

用非概率理论分析混合不确定性结构的可靠性*

李贵杰^{1,2}, 吕震宙¹, 葛山增², 徐佳³

(1. 西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072; 2. 中国人民解放军 96115 部队, 吉林 通化 134008;

3. 澳门大学 科技学院, 澳门 999078)

摘要:针对不确定性结构可靠性分析中的输入变量分布参数具有不确定性和输入变量为区间模型的混合不确定性结构展开研究。考虑到可用信息最少的情况,将分布参数的不确定性描述为区间模型。通过等概率转换方法将随机变量与其分布参数进行分离,使问题转化为随机与区间变量混合的可靠性问题,建立了混合不确定性结构的可靠性分析模型。基于非概率可靠性理论,建立混合不确定性结构分析模型的二级极限状态函数并结合 Kriging 代理模型建立了高效的求解方法。将所建立的混合不确定性模型应用于飞行器结构的不确定性分析中,验证了所建模型的合理性和所提方法的高效性和准确性。

关键词:非概率理论;混合不确定性;分布参数;区间变量;可靠性分析;失效概率

中图分类号:TB114.3 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2014)05-021-05

A reliability approach based on non-probabilistic theory for structures with hybrid uncertainties

LI Guijie¹, LYU Zhenzhou¹, GE Shanzeng², XU Jia³

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Unit 96115, Tonghua 134008, China; 3. Faculty of Science and Technology, University of Macau, Macau 999078, China)

Abstract: Investigation on mixed structures with hybrid uncertainties was based on the reliability analysis of uncertain structures of the distribution parameters of input variables that acted as the interval model. Considering the available information was quite scanty, the uncertain distribution parameters were treated as the interval model. The reliability analysis model for this hybrid uncertainty was established by separating the distribution parameters from their random variables through using equivalent probability transformation method. Based on the non-probabilistic reliability theory, a high efficient solution method was proposed by successively constructing the limit state function of the proposed hybrid uncertain analytic model in two levels and combing the Kriging surrogate model. The proposed hybrid uncertain analytic model is employed to analyze aircraft structures with hybrid uncertainties, which can demonstrate the rationality of the proposed model and the efficiency and accuracy of the solution model.

Key words: non-probabilistic theory; hybrid uncertainty; distribution parameter; interval variable; reliability analysis; failure probability

在结构可靠性分析中最为常用的方法为基于概率理论的随机可靠性分析方法。该方法需要充足的数据信息来建立精确的概率分布,但是在工程实际中由于信息的缺乏,获得的数据往往只能描述变量的分布类型而它们的一些分布参数不能被准确地确定,文献[1]将这种不确定性称为二类混合模型亦称为二阶不确定性,也即分布参数是不确定的。Elishakoff等^[2]首先提出了这种混合不确定性模型,并且认为由于信息的缺乏这些不确定的分布参数只能给出一个变化的区间范围。为了高效地求解二类不确定性问题,文献[1]中通过推导常用分布类型的分布参数与累积

分布函数的单调关系建立了分布参数与极限状态函数的单调关系并结合 Hasofer Lind-Rackwitz Fiessler(HL-RF)法^[3]给出了高效的求解方法。但是受到 HL-RF 的自身缺陷的影响,该方法处理工程中的大型复杂结构时会受到一定的限制。

当受到客观条件的限制(如飞行器结构中的部件)无法通过大量实验获得充分的数据确定其概率分布时,Ben-Haim 和 Elishakoff 提出了非概率凸集模型来处理这类不确定性问题^[4]。郭书祥等^[5]提出了一种新的度量仅含有区间不确定性问题的可靠性分析方法。进一步基于凸集模型的可靠性分析可以参考文献[6-8]。但在实际结构中输入

* 收稿日期:2014-01-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51175425);航空基金资助项目(2011ZA53015)。

作者简介:李贵杰(1983—),男,辽宁铁岭人,博士研究生,E-mail:lgjnwp@mail.nwpu.edu.cn;

吕震宙(通信作者),女,教授,博士,博士生导师,E-mail:zhenzhou@mail.nwpu.edu.cn

各变量的不确定性往往不是单一的形式,而是随机与非随机变量混合的形式,为了处理这类混合可靠性问题(文献[1]称之为为一类不确定性),Du^[9-11]和郭书祥^[12]分别从概率与非概率的角度出发建立了相应的可靠性分析模型。但是由于这些方法自身的缺陷使其在分析大型复杂结构时会受到限制。

1 混合可靠性分析模型

1.1 参数不确定性与随机变量的分离

对于输入随机变量的参数具有不确定性和输入变量为非随机的结构模型,其输出响应量 M 可表示为:

$$M = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{1}$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示参数具有不确定性的随机变量。 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 表示输入区间不确定性变量。令随机变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的概率密度函数为 $f_i(x_i, \theta_i)$, 其中 θ_i 为概率密度函数的分布参数, 在本文中令其为区间变量, 令区间变量 $y_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 的下边界和上边界分别为 y_j^L 和 y_j^U , 并定义其中值和离差分别为 $y_j^C = (y_j^L + y_j^U)/2$ 和 $y_j^R = (y_j^U - y_j^L)/2$ 。

式(1)中随机变量的参数 θ 和变量 \mathbf{y} 均为区间变量, 将导致结构的失效面在一个区间范围内变化, 因此结构的失效无法用一个具体值来表达, 只能是一个区间值。由于参数不确定性的存在无法获知准确的随机变量的概率密度函数, 使得结构可靠性分析变得异常的困难。通过等概率转化的思想^[13]将随机变量与不确定参数进行分离, 进而可以简化求解过程。其等概率转化过程如下:

$$U(z_i) = F_i(x_i, \theta_i); x_i = F_i^{-1}(U(z_i), \theta_i), \tag{2}$$

(i = 1, 2, \dots, n)

其中, F_i 和 F_i^{-1} 分别为随机变量 x_i 的累积分布函数和逆累积分布函数, z_i 为指定分布类型的随机变量, U 为 z_i 的累积分布函数。

特别是当随机变量 x_i 服从正态分布时, 令 z_i 服从标准正态分布, U 为标准正态分布的累积分布函数即 Φ , 式(2)可以写成下面的形式:

$$x_i = F_i^{-1}(\Phi(z_i), \theta_i), (i = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

因此有

$$x_i = \mu_i + \sigma_i z_i \tag{4}$$

其中 μ_i 和 σ_i 分别为正态随机变量 x_i 的均值和标准差。

类似的情况, 当 x_i 服从均匀分布时, 有

$$x_i = a_i + (b_i - a_i) z_i \tag{5}$$

其中, a_i 和 b_i 分别为均匀变量的下边界和上边界, z_i 为服从标准均匀分布的随机变量。

将式(2)代入到式(1)中, 原极限状态函数可以改写为:

$$M = g\{F_x^{-1}[U(z), \theta], \mathbf{y}\} = G(z, \theta, \mathbf{y}) \tag{6}$$

1.2 参数不确定性与区间变量混合结构的统一可靠性分析模型

经过等概率转化, 原极限状态函数转化为含有随机变量 z 和区间变量 θ 和 \mathbf{y} 的极限状态函数。因此可以借鉴郭书祥^[12]提出的混合概率-非概率可靠性模型建立混合结构的统一可靠性分析模型。

令只含区间变量的极限状态函数为:

$$M = g(\mathbf{y}) \tag{7}$$

其中 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 为输入区间变量向量。当 $g(\cdot)$ 为区间变量的连续函数时, M 也为一区间变量 $[M^L, M^U]$ 。其中值和离差分别为 $M^C = (M^L + M^U)/2$ 和 $M^R = (M^U - M^L)/2$ 。

定义输入变量为区间变量的结构非概率可靠度指标为^[5]:

$$\eta = M^C/M^R = (M^L + M^U)/(M^U - M^L) \tag{8}$$

根据结构可靠性理论, 超曲面 $g(\mathbf{y}) = 0$ 称为失效面。它将结构的基本变量空间分为失效域 $\Omega_f = \{\mathbf{y}: g(\mathbf{y}) < 0\}$ 和安全域 $\Omega_s = \{\mathbf{y}: g(\mathbf{y}) > 0\}$ 两部分。根据式(8), 只要 $\eta > 1$, 即 $M^L > 0$, 则对任意 $y_j (j = 1, 2, \dots, m)$, 均有 $g(\mathbf{y}) > 0$ 。此时, 结构安全可靠。且 η 越大, 结构离失效区域越远, 结构越安全, 如图 1(a) 所示。如果 $\eta < -1$ 时, 即 $M^U < 0$, 则对任意 $y_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 均有 $g(\mathbf{y}) < 0$, 结构必然失效, 如图 1(c) 所示。而当 $-1 \leq \eta \leq 1$ 时, $g(\mathbf{y}) > 0$ 和 $g(\mathbf{y}) < 0$ 均有可能。即结构可能安全, 也可能失效, 如图 1(b) 所示。

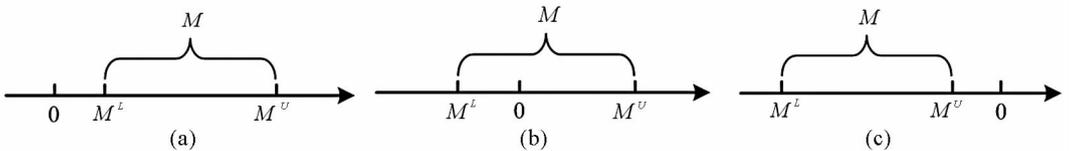


图 1 非概率可靠性指标的意义

Fig. 1 The significance of the non-probabilistic reliability index

非概率可靠性指标的求解方法可以参考文献[14]。

对于极限状态函数式(6)中,当随机向量 \mathbf{z} 取某一实现值 \mathbf{z}^* 时,则式(6)只含区间变量,进行非概率可靠性分析有:

$$\eta = \eta(\mathbf{z}^*) = M^c(\mathbf{z}^*)/M^R(\mathbf{z}^*) \quad (9)$$

这里非概率可靠性指标 η 与 \mathbf{z}^* 有关。根据 \mathbf{z}^* 的随机性并且考虑到非概率结构可靠的条件,即当 $\eta(\mathbf{z}^*) > 1$,结构绝对安全;当 $\eta(\mathbf{z}^*) > -1$,结构可能安全,则可建立如下二级极限状态函数:

$$M^{(2)} = \eta(\mathbf{z}) \pm 1 \quad (10)$$

式(10)只含有随机变量,可用一般的随机可靠性理论分析。得到结构失效概率的下限和上限分别为:

$$P_f^L = \Pr\{\eta(\mathbf{z}) \leq -1\} = \int_{\eta(\mathbf{z}) \leq -1} f_z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (11)$$

$$P_f^U = \Pr\{\eta(\mathbf{z}) \leq 1\} = \int_{\eta(\mathbf{z}) \leq 1} f_z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (12)$$

其中, $f_z(\mathbf{z})$ 为随机变量 \mathbf{z} 的联合概率密度函数, $d\mathbf{z} = dz_1 dz_2 \cdots dz_n$ 。因此可得混合结构的失效概率为 $P_f \in [P_f^L, P_f^U]$,在工程实际中,按其上限 P_f^U 进行设计较为合理。

2 求解方法

所建立的二级极限状态函数式(10)中随机变量 \mathbf{Z} 可以为任意的分布形式,并且对于一般结构的极限状态函数,非概率性指标往往不能被解析地表达,需采用优化方法来求得,这将导致二级极限状态函数为隐式的形式。传统的可靠性近似解析方法如一次二阶矩法和二次二阶矩法受到维数和极限状态函数非线性程度的影响,限制了其在求解本文问题中的使用。而数字模拟方法,如蒙特卡罗 (Monte Carlo, MC) 法对于大型复杂的工程问题计算代价太大,只适用于理论的对照解。

基于 Kriging 代理模型方法可以高效地求解随机结构的失效概率^[15-16],本文将采用 Kriging 代理模型方法求解混合不确定性结构的失效概率,该方法只需计算 Kriging 拟合二级功能函数时所需样本点对应的非概率可靠性指标,因此在保证计算精度的前提下,大大提高了计算效率。

基于 Kriging 方法求解混合不确定性结构失效概率过程如下:

(1)根据二级极限状态函数中随机变量 \mathbf{Z} 的分布类型,采用拉丁超立方抽样(Latin hypercube sample)方法抽取 $N = (n + 1)(n + 2)/2$ 个样本点,其中 n 为随机变量 \mathbf{Z} 的维数。

(2)计算所抽样本点对应的非概率可靠性指标的值,建立二级极限状态函数的 Kriging 代理模型,记为 $\hat{M}^{(2)}$ 。

(3)采用优化方法寻找使得期望可行性函数(Expected Feasibility Function, EFF)^[15]最大的点。该点加入到原样本中返回第二步,重新建立代理模型 $\hat{M}^{(2)}$ 。

(4)重复以上过程直至满足 EFF 收敛条件(本文取 EFF 门限值为 0.001)。

(5)采用 MC 方法求解所建立的代理模型 $\hat{M}^{(2)}$ 的失效概率值 P_f 。

上述基于 Kriging 方法的求解过程可以由图 2 所示的计算流程图来实现。

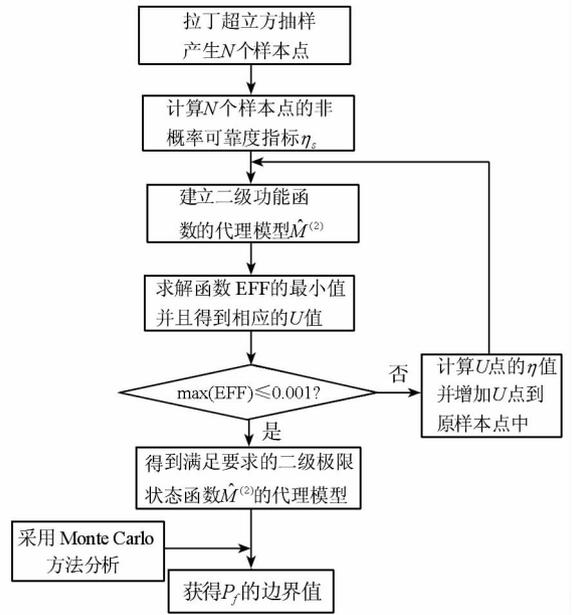


图 2 基于 Kriging 方法的流程图

Fig. 2 The flowchart of Kriging-based method

3 算例

飞行器的结构件都是比较复杂的,如飞机机翼、缝翼、襟翼等,并且它们的工作环境、材料性能、结构几何均存在多种不确定性,本文以飞机机翼的盒段结构为例验证所提模型的可行性和高效性。

算例 1: 某型飞机机翼九盒段结构如图 3 所示,由 64 个杆元,42 个板元构成,材料为铝合金,已知外载荷为区间变量 $P \in [127.5, 172.5]$ kg,各个单元的强度为相互独立的随机变量,由失效模式的枚举方法可求得结构主要失效模式的极限状态函数为^[17]:

$$M = 4.0R_{78} + 4.0R_{68} - 3.9998R_{77} - P \quad (13)$$

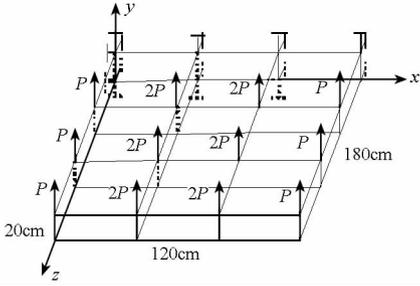


图 3 九盒段结构示意图

Fig. 3 The diagram of the nine-box structure

其中, R_{68} 、 R_{77} 和 R_{78} 的分布参数如表 1 所示。由于该极限状态函数为线性,通过式(4)变化得到的极限状态函数式(6)也为线性,因此可以解析得到其失效概率的上下边界。解析方法和本文所提方法计算得到的结果列于表 2 中。

表 1 九盒段结构随机变量分布参数

Tab. 1 Distribution parameters of the random variables of nine-box structure

随机变量	分布参数 1	分布参数 2	分布类型
R_{78}	$\mu_{R_{78}} \in [82.5, 84.5]$ kg	$\sigma_{R_{78}} = 10.02$ kg	正态分布
R_{68}	$\mu_{R_{68}} \in [82.5, 84.5]$ kg	$\sigma_{R_{68}} = 10.02$ kg	正态分布
R_{77}	$\mu_{R_{77}} \in [81.5, 85.4]$ kg	$\sigma_{R_{77}} = 10.02$ kg	正态分布

表 2 算例 1 的计算结果

Tab. 2 Computing results of example 1

方法	解析法	本文方法	误差 (%)	函数调用次数
下边界	6.8013×10^{-4}	6.7680×10^{-4}	0.4896	62
上边界	1.7730×10^{-2}	1.7780×10^{-2}	0.2831	62

从表 2 中的计算结果可以看出本文所提方法与解析方法所得到结果是一致的。由于极限状态函数为线性的显式形式,可以明确地判断经过参数分离后的极限状态函数的单调性,因此,函数的极大值与极小值发生在区间变量的边界处。只需调用两次极限状态函数便可获得非概率可靠度指标。从表 2 中还可以看出本文方法具有较高的计算效率。

算例 2: 三盒段模拟机翼的结构^[17]如图 4 所示,这里把三盒段模拟机翼模型看作是板杆结构,总共有 28 个杆元件、16 个板元件。将 28 个杆元件分为 X、Y、Z 方向的不同三类,即每个方向上杆的横截面积和长度是分别相同的。设 L_1 、 L_2 、 L_3 分别表示 X、Y、Z 三个不同方向上杆的长度;假设所有杆的面积 A 都相同;E 表示杆元件和板元件的弹性模量,泊松比取为 0.3;P 为加在节点上的

外载荷;T 表示板(即蒙皮)的厚度。用 ANSYS 软件建立的三盒段模拟机翼结构的有限元模型如图 5 所示。其中 L_1 、 L_2 、 L_3 、E 和 P 为相互独立的随机变量,它们的分布参数列于表 3 中,A 和 T 为区间变量,其取值范围分别为 $A \in [1.8, 2.2]$ cm² 和 $T \in [0.19, 0.21]$ cm。结构的失效定义为节点 16 超过许用位移。建立极限状态函数为:

$$M = D_i - d(L_1, L_2, L_3, A, E, P, T) \quad (14)$$

其中 $D_i = 1.2$, $d(L_1, L_2, L_3, A, E, P, T)$ 为节点 16 的位移,可以通过有限元方法获得。

表 3 三盒段结构随机变量分布参数

Tab. 3 Distribution parameters of the random variables of three-box structure

随机变量	分布参数 1	分布参数 2	分布类型
L_1	$\mu_{L_1} \in [58, 62]$ cm	$\sigma_{L_1} = 6$ cm	正态分布
L_2	$\mu_{L_2} \in [19, 21]$ cm	$\sigma_{L_2} = 2$ cm	正态分布
L_3	$\mu_{L_3} \in [39, 41]$ cm	$\sigma_{L_3} = 4$ cm	正态分布
E	$a_E \in [6.1, 6.3] \times 10^{10}$ Pa	$b_E = 6.8 \times 10^{10}$ Pa	均匀分布
P	$a_P = 5035$ N	$b_P \in [5415, 5715]$ N	均匀分布

注: a_E 、 a_P 和 b_E 、 b_P 分别表示输入变量 E 和 P 的下边界和上边界。

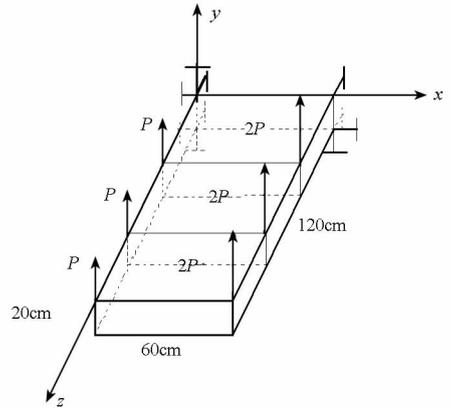


图 4 机翼三盒段结构示意图

Fig. 4 The diagram of the three-box structure

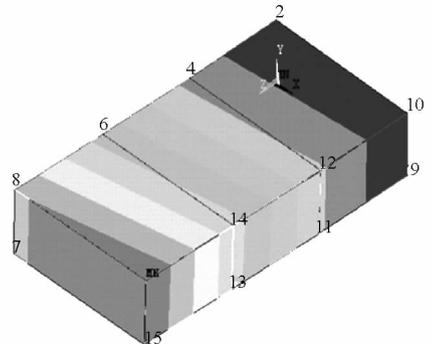


图 5 三盒段模拟机翼有限元模型

Fig. 5 The finite element model of the three-box structure

算例2中的极限状态函数为隐式的形式,无法判断函数的单调性,如果采用MC方法求解,需要大量的样本点,同时需要调用有限元软件计算极限状态函数值。该方法的计算代价是非常巨大甚至是无法实现的。由于在算例1中已经验证了本方法的合理性,因此,只给出采用本文所提方法的计算结果,结构的失效概率为: $1.068 \times 10^{-4} \leq P_f \leq 8.066 \times 10^{-2}$,需要200个样本点拟合二级极限状态函数,调用极限状态函数次数为9820次。该算例进一步验证了本文所提方法可以适用于极限状态函数为复杂隐式的情况。在实际工程中,为了结构的安全起见采用失效概率的上界作为结构的失效概率是合理的。即此算例可以采用失效概率为 8.066×10^{-2} 进行结构设计。

4 结论

针对不确定性结构中的输入随机变量参数具有不确定性和输入变量为非随机变量的混合情况展开研究,通过等概率转化的思想将参数不确定性与其变量进行分离,进一步基于混合概率-非概率可靠性分析模型建立了统一的混合可靠性分析模型。为该类问题的求解提供了一种可选分析方法。为了提高所建模型的分析效率,提出了基于Kriging代理模型的高效求解方法并给出了求解过程。通过具体的飞机机翼盒段结构验证了所建模型的合理性和所提算法的高效性和准确性。值得指出的是本文所提方法不受输入随机变量的分布类型和极限状态函数的形式限制,适用于大型复杂结构。

参考文献 (References)

- [1] Jiang C, Han X, Li W X, et al. A hybrid reliability approach based on probability and interval for uncertain structures[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2012, 134: 0310011-03100111.
- [2] Elishakoff I, Colombi P. Combination of probabilistic and convex models of uncertainty when limited knowledge is present on acoustic excitation parameters[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 104:187-209.
- [3] Rackwitz R, Flessler B. Structural reliability under combined random load sequences[J]. *Computers & Structures*, 1978, 9(5):489-494.
- [4] Ben-Haim Y, Elishakoff I. *Convex models of uncertainties in applied mechanics*[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1990.
- [5] 郭书祥,吕震宙,冯元生.基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J].*计算力学学报*,2001,18(1):56-60.
GUO Shuxiang, LYU Zhenzhou, FENG Yuansheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, 18(1):56-60. (in Chinese)
- [6] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability[J]. *Structural Safety*, 1994, 14(4):227-245.
- [7] Cao H J, Duan B Y. An approach on the non-probabilistic reliability of structures based on uncertainty convex models[J]. *Computational Mechanics*, 2005, 22(5):546-549.
- [8] Luo Y J, Kang Z, Luo Z, et al. Continuum topology optimization with non-probabilistic reliability constraints based on multi-ellipsoid convex model[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(3):297-310.
- [9] Du X P. Uncertainty analysis with probability and evidence theories[C]. *The 2006 ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, 2006.
- [10] Du X P. Unified uncertainty analysis by the first order reliability method. ASME[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2008, 130:1-10.
- [11] Guo J, Du X P. Reliability analysis for multidisciplinary systems with random and interval variables [J]. *AIAA Journal*, 2010,48(1):82-91.
- [12] 郭书祥,吕震宙.结构可靠性分析的和非概率混合模型[J].*机械强度*,2002,24(4):524-526.
GUO Shuxiang, LYU Zhenzhou. Hybrid probabilistic and non-probabilistic model of structural reliability [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2002, 24(4):524-526. (in Chinese)
- [13] Ditlevsen O, Madsen H O. *Structural reliability methods*[M]. New York:Wiley, 1996.
- [14] 郭书祥,张凌,李颖.结构非概率可靠性指标的求解方法[J].*计算力学学报*,2005,22(2):227-231.
GUOSHUXIANG, ZHANG Ling. LI Ying. Procedures for computing the non-probabilistic reliability index of uncertain structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 22(2):227-231. (in Chinese)
- [15] Bichon B J, Eldred M S, Swiler L P, et al. Efficient global reliability analysis for non-linear implicit performance functions[J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(10):2459-2468.
- [16] Bichon B J, McFarland J M, Mahadevan S. Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(10):1386-1395.
- [17] 宋笔锋.结构体系失效概率计算方法研究[D].西安:西北工业大学,1994.
SONG Bifeng. A study on method for computing structural system failure probability[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 1994. (in Chinese)