

力导向模型的复杂网络社区挖掘算法*

水超¹, 陈洪辉¹, 陈涛¹, 李慧²

(1. 国防科技大学 信息系统与管理学院, 湖南长沙 400073; 2. 国防科技大学 信息中心, 湖南长沙 400073)

摘要:在复杂网络中发现和刻画社区结构是近年来复杂网络研究的重点方向之一。提出了一种社区挖掘的新思路,即根据力导向模型的原理,通过计算社区与节点之间的作用力来决定节点的社区归属。根据该思路设计了基于力导向模型的算法框架 FDCD (Force - directed Community Detect), 并利用 FR 模型、KK 模型、LL 模型和 Q 模型进行了验证。实验表明,基于 FDCD 算法框架的多种不同算法不仅能较好地识别社区结构,而且基于 LL 模型的 FDCD 算法达到了线性计算复杂度,能适用于大规模网络的社区挖掘。

关键词:力导向模型;复杂网络;社区挖掘

中图分类号:TP391 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2014)04-0163-06

A community detect algorithm on force-directed model

SHUI Chao¹, CHENG HongHui¹, CHENG Tao¹, LI Hui²

(1. College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 400073, China;
2. Information Center, National University of Defense Technology, Changsha 400073, China)

Abstract: Aimed at the problem of detecting and characterizing community structure is one of the outstanding issues in the study of complex network, a new community detect algorithm based on Force-directed model was proposed, which categorizes the point to community decided by the force between them. An algorithm named Force-Directed Community Detect, FDCD, and an implementing algorithm using four different Force-directed Models were designed. The experiments show that the algorithms can find community in real social network with high Q Modularity, and each efficiency of algorithm based on LL model reaches the complexity degree of linear computation, which proves fit for the community detection in large network.

Key words: force-directed model; complex network; community detect

如果将复杂系统中的实体作为节点,而实体之间关系作为边,则可构建一个展现复杂系统内部关系的网络,被称为复杂网络。这种复杂网络广泛存在于生物、社交、引文等诸多领域,并呈现出“大网络,小聚居”的特征。社区挖掘就是根据网络特征在复杂网络中寻找和发现“小聚居”的一种方法,被广泛应用到生物群落发现、恐怖分子挖掘、学科前沿领域探索等多个方面,是当前复杂网络研究的重要基础理论之一。

自从2002年Nenam^[1]提出模块度概念后,在学术界引发了社区挖掘相关研究的热潮,形成了多种社区挖掘算法。其中,非重叠社区挖掘算法研究最为广泛,可大致分为五类^[2],分别是聚类法、分裂法、模块度优化法、谱分析法和动态法。本文提出了一种非重叠社区挖掘的新思路:利用网络可视化研究中力导向模型算法对网络节点进

行合理布局,根据节点受力情况进行社区分类。该思路可利用力导向模型研究相关成果进行多种扩展,实现大规模网络中进行社区挖掘和结构可视化。本文设计了基于力导向模型的算法框架 FDCD (Force-directed Community Detect), 并利用 FR 模型、KK 模型、LL 模型和 Q 模型进行了验证,实验表明了该研究思路和算法框架的可行性与合理性。

1 相关研究

为方便统一描述,本文用 $\{V, E\}$ 代表复杂网络,其中 V 是网络节点集合,而 E 是边集合, $|V|$ 为节点数,而 $|E|$ 为边数。 p_i 代表 V 中第 i 个网络节点, $\|p_i - p_j\|$ 为节点 p_i 和 p_j 之间的欧式距离,而 $|p_i - p_j|$ 为节点 p_i 和 p_j 之间的图论距离(即跳数)。 C_i 代表算法获得的第 i 个社区,用 A 表示

* 收稿日期:2013-1107

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61202487)

作者简介:水超(1976—),男,湖南安乡人,助理研究员,博士,E-mail:super_shuichao@163.com

网络的连接矩阵,即 $A = \{a_{ij} | a_{ij} = 1, \text{当节点 } i \text{ 与节点 } j \text{ 有连接, 否则 } a_{ij} = 0\}$ 。

与本文相关的研究内容主要包括社区挖掘算法和力导向模型两个方面。

1.1 社区挖掘算法研究

2002 年, Newman 提出社区结构评价指标 Q 模块度: 如果用 δ 表示社区分类矩阵, 即 $\delta = \{b_{ij} | \text{当 } C_i = C_j \text{ 时, } b_{ij} = 1, \text{ 否则 } b_{ij} = 0\}$ 。那么, 社区的 Q 模块度可以表示为:

$$Q = \frac{1}{2|V|} \sum (A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2|V|}) \delta(C_i, C_j)$$

该模块度的物理含义是社区内部连接密度大于社区外部连接密度, 可较好地评价社区挖掘算法的质量。从此, 在复杂网络中进行社区结构挖掘的研究就一直方兴未艾, 出现许多不同类型算法, 大致可分为 5 类。

(1) 聚类法。利用 K-means 等传统聚类方法对节点进行聚类分析, 不同聚类代表不同社区。

(2) 分裂法。利用复杂网络的特性, 将网络分裂为多个社区, 如 GN 算法^[1]等。

(3) 模块度优化法。根据模块度最大原则, 查找令模块度最大的社区划分, 如贪心算法^[3]等。

(4) 谱分析法。根据特定图矩阵的特征向量导出对象特征, 具有相同对象特征的节点聚集为同一社区, 如模块度矩阵法算法^[4]等。

(5) 动态法。根据网络的动态特性获得社区分类, 如随机走算法^[5]等。

1.2 力导向模型和算法研究

基于力导向模型 (Force Directed Model, FDM) 的图形绘制方法是网络图形节点自动布局研究中应用最广的一类算法。基于力导向模型算法的基本思想是: 将图形假想为一个物理系统, 每个节点都受到其他节点的拉力和斥力, 所有节点在相互作用力下运动, 当系统达到力平衡而静止时, 即获得最佳布局。

Eades^[6]提出了第一个力导向模型: 如果网络中的结点是一个刚性圆环, 而边是连接一对圆环的弹簧, 则整个网络就构成成为一个弹簧机械系统。将钢环放置在任一起始位置, 则所有钢环就在弹簧力作用下, 进行“推/拉”运动, 直到整个系统达到力平衡。Eades 模型建立了一个刚性物理系统, 较好地刻画了力导向系统的物理特性, 其计算复杂性为 $O(E^2)$, 被认为是力导向模型的雏形。

Kamada 和 Kawai^[7]提出了基于“理想距离” (ideal distance) 的 KK 模型。该模型将“理想距离”定义为两个节点之间节点之间跳数与图半径的比值, 用公式可表示为 $l_{ij} = L_0 / \max_{i < j} (d_{ij}) * d_{ij}$, 其中 L_0 是显示区域的长度。由此, KK 模型中弹簧系统总能量为: $E = \sum \sum \frac{1}{2} k_{ij} (\|p_i - p_j\| - l_{ij})^2$, 当所有节点的动力和最小时, 节点就达到平衡状态, 即最佳布局。布局算法可以对能量公式进行最小化解析, 从而获得节点优化布局。

Fruchterman 和 Reigold^[8]对 Eades 模型再次进行了重大改进。首先, 他们将电子斥力引入模型, 定义任意两个节点之间存在的电子斥力为 $F = K^2 / \|p_i - p_j\|$, K 为电子力常数, 而节点间引力为 $F = \|p_i - p_j\|^2 / K$ 。公式表明节点之间距离越小则相互斥力越大, 有效解决了节点重叠覆盖的问题。其次, 为使算法快速收敛, Fruchterman 首次引入了“冷却函数”。该函数模拟退火过程, 逐步减小节点移动的最大距离, 使系统能量快速减小, 从而达到快速布局的目标, 但该方法容易导致能量局部最小化。Fruchterman 和 Reigold 提出的模型也被称为 FR 模型或弹簧电子力模型, 得到了广泛应用。

近年来, Noack 在研究复杂网络社区挖掘方法时, 提出了一种新型力导向模型——LL (LinLog) 模型^[9], 引起了人们的广泛注意。该模型定义动力系统的能量为:

$$E = \sum (\|p_i - p_j\| - \ln(\|p_i - p_j\|)) \quad (1)$$

式(1)的前半部分代表了邻接节点的引力, 而后半部分代表了任意节点之间的斥力, $\|a_i - a_j\|$ 则是节点 a_i 和 a_j 之间的距离。实验表明, 该模型在图形进行节点自动布局的同时, 完成节点聚类, 使得社区内的连线数量大于社区之间的连线数量, 可适用于小规模节点中的社区挖掘。

1.3 基于力导向模型的社区挖掘算法

Noack 指出 Q 模块度也可以看做是一种特殊的力导向模型后, 利用力导向模型进行社区挖掘就成为最近研究的一个新兴方向。Andreas^[10]利用多层迭代力导向方法对社区聚类进行了分析, 实验表明该方法不仅可以适应于大规模网络, 而且比现有的社区挖掘算法取得更优的模块度。Yi Song 等^[11]利用 FR 模型进行节点初始化, 然后采用类似 KMean 方法进行了节点归类和交换, 从而发现社区, 但是该算法复杂度过大。

2 算法基本思想

2.1 Karate Club 网络可视化分析

Karate Club 网络是一个包含 34 个节点、76 条边的社交网络,其节点代表了 Karake 俱乐部成员,而边代表了俱乐部成员之间人际关系,是复杂网络

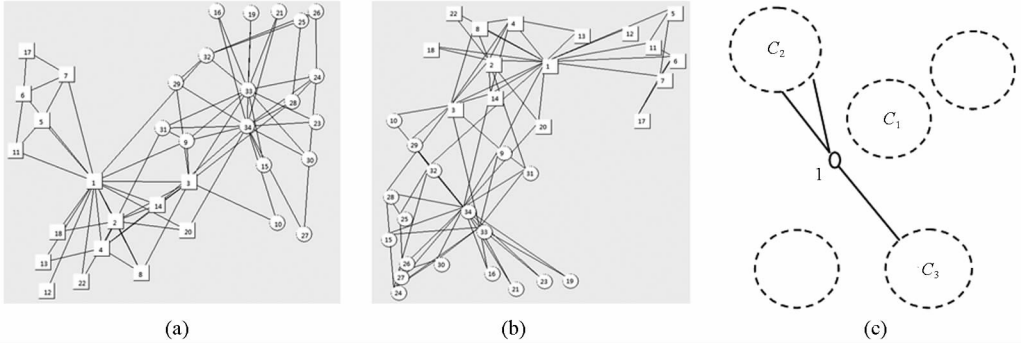


图1 Karate Club 社区可视化图形

Fig. 1 Visualization of Karate Club community

通过观察图 1(a),可以看到 FR 模型将 2 个实际社区较为均匀地分布在平面的左右两端,广受争议的 3 号节点正位于两个部分的中间。其中左方社区又可大致分为两个部分,左上角的节点相互连接,而左下角除 1 号节点外,其他节点并不与左上方节点连接。该图似乎提示我们可通过图分割法分离出不同社区,但由于力导向模型算法的目标是将图尽量均匀分布,这就导致图分割法不能适用于社区发现。图 1(b)是 FR 模型算法产生的另外一个图形,其中 12 号节点虽然只与 1 号节点连接,但却部署在(5,6,7,11,17)节点组成的小聚类附近,导致图分割法失败。另外一个导致图分割法失败的原因是社区中间节点,如 Karate Club 网络的 3 号节点,也可以用图 1(c)来表示其一般情况。图 1(c)中 5 个虚线圆圈分别代表了 5 个社区,而实线圈代表网络节点,实线代表节点与社区的连线。由于 1 号节点同时与 C_2 和 C_3 两个社区相连,则它被布置在两个社区的中间位置,但该位置恰好位于 C_1 社区附近。如果使用图分割法,则很容易将 1 号节点判定为 C_1 社区成员。

2.2 基本算法

力导向模型计算了节点之间的相互作用力,可使节点均匀分布在平面上,并且联系紧密的节点相互聚集在一起。如果将力导向模型改造为节点与社区作用力,能否使得相同社区的节点聚集在一起呢?在这个假想的基础上,本文设计了 FDCD 算法:假设网络图可以分为 k 个社区,

社区挖掘研究中典型分析对象。将 Karate Club 网络中的节点随机分布,然后利用基于 FR 模型的经典算法进行力导向布局,绘制的可视化图形如图 1 所示。其中,图中圆形和正方形分别代表了 Karate 俱乐部分裂后产生的两个实际社区。

FDCD 算法首先计算每个节点 p_i 与 k 个社区之间的引力和斥力之和,并将节点 p_i 放置到作用力最大的社区中。算法迭代运行,直到 Q 模块度达到最大值,其代码可描述如下:

(1) 初始化

按策略将节点分布到 k 个社区;

$\maxDegree = 0, \text{currentDegree} = -1$;

While($\maxDegree \neq \text{currentDegree}$) {

(2) 计算各个点与 k 个社区之间的受力情况

For each p_i Do {

for($j=0; j < k; j++$) {

计算 p_i 受 j 社区中所有节点的作用力之和

}

(3) 改变节点 p_i 的社区

① 计算最大作用力 $F = \max(\text{force}_j)$

② 将节点 p_i 加入最大作用力社区

}

(4) 计算 Q 模块度

$\text{currentDegree} = \text{get}Q()$;

if($\text{currentDegree} > \maxDegree$)

$\maxDegree = \text{currentDegree}$

}

FDCD 算法比较简单,但有两个值得关注的方面,一是如何进行节点的初始合理布局,即社区初始化;二是如何计算节点与社区之间的作用力。对于第一个问题,本文采用了两种不同的社区初始化策略:

- 随机分布策略。将节点随机分布到 k 个社区中。

- 次中心分布策略。文献[12]已经证明根

据 Q 模块度, 如果两个次中心节点的度数越大, 则它们在同一社区的概率越小。因此, 次中心分布策略将前 $k-1$ 个度数最大的次中心节点及其邻居节点分别放到 $k-1$ 个社区, 剩余节点全部放置到第 k 个社区。

第二个问题则是算法的关键, 不同的力导向模型具有不同的作用力算法, 也决定了 FDCD 算法的正确性和计算效率。为此, 本文专门对不同的力导向模型进行了分析和改造, 使之与 FDCD 算法相匹配, 并进行了计算复杂性分析。

2.3 力导向模型优化及计算复杂度分析

上节算法第(2)步是整个算法的关键, 本文分别改造和优化了 FR 模型、KK 模型、LL 模型和类似 Q 模块度 4 种力导向模型, 使得算法可以计算每个节点与社区之间的相互作用力。

力导向模型的目标是在一个面积为 $width \times height$ 的平面上进行节点合理布局。FDCD 算法并没有在平面上进行节点布局, 所以不存在节点间距离。因此, 本文将节点间距离取值相同, 且定义为绘图平面的宽度, 则四种模型可以优化为:

(1) FR 模型优化

FR 模型的节点作用力由引力和斥力组成, 其中引力定义为节点距离平方与平面宽度的比值, 而斥力定义为平面宽度的平方与节点距离的比值。如果将节点之间距离定义为 $width$, 则 FR 模型可优化为:

$$F = \sum_{A(i,j)=1} \frac{(\|p_i - p_j\|)^2}{k} - \sum_{p_i, p_j \in C_b} \frac{k^2}{\|p_i - p_j\|}$$

$$= \sum_{A(i,j)=1} width - \sum_{a_i, a_j \in C_b} width$$

$$= width \cdot \left(\sum_{A(i,j)=1} A(i,j) - size(C_b) \right) \quad (2)$$

根据式(2), 节点 p_i 与社区 C_b 之间的作用力决定于两个因素, 一是节点 p_i 在社区 C_b 中的邻居节点数量, 即 $\sum_{A(i,j)=1} A(i,j)$, 代表社区对节点的引力; 二是社区 C_b 的节点总数, 即 $size(C_b)$, 代表了社区对节点的斥力。在计算过程中, 每个节点只需要计算与社区的作用力, 而不需要计算与每个节点的作用力, 则算法的计算复杂性为 $O(kn)$ 。

(2) LL 模型优化

LL 模型定义引力为邻接节点的距离和, 而斥力定义为所有节点之间距离的对数和。如果将节点之间距离定义为 $width$, 则 LL 模型可优化为:

$$F = \sum_{A(i,j)=1} (\|p_i - p_j\|) - \sum_{p_i, p_j \in C_b} \ln(\|p_i - p_j\|)$$

$$= \sum_{A(i,j)=1} A(i,j) \cdot width - size(C_b) \cdot \ln(width) \quad (3)$$

式(3)与式(2)大体相同, 且计算复杂性也为 $O(n)$ 。不同之处在于, 式(3)中的 $width$ 没有作为公共因子进行提取。第 3 节的实验表明, 这一点不同之处导致基于式(3)的 FDCD 算法在正确性上与式(2)有较大不同。该算法也不需要计算每个节点之间的引力和斥力, 因此计算复杂性也为 $O(kn)$ 。

(3) KK 模型优化

与 FR 模型和 LL 模型不同, KK 模型没有定义节点之间的引力和斥力, 而是定义了节点之间的能量。但如果将节点之间距离也定义为 $width$, 而弹簧力常数定义为 1, 则节点 p_i 与社区 C_b 之间的能量公式为:

$$E = \sum \frac{1}{2} k_{ij} (\|p_i - p_j\| - l_{ij})^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{d_{ij}^2} (width - \frac{width}{\max D} \cdot d_{ij})^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot width \cdot \sum \left(\frac{1}{d_{ij}^2} + \frac{1}{\max D^2} - \frac{2}{d_{ij} \cdot \max D} \right) \quad (4)$$

式(4)表明, 节点 p_i 与社区 C_b 之间的能量取决于节点 p_i 与社区内所有节点的图论距离 d_{ij} 。因此, 在计算过程中, 每个节点需要计算与其他节点的作用力, 则算法的计算复杂性为 $O(n^2)$ 。

(4) Q 模块优化

Noack^[13]指出 Q 模块度也是一种力导向模型, 因此也可以根据 Q 模块度公式, 计算社区与节点之间的作用力, 本文称之为 Q 模型, 其作用力公式为:

$$F = \frac{1}{2|V|} \sum (A(i,j) - \frac{k_i k_j}{2|V|})$$

$$= \frac{1}{2|V|} \left(\sum_{A(i,j)=1} A(i,j) - \sum_{a_i, a_j \in C_b} \frac{k_i k_j}{2|V|} \right) \quad (5)$$

根据 Q 模型定义, 节点 p_i 与社区 C_b 之间的能量取决于节点 p_i 在社区 C_b 中的邻居节点数量, 以及节点 p_i 与社区 C_b 中所有节点的连接期望。在计算过程中, 每个节点需要计算与其他节点的作用力, 因此算法的计算复杂性为 $O(n^2)$ 。

3 实验

3.1 FDCD 算法特性测试

美国大学生橄榄球联盟网络表现了该联盟 2000 年的真实比赛情况。该网络拥有 115 个节点, 代表了联盟的球队, 拥有的 616 条边表示球队

之间的比赛情况。目前,该网络也是社区挖掘算法的测试网络之一。本文首先以该网络作为测试基准,对 FDCD 算法的性能进行测试。

首先,我们将橄榄球联盟网络中的节点,随机分布到 12 个社区。采用 2.3 节中获得的四种不同力导向模型,各计算 100 次,每个模型计算获得的 Q 模块度分布如图 2 所示。

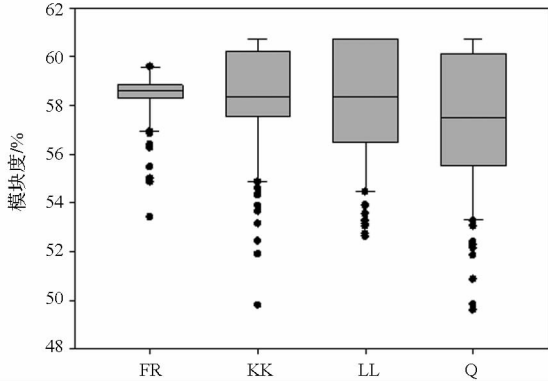


图 2 随机分布初始化的社区 Q 模块度分布
Fig. 2 The Q modularity distribution with the random initialization

测试表明,四种力导向模型获得的 Q 模块度均与节点初始分布情况相关。其中,FR 模型获得 Q 模块度变化范围相对较小,数值在 0.53 ~ 0.6 之间变化且分布较为均匀,表明在随机初始化的

情况下,该模型获得的 Q 模块度也是随机均匀分布的。KK 模型和 Q 模型获得 Q 模块度变化范围较大,表明算法的稳定性不高。LL 模型则表现出较为平衡的性能,Q 模块度变化范围和主要结果分布范围都较为理想,且获得的大部分结果都处于较高模块度范围,表明该模型在节点随机初始化情况下以较高概率获得最优分类。

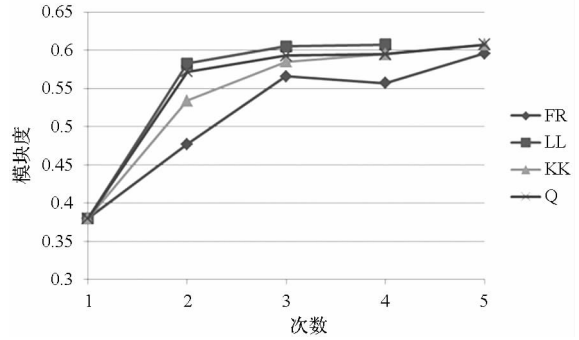


图 3 基于次中心初始化的社区 Q 模块度变化
Fig. 2 The Q modularity distribution with the “secondary point” initialization

其次,我们采用次中心分布策略对四种力导向模型再次进行测试,记录每次迭代后获得的 Q 模块度,其变化情况如图 3 所示。所有模型都在 4 次迭代内结束算法,其中 LL、KK 和 Q 模型最后结果都为 0.607,高于 GN、NG 等算法获得的 Q 模块度。

表 1 不同力导向模型对社会网络社区挖掘效果
Tab. 1 Compare FDCD to other community detect algorithm

网络	节点数	边数	k	FDCD 算法框架				其他算法	
				FR	LL	KK	Q	GN	模块度矩阵法
Karate Club	34	79	4	0.401	0.469	0.408	0.469	0.401	0.419
Jazz	198	2742	4	0.322	0.448	0.284	0.417	0.405	0.442
Football	115	615	12	0.594	0.607	0.607	0.607	0.598	0.593
polbooks	105	442	4	0.498	0.539	0.427	0.495	0.492	0.526
Polblogs	1225	19091	2	0.421	0.429	0.272	0.429	0.411	0.426
E-mail	1133	5451	8	0.521	0.536	0.497	0.536	0.533	0.572

3.2 典型社会网络测试

为了检验 FDCD 算法的正确性,本文采用多种实际社会网络进行了算法测试。除 Karate Club 和橄榄球联盟网络外,还选取了爵士乐网络、政治书籍购买网络、选举网络和 E-mail 联系网 4 种不同的实际社会网络进行比较测试。其中爵士乐网络记录了 19 世纪 20 年代美国 198 支爵士乐队之间的合作关系;政治书籍购买网络代表了在亚马逊网站上在线出售的 105 本政治书籍,连线代表了同一购买者同时选购书籍的关系;选举网络代

表了某网站上 1225 个关于政治选举的最大个人博客,选举网络的边描述了博客首页上的超链关系;E-mail 联系网记录了某大学 1133 名雇员在 2002 年前三个月的交互关系。

实验采用 4 种不同模型对 6 种实际社交网络进行社区挖掘,同时采用了 GN 算法^[1]和模块度矩阵法^[4]进行了比较测试,各种算法获得的 Q 模块度如表 1 所示,k 按照 Q 模块度最大进行取值。实验表明,KK 模型并不能胜任所有的网络,它对 jazz 网络和 polblogs 网络的 Q 模块度均小于 0.3,

即没有发现社区。但 LL 模型和 Q 模型对多种不同网络都获得了较高的 Q 模块度,表明采用这两种模型进行社区挖掘将具有较好的正确性。同时,LL 模型算法的计算复杂性为 $O(n)$,可适用于大规模复杂网络的社区挖掘。

4 总结

FDCD 算法在不增加计算复杂性的前提下,通过多种力导向模型对网络节点进行分类,从而发现复杂网络中的独立社区。实验表明,基于 FR、LL、KK、Q 这 4 种力导向模型的算法能较好地识别出各类实际社会网络中的社区,其中基于 LL 模型的算法不仅具有较小的计算复杂性,而且在各种复杂网络识别中获得最高的 Q 模块度。今后工作将围绕两个方面展开,一是如何定义更好的社区初始化策略,二是根据复杂网络特征,设计更优的节点与社区之间的力导向模型。

参考文献 (References)

[1] Gimm M, Newman M E J. Community structure in social and biological networks[C]//Proceedings of the National Academy of Sciences, 2002;7821 - 7826.
 [2] Fortunato S. Community detection in graphs [J]. Physics Reports, 2010, 486(3): 75 - 174.
 [3] Michelle Girvan, Newman M E J. Fast algorithm for detection community structure in networks [J]. Physical Review E,

2004, 69 (2): 66 - 113.
 [4] Newman M E J. Modularity and community structure in networks [C]//Proceedings of the National Academy of Sciences, 2006: 8577 - 8582.
 [5] Pons P, Latapy M. Computing communities in large networks using random walks[J]. LNCS 2005. 3733: 284 - 293.
 [6] Tamassia Eades. A heuristic for graph drawing[J]. Congressus Numerantium, 1984,42: 149 - 160.
 [7] Kamada T, Kawai S. An algorithm for drawing general undirected graphs[J]. Information Processing Letters, 1989. 31(1): 7 - 15.
 [8] Fruchterman T M J, Reigold E M. Graph drawing by force-directed placement [J]. Software-Practice and Experience, 1991, 21(11): 1129 - 1164.
 [9] Noack A. An energy model for visual graph clustering[C]//Graph Drawing, Lecture Notes in Computer Science, 2004;425 - 436.
 [10] Andreas Noack, Randolph Rotta. Multi-level algorithms for modularity clustering [J]. Experimental Algorithms, Lecture Notes in Computer Science, 2009. 5526: 257 - 268.
 [11] Bressan, Yi Song, Stéphane. Force-directed layout community detection [J]. Database and Expert Systems Applications, Lecture Notes in Computer Science, 2013. 8055: 419 - 427.
 [12] 水超, 李惠. 基于“次中心”的社区结构探寻算法[J]. 计算机应用, 2012, 8: 2154 - 2158.
 SHUI Chao, LI Hui. A new community detection algorithm base on secondary point detecting [J]. Journal of Computer Applications, 2012, 8: 2154 - 2158. (in Chinese)
 [13] Noack A. Modularity clustering is force-directed layout [J]. Physical Review E, 2009, 79(2): 26 - 102.

(上接第 133 页)

[15] Edelstein A S, Burnette J E, Fischer G A, et al. Validation of the microelectromechanical system flux concentrator concept for minimizing the effect of 1/f noise[J]. Journal of Applied Physics, 2009, 105, 07E720.
 [16] Guedes A, Patil S B, Wisniowski P, et al. Hybrid magnetic tunnel junction-MEMS high frequency field modulator for 1/f Noise suppression [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(11): 2554 - 2557.
 [17] Tian W G, Hu J F, Pan M C, et al. Flux concentration and modulation based magnetoresistive sensor with integrated planar compensation coils [J]. Review of Scientific Instruments. 2013, 84, 035004.

[18] Pan M C, Hu J F, Tian W G, et al. Magnetic flux vertical motion modulation for 1/f noise reduction of magnetic tunnel junctions [J]. Sensors and Actuators A - Physical, 2012, 179, 92 - 97.
 [19] NVE Corporation. GMR Sensor Catalog [EB/OL]. <http://www.nve.com>.
 [20] 田武刚, 胡佳飞, 王伟, 等. 磁阻型弱磁传感器特性自动测试系统 [J]. 传感技术学报, 2013, 26(2): 200 - 204.
 Tian Wugang, Hu Jiafei, Wang Wei, et al. Automated testing system for characteristics of magnetoresistive weak magnetic field sensors [J]. Chinese Journal of Sensor and Actuators, 2013, 26(2): 200 - 204. (in Chinese)