

高精度有限体积法与间断有限元法的比较*

范进之, 李桦

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:通过数值算例,比较了高精度有限体积法和间断有限元法在求解不同问题时的表现。研究发现:在精度相同的条件下,间断有限元法的计算误差要明显小于有限体积法;间断有限元法重构过程与高精度有限体积法相比较为简单,但高阶情形下解多项式的自由度较多并且需要计算体积分,因此整个求解时间较长。降低时间积分时解多项式的自由度数目是实现高精度算法在实际问题中应用的重要手段。

关键词:高精度格式;有限体积法;间断有限元法

中图分类号:O354 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2014)05-033-06

Comparison of high-precision finite volume method and discontinuous Galerkin method

FAN Jinzhi, LI Hua

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The high-precision finite volume method (FVM) and discontinuous Galerkin method (DGM) were compared in different test cases through numerical examples. Results show that: with the same precision, the calculation error of DGM is obviously less than that of FVM; DGM's reconstruction process is comparatively simpler than FVM's, but its computational time is much longer since its freedom-degree of polynomial solution is higher under the condition of high order and it needs to calculate volume points. Decreasing the freedom-degree numbers of polynomial solution in the time evolution process is an essential method for high-precision calculation in the reality applications.

Key words: high-precision schemes; finite volume method; discontinuous Galerkin method

有限体积法(Finite Volume Method, FVM)和间断有限元法(Discontinuous Galerkin Method, DGM)是目前求解守恒型双曲率问题的两类重要方法^[1]。与有限差分法相比,FVM和DGM求解积分型方程,计算的守恒性容易得到保证;两种方法都可应用到非结构网格,比较容易处理复杂外形,在数据交换、负载平衡以及边界处理方面也更具优势。

FVM求解的是守恒型积分方程,计算的守恒性要优于求解差分方程的有限差分法。FVM求解的主要缺点在于方程无法做到维度解耦,构造高精度格式较为困难。高精度FVM,特别是用于非结构网格的高精度FVM,一直是计算物理研究领域的难点之一^[2]。

DGM求解差分方程的弱解形式。本质是求解有限元多项式各项系数,对于双曲问题可以较为容易地构造高精度格式。DGM的主要缺点是

格式的鲁棒性较差,特别是流场存在强间断时,很难获得具有高阶截断特性的解多项式^[3]。为了抑制数值震荡,通常需要在间断处重构整个有限元多项式,由此带来了额外的计算量。

为了获得适用于任意网格的高精度计算方法,近年来,高精度FVM与高精度DGM的混合方法^[4]得到了很大的发展。这类方法结合了有限元法高精度的特点,同时又在一定程度上降低了计算的复杂度,提高了计算效率。Luo^[5]以及张来平^[6]等都发展出了较为成熟的混合算法,促进了有限元法在实际问题中的应用。

1 高精度有限体积法

1.1 控制方程

对于可压缩气体,不考虑黏性力作用时,有限体积法求解积分型Euler方程:

* 收稿日期:2014-03-11

基金项目:中国航天科技集团公司航天科技创新基金资助项目(CALT-16)

作者简介:范进之(1984—),男,安徽芜湖人,博士研究生,E-mail:ff969@126.com;

李桦(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:lihua_kd@tom.com

$$\oint_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} dS = 0 \quad (1)$$

其中 Ω 为控制体, $\partial\Omega$ 为控制体边界, S 为控制体边界面积, \mathbf{W} 为守恒变量, \mathbf{F} 为输运通量。

对于二维问题, \mathbf{W} 和 \mathbf{F} 具有以下形式:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u_x V + n_x p \\ \rho u_y V + n_y p \\ \rho H V \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 V 为制定界面逆变速度, 满足:

$$V = u_x n_x + u_y n_y \quad (4)$$

对于 Godunov 方法, 边界面的数值通量可以表示为:

$$\mathbf{F} = H(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \quad (5)$$

其中 H 为黎曼求解器, \mathbf{W}_L 和 \mathbf{W}_R 为通过重构得到的守恒量。

1.2 重构方法

高精度有限体积法的核心是获得具有高阶截断特征的数值通量。为了求得边界面上的数值通量, 需要通过已知量重构得到边界面上积分点处的函数值。对于包含数值间断的问题, 高精度重构方法不仅要保证光滑区域重构结果的高阶特性, 还要求间断处不能产生非物理的数值震荡。

使用三阶 WENO 格式^[7] 作为有限体积法中的重构方法。WENO 方法的基本思想是通过数个低阶的重构多项式的非线性加权得到一个高阶重构多项式, 每个多项式的权值由构成多项式的重构模板的光滑程度决定。WENO 重构的表达式可以简单描述为:

$$P_{\text{WENO}} = \sum \omega_i P_i \quad (6)$$

其中 P_i 为模板 i 的重构多项式, ω_i 为对应的非线性权值。

2 间断有限元法

2.1 控制方程

间断有限元方法又称间断伽辽金方法, 是由 Cockburn 和 Shu 等在 20 世纪 80 年代末 90 年代初期结合了传统有限元方法与 FVM 提出的一种高精度数值方法, 其求解的控制方程为 Euler 方程的弱解形式:

$$\oint_{\Omega} \frac{\partial (\mathbf{W} \phi_m)}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \phi_m) dS - \oint_{\Omega} \bar{\mathbf{F}} \cdot \text{div}(\phi_m) d\Omega = 0 \quad (7)$$

其中 \mathbf{W} 和 \mathbf{F} 的定义同前, ϕ_m 为第 m 自由度的试验函数。间断伽辽金法中, 试验函数与有限元多项式的基函数相同, 因此守恒变量可以表示为:

$$\mathbf{W} = \sum_0^M c_i \phi_i \quad (8)$$

M 为有限元多项式总自由度, c_i 为给定基函数所对应的系数。

$\bar{\mathbf{F}}$ 为通量张量, 对于二维问题:

$$\bar{\mathbf{F}} = [\mathbf{F}_x \quad \mathbf{F}_y] \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x u_x + p \\ \rho u_y u_x \\ \rho H u_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_y u_y + p \\ \rho H u_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

将式(8)、(9)代入式(7), 可以得到间断有限元控制方程:

$$\oint_{\Omega} \phi_n \phi_m d\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} dS - \oint_{\Omega} (\mathbf{F}_x \phi_{m,x} + \mathbf{F}_y \phi_{m,y}) d\Omega = 0 \quad (11)$$

DGM 中, 边界面上的数值通量使用黎曼求解器式(5)求解, 体积项中的数值通量使用通量定义式(10)求解。

2.2 激波探测器与梯度限制器

DGM 求解整个解多项式(有限元多项式), 通过解多项式可以方便计算出任意点的函数值。但是当流场中存在间断时, 解多项式在间断附近泰勒展开不存在, 会产生高频非物理震荡, 为了克服这一现象, 间断有限元法需要在间断处对解多项式进行重构以保证数值稳定。

采用 Luo 提出的 HWENO 方法^[8] 来重构产生非物理震荡的控制体。HWENO 使用了目标控制体及其相邻控制体作为重构模板点, 因为 DGM 自身特点, 该模板的模板点数要小于 FVM。

DGM 中需要使用开关函数标记产生非物理震荡的控制体从而将光滑区域和间断区域分开处理。采用 Krivodonova 提出的一种开关函数^[9]:

$$\sigma = \frac{\int_{\partial\Omega^-} (q - q_{nb}) dS}{h^{\frac{p+1}{2}} |\partial\Omega^-| \cdot \|q\|} \quad (12)$$

其中 q 为任意变量, 一般取熵, $\|\cdot\|$ 代表给定控制体内该变量平均值。 $\partial\Omega^-$ 表示该边界为质量流入界面, 即 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ 。

当流场光滑时,分子项即为解多项式的泰勒展开余项,满足:

$$\sigma < SE \tag{13}$$

当流场中出现间断的时候,解多项式的泰勒展开余项会出现非物理震荡,满足:

$$\sigma > SE \tag{14}$$

SE 为阈值,一般取 $SE = 1$ 。

3 数值结果

选取数值计算中常用的一些问题作为对比算例。重点考察两种方法在超声速条件计算结果以及计算效率上的差异。FVM 程序使用传统的 3 阶 WENO 格式,DGM 使用 2 阶有限元和 3 阶有限元两种精度进行计算。空间格式采用 HLLC 格式,时间推进方式采用 3 阶 3 步龙哥库塔法。

3.1 Sod 激波管问题

Sod 激波管问题是经典的初始间断问题,通过该问题可以很好地检验数值方法的稳定性强弱以及数值黏性大小。

图 1 为 FVM 计算的密度结果三维视图。为了方便起见,我们取图中 $y = 0$ 位置作为比较对比位置。图 2 为 FVM 的结果与精确解的对比,图 3 和图 4 分别为 2 阶有限元以及 3 阶有限元结果与精确解的对比。

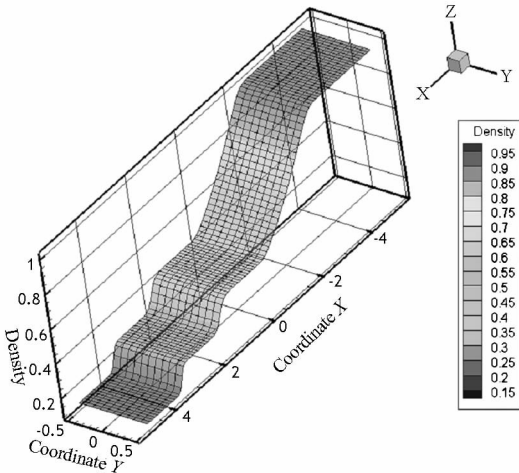


图 1 3 阶有限体积法 Sod 问题密度结果三维视图
Fig. 1 3D view of density result for Sod problem using 3 order FVM

从图中可以看出 3 种格式的结果与精确解相比均相差不大。3 种方法都较为准确地捕捉到了激波、滑移线以及膨胀波的所在位置。从 $x = 3.5$ 附近正激波的分辨能力上看,3 种格式相差无几,并且与精确解差别不大,FVM 的数值耗散与 DGM 相比略微显大。从 $x = 2.0$ 处滑移线分辨能力上

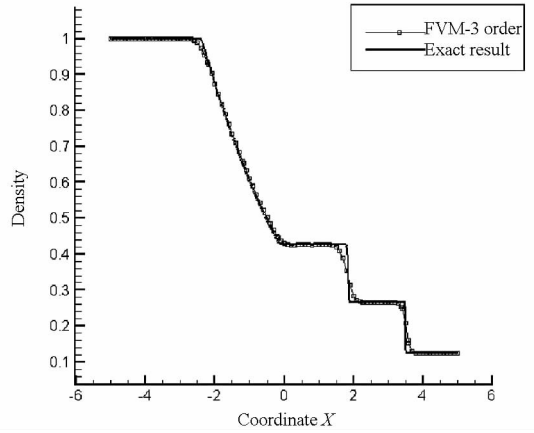


图 2 3 阶有限体积法 Sod 问题密度结果

Fig. 2 Density result for Sod problem using 3 order FVM

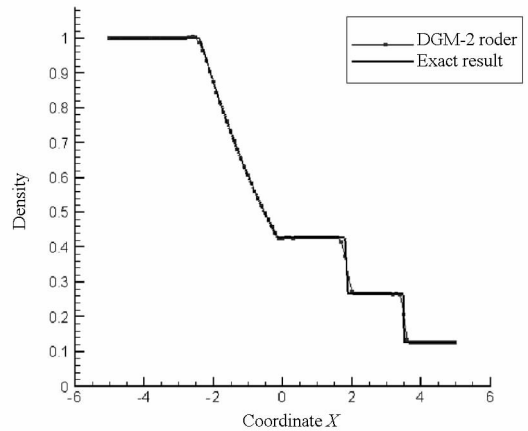


图 3 2 阶间断有限元 Sod 问题密度结果

Fig. 3 Density result for Sod problem using 2 order DGM

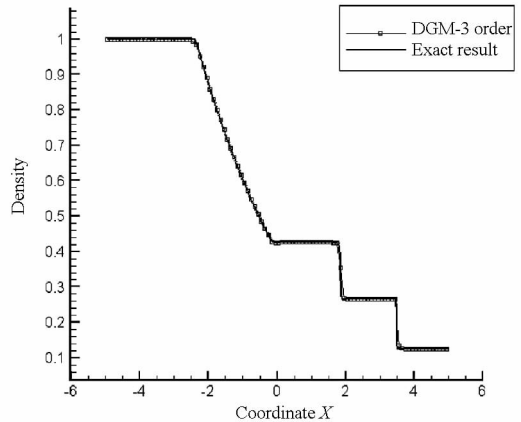


图 4 3 阶间断有限元 Sod 问题密度结果

Fig. 4 Density result for Sod problem using 3 order DGM

看,数值耗散最弱的是 3 阶 DGM,其次是 2 阶 DGM,最强的是 3 阶 FVM,这一现象在膨胀波所在区域($x = -2.0$)也可以清楚发现。同时需要注意的是在膨胀波处,DGM 的结果均出现了轻微的非物理震荡。

出现以上现象的主要原因在于 DGM 激波需要通过探测器函数以及梯度限制器“显式”地抑制非物理震荡;而 FVM 在重构过程中直接抑制了

非物理震荡,因此在流场光滑区域,FVM 的数值黏性要高于 DGM。受到探测器函数以及相关自由参数的影响,DGM 在某些区域容易产生非物理的数值震荡,膨胀波处的震荡也正是由此产生。

表 1 和表 2 为不同网格尺度下,3 阶 DGM 和 3 阶 FVM 的密度误差 L1 范数及其收敛精度。

表 1 3 阶间断有限元密度误差表

Tab.1 The density error for 3od DGM

网格尺度	L1 误差	收敛精度
0.2	9.98E-3	
0.1	2.17E-3	2.20
0.05	3.87E-4	2.48

表 2 3 阶有限体积法密度误差表

Tab.2 The density error for 3od FVM

网格尺度	L1 误差	收敛精度
0.2	3.02E-2	
0.1	6.79E-3	2.15
0.05	1.18E-3	2.52

从表中可以看出,随着网格的加密,2 种格式均体现出了网格收敛性,并且收敛的精度大致相当。相同网格下 3 阶 FVM 的误差高于 3 阶 DGM,这是两者结果差异的主要原因。

3.2 激波密度波干扰问题

激波密度波干扰问题是综合考察格式空间分辨率的一个经典模型算例。图 5 至图 7 分别为 3 阶 FVM、2 阶 DGM 以及 3 阶 DGM 的结果与精确解的对比。图 8 为 3 种方法的密度结果与精确解对比的局部放大对比。

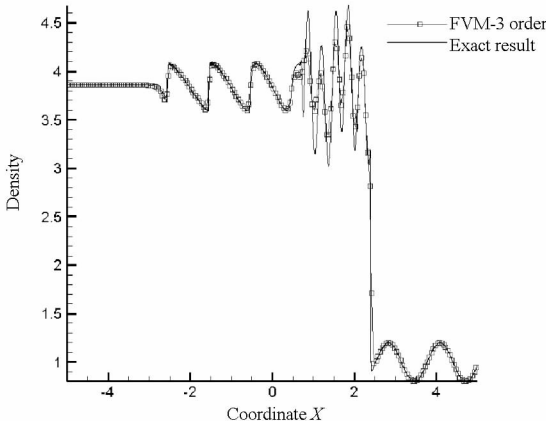


图 5 激波干扰问题 3 阶有限体积法密度结果
Fig.5 The density result for shock density wave interaction problem using 3 order FVM

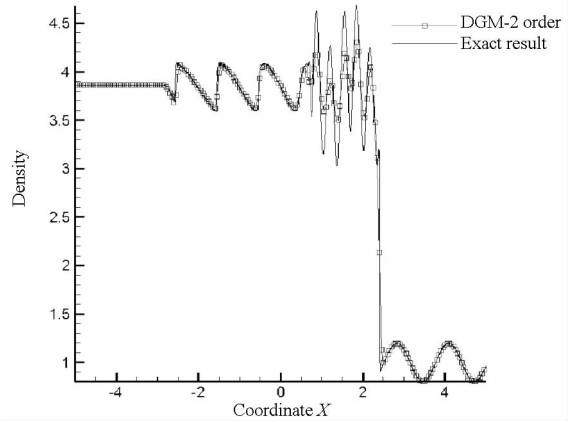


图 6 激波干扰问题 2 阶间断有限元法密度结果
Fig.6 The density result for shock density wave interaction problem using 2 order DGM

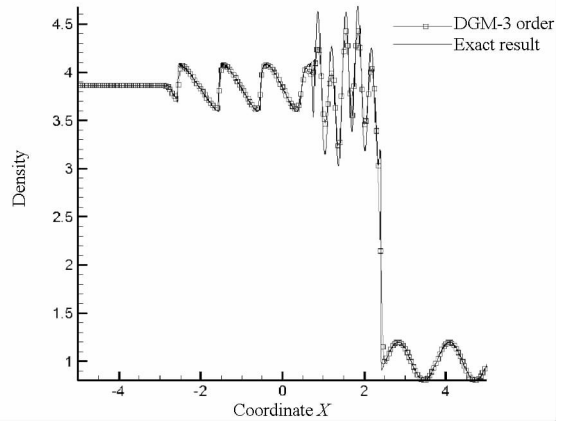


图 7 激波干扰问题 3 阶间断有限元法密度结果
Fig.7 The density result for shock density wave interaction problem using 3 order DGM

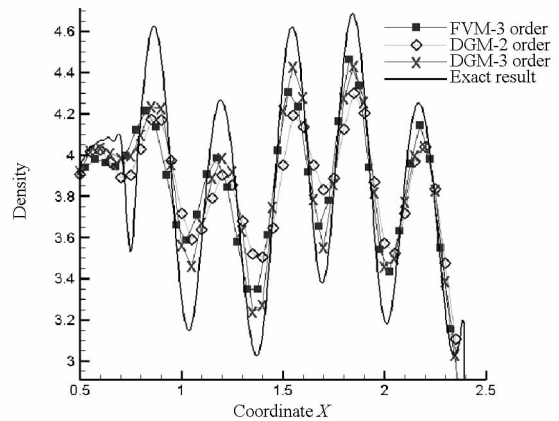


图 8 激波干扰问题密度结果局部放大图
Fig.8 The zoom out of density result for shock density wave interaction problem

从图中不难看出,每一种格式都很好地区分了激波的位置,并且较好地反映出滑移线的形态。由于每一种数值方法的数值耗散大小不同,因此滑移线处计算得到的密度波峰谷值有所差异,数值耗散越大的方法,密度波峰谷值的差距越小。3

阶 DGM 和 3 阶 FVM 得到的密度波落差较大,2 阶 DGM 得到的密度波落差较小。

3.3 NACA0012 跨音速扰流问题

NACA0012 翼型是一经典的跨音速翼型,通过这一算例主要考察计算跨音速流动的能力。为了保证每一种方法确实收敛,文中全部采用非定常计算,计算时间为 0.1s,图 9 为计算网格局部放大图,网格数目 14 000。图 10 至图 12 分别为 3 阶 FVM、2 阶 DGM 和 3 阶 DGM 的压力等值线图。图 13 为 2 阶 DGM 上下壁面的升力系数曲线,图 14 为 3 阶 DGM 上下壁面的升力系数曲线。从图中可以看出 3 种格式均较好地捕捉到上表面激波所在的位置。从升力系数曲线不难发现,梯度限制器很好地抑制了激波附近的非物理震荡。同时对比 2 阶结果和 3 阶结果不难发现 2 种方法对激波的捕获能力相差不大,这是由于激波附近单元多项式解主要由限制方法决定,文中 2 阶格式和 3 阶格式使用了相同的限制器,因此激波附近的流场结构相差不大。

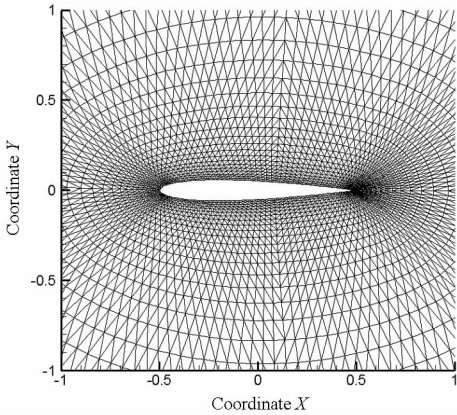


图 9 NACA0012 网格局部放大图

Fig. 9 The sketch of computation grid for NACA0012

通过该算例比较 3 种数值方法的计算开销。表 3 为 3 种方法所需要的内存开销比较,以及每百时间步的计算时间。

表 3 有限体积法与间断有限元法计算开销对比
Tab. 3 Comparing of FVM and DGM

方法	内存开销(MB)	CPU 时间 (s/100 时间步)
3od FV	23.04	17.13
2od DG	19.0	8.17
3od DG	23.10	24.86

从表 3 中分析可知,3 阶 FVM 与 3 阶 DGM 这两种数值方法解多项式的自由度数目相同,因此所需要的内存开销十分接近。虽然网格量较

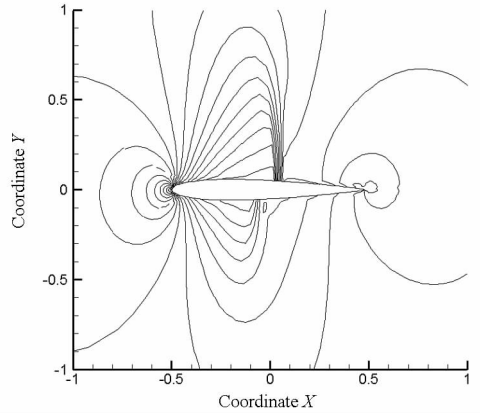


图 10 NACA0012 3 阶有限体积法压力等值线图
Fig. 10 The pressure contour for NACA0012 using 3 order FVM

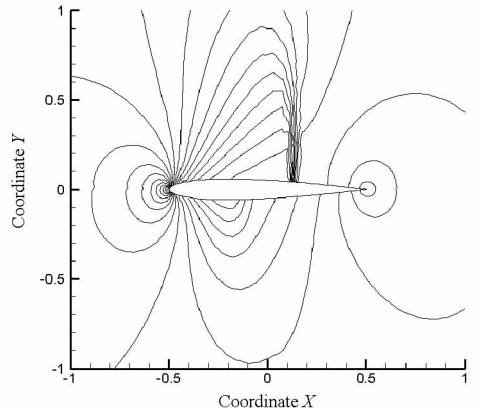


图 11 NACA0012 2 阶间断有限元压力等值线图
Fig. 11 The pressure contour for NACA0012 using 2 order DGM

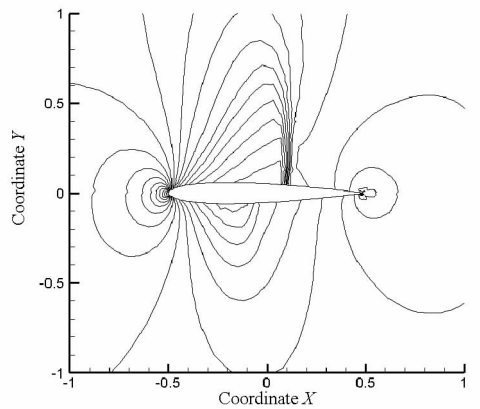


图 12 NACA0012 3 阶间断有限元压力等值线图
Fig. 12 The pressure contour for NACA0012 using 3 order DGM

少,但可以预见随着网格量的增加,高阶格式与低阶格式在内存开销上的差距将迅速拉大,这是高精度 FVM 与 DGM 难以用于实际问题的重要原因之一。通过计算时间的比较不难看出,2 阶 DGM 多项式的自由度最小,重构模板也最为简单,因此

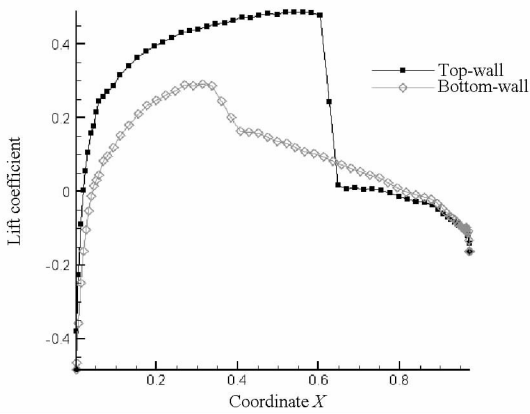


图 13 2 阶间断有限元上下表面升力系数曲线

Fig. 13 The lifting coefficient curve of top and bottom wall using 2 order DGM

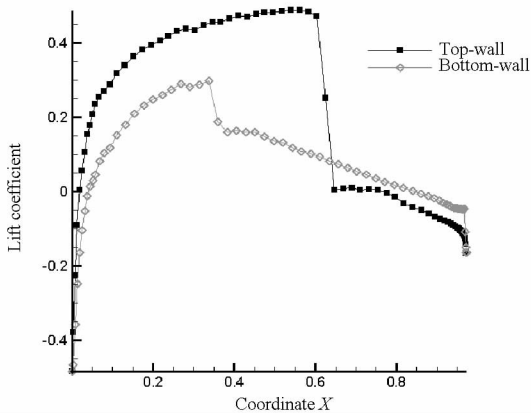


图 14 3 阶间断有限元上下表面升力系数曲线

Fig. 14 The lifting coefficient curve of top and bottom wall using 3 order DGM

计算时间最短;3 阶 FVM 解多项式自由度较多,因此整个计算时间比 2 阶 FVM 有了明显的提高;3 阶 DGM 自由度数目多,每个自由度都需要进行时间积分,另外还需要计算体积分项,这导致 3 阶 DGM 的计算过程十分缓慢,每百步计算时间比相同精度的 FVM 要多很多。对于存在数值间断的流场,这一差距还将进一步扩大,这也是高精度数值方法难以用于实际问题的另一个重要原因。

4 结论

通过理论分析以及算例对比,我们得到如下结论:

1) 高精度 FVM 和高精度 DGM 均能较好地捕捉到流场中激波、膨胀波以及滑移线所在位置。相同精度下,DGM 的计算误差要明显小于 FVM。DGM 中需要使用激波探测器和梯度限制器抑制非物理震荡,激波探测器对计算结果影响较大,需

要根据不同问题合理选择。

2) 高精度 DGM 的重构过程较为简单,FVM 的重构过程数学方法较为复杂。在高精度重构方面,DGM 与高精度 FVM 相比优势较为明显。

3) 高精度 FVM 直接求解控制方程的积分形式,方程较为简单,时间推进过程的开销比较小。DGM 求解控制方程的弱解形式,与积分方程相比,不仅需要通过高精度数值积分计算体积分项,还需要将解多项式的每一个自由度都进行时间积分,计算量显著提高,造成 DGM 用于实际问题较为困难。合理地降低时间推进时的多项式自由度数目可以极大地扩展 DGM 的应用范围。

参考文献 (References)

- [1] 成娟,舒其望. 计算流体力学中的高精度数值方法回顾[J]. 计算物理,2009,26(5):633-655.
CHENG Juan, SHU Qiwang. High order schemes for CFD: a review[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2009, 26(5):633-655. (in Chinese)
- [2] 刘君,白晓征,郭正. 非结构动网格计算方法 - 及其在包含运动界面的流场模拟中的应用[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2003:46-54.
LIU Jun, BAI Xiaozheng, GUO Zheng. The methodology and applications of moving boundary problem simulations for the unstructured moving grids [M]. Changsha: Press of National University of Defense Technology, 2003: 46 - 54. (in Chinese).
- [3] Zhu J, Qiu J X, Shu C W, et al. Runge - Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters II: unstructured meshes [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227: 4330 - 4353.
- [4] Dumbser M, Balsara D S, Toro E F, et al. A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(18):8209-8253.
- [5] Luo H, Luo L Q, Nourgaliev R, et al. A reconstructed discontinuous Galerkin method for the compressible Navier-Stokes equations on arbitrary grids [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(19):6961-6978.
- [6] Zhang L P, Liu W, He L X, et al. A class of hybrid DG/FV methods for conservation laws I: basic formulation and one-dimensional systems [J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(4):1081-1103.
- [7] Zhang Y T, Shu C W. Third order WENO scheme on three dimensional tetrahedral meshes [J]. Communications in Computational Physics, 2009, 5:836-848.
- [8] Luo H, Baum J D, Lohner R. A hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225:686-713.
- [9] Krivodonova L, Xin J, Remacle J, et al. Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws [J]. Applied Numerical Mathematics, 2004, 48(3-4):323-338.