias H, et al. High precision

- measurement of quality factor for MEMS resonators [J]. Procedia Chemistry, 2009,1(1):827-830.
- [6] 韩建强,朱长纯,刘君华,等. 热激励微悬臂梁谐振器品质因数研究[J]. 西安交通大学学报,2002,36(4):377-380.
  - HAN Jianqiang, ZHU Changchun, LIU Junhua, et al. Quality factor of thermally excited micromechanical cantilever resonators[J]. Journal of Xi' an JiaoTong University, 2002, 36(4): 377 380. (in Chinese)
- [7] Atavin V G, Kuranov V V, Khudyakov Y V. Determination of the errors of resonance frequency and quality factor measurements [J]. Measurement Techniques, 2003, 46 (3): 249-253.
- [8] 王安成, 罗兵, 吴美平. 硅微机械陀螺谐振频率在线快速测定方法[J]. 中国惯性技术学报, 2011, 19(5): 607-610.
  - WANG Ancheng, LUO Bing, WU Meiping. Online and quick determination for resonance frequency of silicon micromachined gyroscope [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2011, 19(5): 607-610. (in Chinese)