

用紧支径向基函数传递固体域耦合数据的方法*

霍霖¹, 杨涛¹, 程兴华²

(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073;

2. 国防科技大学 计算机学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:针对热-电场耦合仿真计算中非匹配网格之间的数据插值问题,提出了一种基于紧支径向基函数点插值的数据传递方法。推导了数据传递矩阵,根据所提出的数据传递方法编制了非匹配网格之间数据传递计算程序,以若干组非匹配网格之间的温度插值为例进行了验证,并分析了不同参数对计算时间及精度的影响,结果表明,算法效率较高,计算误差较小,适用于以热-电场耦合为代表的固体域耦合非匹配网格间的数据传递计算。

关键词:数据插值;紧支径向基函数;非匹配网格;固体域

中图分类号:TU398 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2014)05-075-04

Data exchange method for solid body field coupling based on compactly supported radial basis function

HUO Lin¹, YANG Tao¹, CHENG Xinghua²

(1. College of Aerospace science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. College of Computer, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: According to the data interpolation problems of non-matched meshes in the simulation calculation of thermal-electric solid body field, a interpolation algorithm based on compactly supported radial basis function was proposed. The transfer matrix was derived and the calculation program used for data exchange between two non-matched meshes based on compactly supported radial basis function was developed. An example of several groups of temperature interpolation between two non-matched meshes was verified, and the influence of different parameters on calculation time and precision was analyzed. The result shows that the algorithm is efficient and accurate for data exchange calculation of solid body field coupling non-matched meshes, especially for thermal-electric coupling interpolation.

Key words: data interpolation; compactly supported radial based function; non-matched meshes; solid body field

多场耦合问题在自然界中广泛存在^[1],随着高超声速飞行器领域研究的不断深入,热-电场之间的耦合作用在高超声速飞行器的设计过程中被给予了越来越多的重视。热-电场耦合的本质是固体域耦合,热-电场耦合计算中要解决的一个重要问题就是根据电网格单元的温度对其进行介电常数的赋值,而电网格单元的温度需要根据与其不匹配的热网格单元节点温度进行插值计算,热-电耦合场间有效的信息传递最终可化为固体域耦合场非匹配网格之间的插值问题。

多场耦合信息传递方法从总体上可以分为局部插值法^[1-3]和整体插值法^[4-6]。整体插值法中的径向基函数插值法是散乱数据插值的一种方法,是逼近理论的一个有力工具^[7],具有计

算格式简单、精度较高等优点,但在求解过程中通常要求解巨大的方程组,计算时间较长。近些年来由Wendland^[8]提出的在径向基函数基础上改进而来的紧支径向基函数方法,由于具有计算格式简单、计算工作量小、精度较高等优点,是一种广为采用的数据插值方法^[9-10]。紧支径向基函数方法多被应用于表面重构和流固耦合界面插值计算^[11-12],应用于固体域耦合插值的文献较少。

1 紧支径向基函数的数据传递方法

1.1 紧支径向基函数

紧支径向基函数是在径向基函数的基础上得

* 收稿日期:2014-01-03

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51375486)

作者简介:霍霖(1988—),男,河南焦作人,博士研究生,E-mail: huolin812@hotmail.com;

杨涛(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail: Taoy90@163.com

到的。径向基函数实际上是一元函数,它以空间距离作为变量,其表达式如下:

$$f(x) = \sum a_j \phi(\|x - x_j\|) + \sum p_i(x) b_i \quad (1)$$

式中, a_j 为待求系数, ϕ 为径向基函数, $\|x - x_j\|$ 为未知点到已知点 j 的欧式距离, $\sum p_i(x) b_i$ 为保证方程唯一可解的多项式,对于 ≤ 2 阶的有条件正定基函数, $\sum p_i(x) b_i$ 可以采用线性多项式表示。

径向基函数插值最终归结为求解一个线性方程组,在数据较多时这是一个大规模矩阵的求逆问题,易出现数值不稳定的现象^[13]。而紧支径向基函数在计算中求解矩阵呈稀疏、带状分布,更有利于大型问题的求解。

Wendland 定义的紧支径向基函数形式如下:

$$\phi(R) = \begin{cases} (1-R)^p P(R), & R < 1 \\ 0, & R \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

式中, p 为正整数, $R = \frac{\|x - x_i\|}{r_0}$, r_0 为紧支半径, $P(R)$ 为关于 R 的多项式。Wendland 给出在三维情况下,不同连续性的紧支径向基函数见表 1^[14]。

表 1 不同连续性的紧支径向基函数

Tab. 1 List of CSRBF with different continuities

C^0	$\phi(R) = (1-R)_+^2$
C^2	$\phi(R) = (1-R)_+^4(4R+1)$
C^4	$\phi(R) = (1-R)_+^6(35R^2+18R+3)$
C^6	$\phi(R) = (1-R)_+^8(32R^3+25R^2+8R+1)$

表中 $(1-R)_+$ 的定义为:

$$(1-R)_+^x = \begin{cases} (1-R)^x & 0 \leq R \leq 1 \\ 0 & R > 1 \end{cases} \quad (3)$$

由于 C^2 连续性的紧支径向基函数在 R^3 上是正定的^[14],且对于曲面重构的结果要优于其他三个函数,因此本文采用 C^2 连续性的紧支径向基函数进行插值计算。

1.2 数据插值方法

通过给定的所有源场点的坐标及函数值,确定某个目标场点 i 处的函数值,设源场点的个数为 n ,则基于紧支径向基函数的插值函数为:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \phi(\|x - x_j\|) + \sum_{i=1}^4 p_i(x) b_i \quad (4)$$

取 $p_i(x)$ 为线性基,即 $p_i(x) = [1, x, y, z]^T$ 。式中,待求系数 a_j 和 b_j 可以通过插值条件

$$f(x_l) = \sum_{j=1}^n a_j \phi(\|x_l - x_j\|) + \sum_{i=1}^4 p_i(x_l) b_i = h_l \quad (5)$$

和正交条件

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i y_i = \sum_{i=1}^n a_i z_i = 0 \quad (6)$$

得到,且解唯一存在^[4],其中 h_l 为在源场点 l 处的函数值。

由式(4)可得线性方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \mathbf{H} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{A} = [\phi_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$\mathbf{U} = [a_i, b_1, b_2, b_3, b_4]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{H} = [h_i]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

因此可解得:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{H} \quad (12)$$

将式(11)计算结果带入式(3),即可求解在插值点处的函数值。

2 算法试验及分析

假设温度场分布函数为:

$$T(x, y, z) = 1000 \sin(x \times \pi/4) \cdot \sin(y \times \pi/4) \cdot \sin(z \times \pi/4) + 1000$$

计算域为 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq z < 1$,每套网格节点坐标在计算域内等概率随机生成, mesh1 节点数为 500 个, mesh2 节点数为 700 个, mesh3 节点数为 900 个, mesh4 节点数为 1100 个。

首先利用温度场分布函数求出在每套网格各节点处的温度值 T_1^i ,然后采用紧支径向基函数方法以一套网格中各节点处的温度值插值计算另一套网格中各节点处的温度值 T_2^i ,并与 T_1^i 进行对比。共分为 5 个实验组,组 1(G1)为 mesh1 插值 mesh2,组 2(G2)为 mesh2 插值 mesh3,组 3(G3)为 mesh3 插值 mesh4,组 4(G4)为 mesh1 插值 mesh3,组 5(G5)为 mesh1 插值 mesh4。

用计算机做 3 组界面网格计算,计算所采用的紧支半径为 0.2~0.7,列出每组的求解用时和节点平均相对误差,分别如表 2 和表 3 所示。

表 2 温度值插值计算时间

Tab. 2 Running time of temperature interpolation

分组	紧支半径					
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
G1	0.6718	0.9218	1.2343	1.7187	2.2968	2.8750
G2	1.8281	2.3906	3.2343	4.4218	5.7500	7.2343
G3	3.7187	4.7500	6.5000	8.8125	11.5468	14.5156
G4	0.7031	1.0156	1.4218	2.0468	2.7500	3.4843
G5	0.7500	1.0937	1.6250	2.3750	3.1875	4.1562

表 3 温度值插值平均相对误差

Tab. 3 Average error of temperature interpolation

分组	紧支半径					
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
G1	0.020906	0.020817	0.020752	0.020725	0.020713	0.020715
G2	0.020559	0.020452	0.020423	0.020432	0.020460	0.020505
G3	0.020959	0.020822	0.020764	0.020746	0.020751	0.020768
G4	0.020538	0.020463	0.020421	0.020424	0.020445	0.020480
G5	0.021046	0.020976	0.020927	0.020909	0.020908	0.020918

根据表 2 的内容可以看出:每一实验组内的插值计算时间随紧支半径的加大而增长;当插值网格节点数相同(G1、G4 和 G5)且紧支半径一定时,计算时间随被插值网格节点数的增加近似呈线性增长(如图 1 所示)且增长速度极小(斜率为 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 量级),这是由于大部分计算时间都耗费在求解式(7)上,被插值网格的节点数只影响将式(7)带入式(3)的计算过程;当被插值网格节点数相同(G2 和 G4,G3 和 G5)且紧支半径一定时,如图 1 所示,由于插值网格节点数的增大导致在紧支半径域内的节点数增多,而这些点的个数决定了式(7)中的系数矩阵的维数,因此计算时间随插值网格节点数的增大而显著增长。

由表 3 的内容可知:每一实验组内的插值平均误差随紧支半径的增大先减小后略有增加(如图 3 所示),这与文献[5]中流固耦合界面插值所获得的结论不同,说明采用紧支径向基函数方法在固体域内进行非匹配网格节点插值的精度并不是随紧支半径单调增加的,因此在计算时要对紧支半径进行优化以提高计算精度;在所有实验组中,插值计算的平均误差不超过 2.2%,能够满足一般工程计算的精度要求。

计算时间和平均误差分别如图 2、3 所示。图 2 中,各组插值的计算时间随紧支半径的增大呈加速上升趋势。图 3 中,G1 平均误差随紧支半径增大单调递减,G2 ~ G5 平均误差则先随紧支半径增大下降,当 $r > 0.5$ 后又略有上升。G5 中,插值网格节点数与被插值网格节点数之比为 $\lambda =$

$500/1100 = 0.4545$,在 5 组数据中最小,即在单位紧支域内已知信息节点数(mesh1 节点数)相对于未知信息节点数(mesh4 节点数)最少,故 G5 的平均误差最大。G1 ~ G4 误差曲线的分布并未严格按照插值网格节点数与被插值网格节点数之比与误差反相关的规律,说明对于固体域插值,计算精度与非匹配网格之间的节点分布影响较大,与流固耦合边界面插值的计算结果有一定区别^[9]。

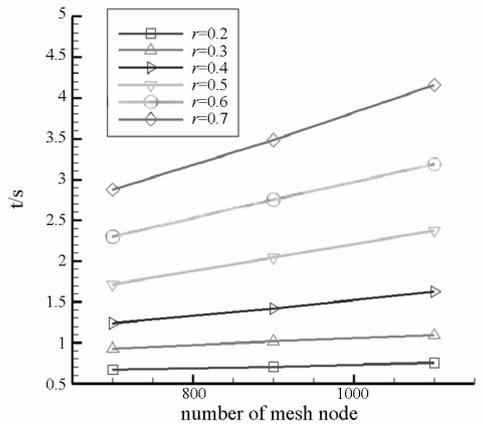


图 1 计算时间随被插值网格节点数的变化规律
Fig. 1 Relationship between running time and interpolated mesh nodes

综上所述,对于域耦合非匹配网格的插值计算,采用常用于流固耦合界面数据传递的紧支径向基函数方法,其计算时间主要受插值网格的节点个数及紧支半径的影响;与边界面数据插值的差异在于计算误差并不随紧支半径的增大而单调减小;在具体计算时,可以通过合理的紧支半径取

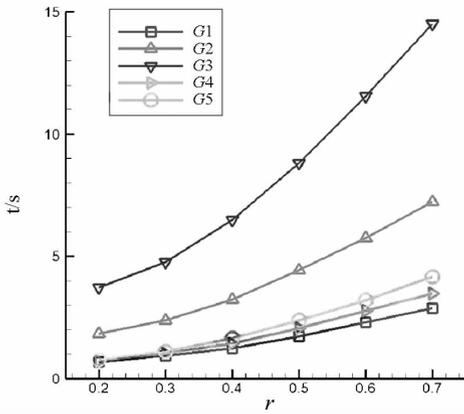


图 2 计算时间随紧支半径变化

Fig. 2 Relationship between running time and CSR

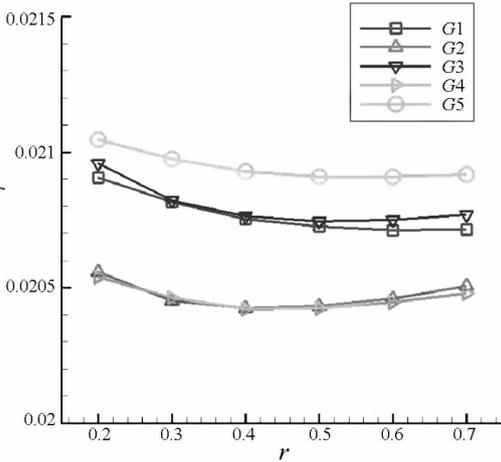


图 3 平均误差随紧支半径变化

Fig. 3 Relationship between average error and CSR

值及插值网格节点疏密度对计算时间和计算精度进行优化;总体上具有较高的精度,能够满足一般工程计算的误差要求。

3 结论

本文将流固耦合边界面数据交互的紧支径向基函数方法应用于以热-电耦合为代表的固体域耦合非匹配网格节点之间的数据传递。推导了紧支径向基函数的公式,并根据所推导的公式编制了数据接口程序。通过算例的计算验证了该方法在固体域耦合数据传递的应用,结果表明,该方法能够满足工程计算的精度要求,对于多场耦合计算具有较好的通用性,可以根据具体情况,选用合适的紧支半径和网格密度,以满足不同的计算效率和计算精度的要求。

参考文献 (References)

[1] 宋少云,李世其. 耦合场协同仿真中节点载荷插值的混合方法[J]. 计算机仿真, 2006, 23 (8): 73 - 75.
SONG Shaoyun, LI Shiqi. Mixed method of node load interpolation in collaborative simulation of coupled problem[J]. Computer Simulation, 2006, 23 (8), 73 - 75.

(in Chinese)

[2] 程兴华. 高超声速飞行器隔热壁板气动热弹性耦合建模与分析[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2012.
CHENG Xinghua. Coupled aerothermoelastic modeling and analysis of thermal protection panel for hypersonic vehicles[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012. (in Chinese)

[3] Goura G L, Badcock K J. A data exchange method for fluid-structure interaction problems[J]. The Aeronautical Journal, 2001; 215 - 221.

[4] 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
WU Zongmin. Model, algorithm and theory for scatter data fitting[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)

[5] 杜新伟, 杨孝英, 梁学章. 基于径向基函数的 3D 散乱数据插值多尺度方法[J]. 吉林大学学报(理学版), 2009, 47(5): 1039 - 1041.
DU Xinwei, YANG Xiaoying, LIANG Xuezhong. A multi-scale approach to 3D scattered data interpolation based on radial basis function [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2009, 47 (5); 1039 - 1041. (in Chinese)

[6] 缪报通, 陈发来. 径向基函数神经网络在散乱数据插值中的应用[J]. 中国科学技术大学学报, 2001, 31 (2): 135 - 142.
MIU Baotong, CHEN Falai. Applications of radius basis function neural networks in scattered data interpolation [J]. Journal of China University of Science and Technology, 2001, 31 (2); 135 - 142. (in Chinese)

[7] 魏义坤, 杨威, 刘静. 关于径向基函数插值方法及其应用[J]. 沈阳大学学报, 2008, 20 (1): 7 - 9.
WEI Yikun, YANG Wei, LIU Jing. Interpolation method of radial basis function and its application [J]. Journal of Shenyang University. 2008, 20 (1): 7 - 9. (in Chinese)

[8] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree[J]. Advances in Computational Mathematics, 1995, 4 (1): 389 - 396.

[9] 韩向科, 钱若军, 苏波, 等. 基于紧支径向基函数的流固交互作用数据传递[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2011, 39 (1): 48 - 52.
HAN Xiangke, QIAN Ruojun, SU Bo, et al. Data exchange method for fluid - structure interaction based on interpolation algorithm adopting compactly supported radial based function[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2011, 39 (1): 48 - 52. (in Chinese)

[10] Gelas A, Bernard O, Friboulet D. Compactly supported radial basis functions based collocation method for level-set evolution in image segmentation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16 (7): 1873 - 1887.

[11] Pan R J, Skala V. A two-level approach to implicit surface modeling with compactly supported radial basis functions[J]. Engineering with Computers, 2011, 27: 299 - 307.

[12] 于秋则, 曹矩, 柳健康, 等. 基于紧支撑径向基函数与共轭梯度法的大规模散乱数据快速曲面插值[J]. 电子与信息学报, 2005, 27 (2): 298 - 301.
YU Qiuzhe, CAO Ju, LIU Jiankang, et al. Rapid surface interpolation from massive scattered data using compactly supported radial basis functions and conjugate gradient method[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2005, 27 (2): 298 - 301. (in Chinese)

[13] 韩旭里, 庄陈坚, 刘新儒. 基于径向基函数与 B 样条的散乱数据拟合方法[J]. 计算技术与自动化, 2007, 26 (1): 63 - 65.
HAN Xuli, ZHUANG Chenjian, LIU Xinru. Algorithm of the scattered data approximating based on radical basis functions and B-spline [J]. Computing Technology and Automation, 2007, 26 (1): 63 - 65. (in Chinese)

[14] 王先泽, 李忠科, 张晓娟, 等. 特征保持的基于紧支径向基函数的点云简化[J]. 计算机工程与设计, 2013, 34 (1): 201 - 206.
WANG Xianze, LI Zhongke, ZHANG Xiaojuan, et al. Feature-preserving simplification of point cloud based on CSRBF [J]. Computer Engineering and Design, 2013, 34 (1): 201 - 206. (in Chinese)