

使用小波分层连通树结构的压缩信号重构*

张茜, 郭金库, 余志勇, 刘光斌
(第二炮兵工程大学, 陕西 西安 710025)

摘要:基于小波树模型的压缩感知可以通过较少的观测量得到鲁棒的信号重构,但采用最优树逼近时,则存在复杂度大的问题。在证明分层后的小波树仍然具备连通树性质的基础上,提出了基于小波分层连通树结构的压缩重构算法,在与原观测量一致的情况下,保证了重构精度并且提高了重构效率。实验结果表明,改进算法相对于原算法在处理大尺度数据时,效率有明显的改善。

关键词:压缩感知;信号重构;小波树模型;分层连通树

中图分类号:TN911.7 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2014)05-087-06

Compressive signal reconstruction using a hierarchical wavelet connected tree

ZHANG Qian, GUO Jinku, YU Zhiyong, LIU Guangbin

(The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: The model-based compressive sensing (CS) dictated that robust signal reconstruction was possible to obtain from fewer measurements, but the computational complexity of this approach was large while using the optimal tree approximation with wavelets. Based on the testified result that the wavelet hierarchical tree was still connected, the model-based wavelet hierarchical connected tree CS algorithm, was proposed. The proposed algorithm which has the equivalent measurements with that of model-based CS can enhance the signal-reconstruction efficiency and guarantee the signal-reconstruction accuracy. Numerical simulations demonstrate the validity of the new algorithm. Furthermore, the proposed algorithm has a distinct advantage when dealing with the mass of data.

Key words: compressive sensing; signal reconstruction; wavelet tree; hierarchical connected tree

压缩感知 (Compressive Sensing, CS) 理论由 Candés, Romberg, Tao 和 Donoho^[1-3] 等提出,该理论指出若一个信号可以在某个基上稀疏表示,则有可能从与此基函数不相关的另一个小的投影集中被重构。压缩感知理论突破了香农-奈奎斯特定理的限制,展现出广阔的前景,受到学者们的广泛关注^[4-5]。

最近研究发现,在信号的压缩重构问题中,利用除信号稀疏性外的其他特殊结构,能够降低稀疏或者可压缩信号的自由度,其重构效果远远优于只考虑稀疏性^[6-9]。分段光滑信号在实际中具有广泛应用^[10],其小波分解后的重要系数形成一个自然的“连通树”结构。针对分段光滑信号,文献[11]提出了基于小波树模型的压缩重构算法 (Tree-based Compressive Sensing, Tree-based CS),在仅需要 $M = O(K)$ 个观测量的情况下得到了鲁棒

的重构效果。该算法在采用基于小波树模型的 CoSaMP 算法进行信号重构时,每次迭代都要利用压缩分类选择算法 (Condensing Sort and Select Algorithm, CSSA) 进行 2 次模型逼近^[12-13]。压缩分类选择算法能够达到理论上的最优,但其计算复杂度比较大^[14],因此影响了整个重构算法的效率。

本文在基于小波树模型压缩重构算法的基础上,对文献[11]算法进行改进,主要对分层后的小波系数进行合理表示,分析并证明了分层后的小波系数仍符合连通树模型,并将其运用到分段光滑信号的压缩重构中,显著减少了运算复杂度。仿真实验表明了本文算法的有效性。

1 基于小波树模型的压缩重构算法

基于模型的压缩感知理论的基本思想是根据信号支集分布规律,减小信号结构的自由度,从而

* 收稿日期:2014-01-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61201120)

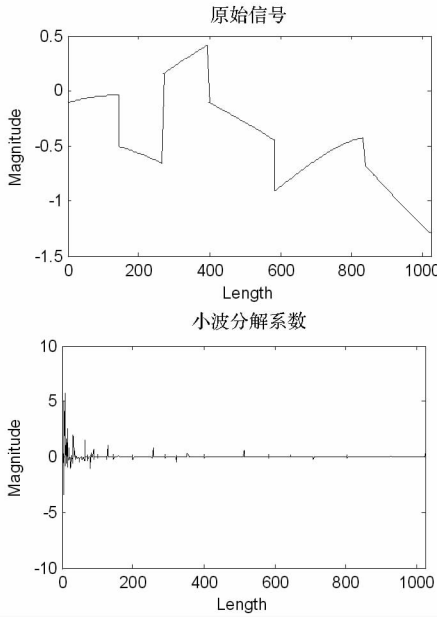
作者简介:张茜(1986—),女,山东德州人,博士研究生,E-mail:snmeg@163.com;

刘光斌(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:lgbisir@sina.com

达到降低观测量的目的。文献[11]证明,分段光滑信号的重要小波系数形成连通树结构,符合基于模型的压缩感知理论的要求。

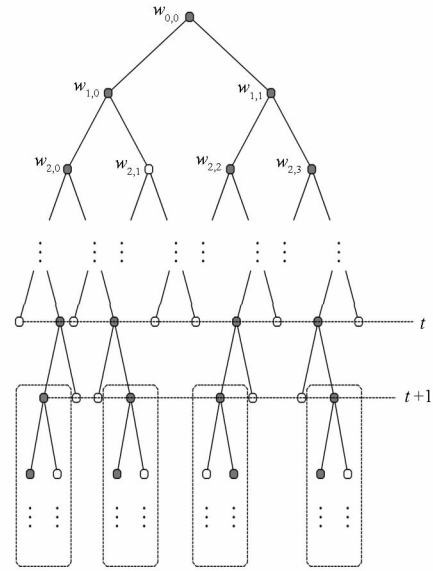
长度 $L=2^I$ (I 为正整数) 的原始分段光滑信号 S , 进行 I 尺度小波分解后, 其小波表示为:

$$S = v_0 v + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} w_{i,j} \psi_{i,j}$$



(a) 小波信号分解图示

图 1(a) 为原始信号及其小波分解系数示意图。图 1(b) 中, 小波系数 $w_{i,j}$ 构成一个深度为 I 的满二叉树结构 \mathbb{T} , 且相邻尺度间的小波系数间建立了父子关系, 称 $w_{i-1, \lfloor j/2 \rfloor}$ 为 $w_{i,j}$ 的父代, $w_{i+1,2j}$ 和 $w_{i+1,2j+1}$ 为 $w_{i,j}$ 的子代。在此二叉树结构中, 图中填充圆点表示重要系数, 其余为非重要系数。



(b) 小波树结构

图 1 小波树图示

Fig. 1 Wavelet tree

小波系数中的重要系数保留了信号的绝大部分信息, 因而可以作为信号的最优近似。文献[7]证明, 分段光滑信号的重要小波系数具有持续性, 即, 若小波系数 $w_{i,j}$ 为重要系数, 则其父代必然是重要系数, 从而导致重要小波系数集中在连通子树内。利用该性质, 文献[11]定义了小波连通树模型。

定义 1: K -稀疏小波树信号集合为:

$$T_K = \{x = v_0 v + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} w_{i,j} \psi_{i,j}; w|_{\Omega^c} = 0, |\Omega| = K, \Omega \text{ 形成连通子树}\} \quad (1)$$

其中, I 为小波树的层数, Ω 为其支集, i, j 为小波系数的层数和偏移量, T_K 亦称为小波连通树模型。

文献[11]采用压缩分类选择算法 (CSSA) 对小波树结构进行模型逼近。CSSA 的基本思想是在节点 (当小波树采用二叉树形式表示时, 也称小波系数为小波树的节点) 中进行贪婪搜索。首

先, 对于树中的每一个节点, 此算法计算以该节点为根的子树小波系数平均值的绝对值, 并把最大值作为该节点的能量。然后, 搜索没有被选择到的具有最大能量的节点, 并且把符合该节点最大能量的子树加入到估计的支集中, 作为一个超节点。CSSA 的运算复杂度为 $O(M \log N)$ 。

虽然 CSSA 能够达到理论上的最优逼近, 但其计算复杂度较大, 主要由两个原因造成: 一是该算法复杂度随着信号长度的增加呈非线性增长; 二是该算法每搜索到一个距树根较近的非单调变化的节点时, 都要计算以此节点为根的所有子树小波系数平均值的绝对值, 从而带来较大的运算开销。

根据以上分析, 如果将原 N 维向量分解成若干维数较低的向量分别进行处理, 在减少单个信号维度的同时, 显然也能够降低非单调变化节点出现的概率 (比如, 当非单调变化节点位于分层点时), 即便出现非单节点, 由于信号维度的降低, 其运算开销也会大大降低。

本文根据小波重要系数的持续性, 利用回溯

的思想,提出一种基于小波树结构的分解方法,对分解后的各分量进行合理表示,并通过论证得出各分量仍然可以利用基于小波树模型的压缩感知理论进行重构。

2 基于小波分层连通树结构的压缩重构算法

2.1 小波分层连通树结构表示

根据上节分析,将高维向量分解成多个低维向量可以降低运算复杂度,同时,为了应用基于小波树模型的压缩感知理论,期望各个分量也具有连通树性质。因此,首先对小波树进行分解,利用回溯的方法分析并证明了分解后的各分量符合连通树结构,最后应用基于小波树模型的压缩感知理论进行信号重构。

首先介绍本文对小波树的分解方法:

如图1所示,首先在第 t 层对小波树进行分层, $0 \rightarrow t$ 层节点形成 $t+1$ 层的满二叉树结构,记为 γ ;对于 $t+1$ 层以下(含 $t+1$ 层)节点,以 $w_{t+1,j}$ ($j=0,1,2,\dots,2^t$)为根的所有节点各自构成一棵满二叉树,记为 ξ_j ,则以 $w_{t+1,j}$ ($j=0,1,2,\dots,2^t$)为根的子树包含的节点为 $w_{t+1,j}, w_{t+2,2j}, w_{t+2,2j+1}, \dots, w_{L,2^{L-t-1}(j+1)-1}$ 。

为了分析各分量性质,首先利用回溯的方法证明以下两个推论:

推论1:在小波连通树结构中,以重要节点 $w_{i,j}$ 为起点向上回溯直到根节点 $w_{0,0}$,则所经过的所有节点均为重要节点。

证明:任取路径中的某一节点 $w_{a,b}$,假设其为非重要节点,则无法形成连通树结构,与重要小波系数形成连通树的条件矛盾,由此推论1成立。□

推论2:以小波树 t_1 层节点 $w_{t_1,j}$ 为根,位于 t_1 层和 t_2 层之间的节点($0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L$),构成一棵满二叉树 τ_j ,则有:①若 $w_{t_1,j}$ 为非重要节点,则 τ_j 只包含非重要节点;②若 $w_{t_1,j}$ 为重要节点,则 τ_j 包含的所有重要节点构成连通树。

证明:根据小波树的性质, τ_j 为满二叉树是显然的。

对于推论①,假设 τ_j 中包含重要节点,任取重要节点 $w_{a,b}$ 向上回溯到 $w_{t_1,j}$,由推论1,可得 $w_{t_1,j}$ 为重要节点,与 $w_{t_1,j}$ 为非重要节点的条件矛盾,因此推论①成立。

对于推论②,任取 τ_j 内重要节点 $w_{a,b}$ 向上回溯到 $w_{t_1,j}$ 处停止,根据推论1,其所经过的所有节点(含 $w_{t_1,j}$)均为重要节点, τ_j 内其他重要节点按

此方法回溯,有相同的结论,且所有重要节点回溯路径最后交于 $w_{t_1,j}$,构成连通树,问题推论②得证。□

根据推论2,直接可得 γ 包含的重要节点构成连通树结构。若 $w_{t+1,j}$ 为重要节点,则 ξ_j 内的重要节点构成连通树结构如图1(b)圆角矩形所示,否则 ξ_j 内节点全部为非重要节点。对于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j$,由满二叉树的性质可知,每一棵子树都不相交,且节点数相等。为了便于采样,进一步将 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j$ 依次排列组成矩阵 $\Xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j$ 。则矩阵 Ξ 结构如下:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \circ & \bullet & \cdots & \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \cdots & \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \bullet & \cdots & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \bullet & \circ & \bullet \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, \bullet 表示重要节点, \circ 表示非重要节点。

如此,原小波树就可以使用 γ 和矩阵 Ξ 表示。

为了将CSSA应用于上述各分量,重新定义 K -稀疏二叉树模型。

定义2: K -稀疏二叉树模型为:

$$T_K = \{x = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{2^i} w_{i,j} \psi_{i,j} : w_{i,j} = 0, |\Omega| = K, \Omega \text{ 形成连通子树} \} \quad (3)$$

其中, $w_{i,j}$ 表示小波系数, $\psi_{i,j}$ 表示小波系数对应的基函数, Ω 为二叉树的支集, K 为稀疏度。

根据文献[12],对于符合定义2的信号,同样可以使用CSSA对其进行逼近。

2.2 基于分层连通子树结构的重构算法

根据2.1节分析,提出基于小波分层连通子树结构的重构算法(H-Tree-based CS),算法描述如下:

1)将长度为 $L=2^l$ 的分段光滑信号 x 进行最大尺度的离散小波分解,即分解尺度为 $l=L$,根据信号小波分解的性质可知,经过最大尺度分解后小波系数的量级具有最强的衰减性,即为最稀疏的信号表示;

2)利用CSSA算法^[12]对分解后的小波系数进行最优树近似表示,其结果为只保留小波重要系数,非重要系数置为0;

3)在第 t 层对小波树进行分层, t 层(含 t 层)以上记为 γ , t 层以下可写成矩阵形式,记为 Ξ ,如式(2)所示,其中, t 通常取 $\lfloor L/2 \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下

取整;

4) 对 γ 压缩采样得到向量 $y = \Phi_1 \gamma$, 对 Ξ 采样得到矩阵 $Y = \Phi_2 \Xi$;

5) 利用基于树模型的 CoSaMP 算法对 γ 和 Ξ 分别进行重构, 得到 $\hat{\gamma}$ 和 $\hat{\Xi}$;

6) 利用 $\hat{\gamma}$ 和 $\hat{\Xi}$ 进行小波反变换, 得到重构信号 \hat{x} 。

2.3 计算复杂度分析

根据文献[11], 基于模型的压缩感知重构算法的计算复杂度主要取决于两方面因素: 一是重构所需的测量数目 M , 二是模型逼近的成本。由于本文算法与文献[11]算法测量数目量级一致, 从而由第一个因素带来的运算开销二者相同, 运算复杂度的差异主要决定于第二个因素, 下面重点就第二个因素进行分析。

根据文献[12], 利用 CSSA 进行模型逼近的计算复杂度为 $O(M \log N)$, 其中, N 为原小波树长度。即随着信号长度的增加, 其运算复杂度与信号长度呈非线性增长关系。本文提出的改进算法是将原小波树 T 分解成 J 个长度较短的子树 $\tau_j (j=1, 2, 3, \dots, J)$ 并分别进行处理, T 与 τ_j 的关系如式(4)所示:

$$\sum_{j=1}^J \|\tau_j\| = \|T\| \quad (4)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示信号长度, J 表示分解产生的子树的数量。

由式(4)可以看出原小波树 T 和分解后子树 $\tau_j (j=1, 2, 3, \dots, J)$ 的长度之和相等, 但 T 与子树 $\tau_j (j=1, 2, 3, \dots, J)$ 的运算复杂度均与各自长度呈相同的非线性增长规律。令 $S = \max\{\|\tau_j\|, j=1, 2, 3, \dots, J\}$, 则本文算法的计算复杂度为 $O(\text{Slog}S)$ 。由上述可知, 本文算法复杂度小于文献[11]的算法复杂度。特别地, 当 $J=1$ 时, 本文算法退化为文献[11]算法。

通过上述分析, 本文算法复杂度小于文献[11]的算法复杂度。然而, 分层参数 t 直接影响改进算法计算复杂度, 使本文算法复杂度最小所对应的最优分层数 $t = \lfloor I/2 \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整, 以下即在理论上分析并证明该参数取值的合理性。证明过程如下:

首先, 确定在第 t 层对原小波树进行分解, 其分解后的最大向量长度为 $\max(\|\gamma_t\|, \|\Xi_{t,(\cdot, i)}\|)$, 当在第 t 层进行分层时, $\|\gamma_t\| = 2^t$, $\|\Xi_{t,(\cdot, i)}\| = 2^{t-1} - 1$, 显然, 若使算法有意义, 必有 $t \geq 1$ 。当 I 为偶数时, $I = 2t$,

$$\|\gamma_t\| - \|\Xi_{t,(\cdot, i)}\| = 2^t - (2^{t-1} - 1) = 1 > 0$$

当 I 为奇数时, $I = 2t + 1$,

$$\begin{aligned} \|\gamma_t\| - \|\Xi_{t,(\cdot, i)}\| &= 2^t - (2^{t-1} - 1) \\ &= 2^t - 2^{t-1} + 1 \\ &= 1 - 2^t < 0 \end{aligned}$$

因此, I 为偶数时, 恒有 $\|\gamma_t\| > \|\Xi_{t,(\cdot, i)}\|$, I 为奇数时, 恒有 $\|\gamma_t\| < \|\Xi_{t,(\cdot, i)}\|$ 。

然后, 讨论并证明使算法复杂度最小的参数 $t = \lfloor I/2 \rfloor$ 的合理性。假设在第 t_1 层分层, 则 $\|\gamma_{t_1}\| = 2^{t_1}$, $\|\Xi_{t_1,(\cdot, i)}\| = 2^{t_1-1} - 1$, 以下分 $t_1 < t$ 和 $t_1 > t$ 两种情况进行讨论。

1) 当 $t_1 < t$ 时, 若 I 为偶数, 因为 t 和 t_1 均为正整数, 所以 $t - t_1 \geq 1$, 由 $I = 2t$, 则

$$\begin{aligned} \|\Xi_{t_1,(\cdot, i)}\| - \|\gamma_t\| &= 2^{t_1-1} - 1 - 2^t \\ &= 2^t (2^{t-t_1} - 1) - 1 \\ &\geq 2^t - 1 > 0 \end{aligned}$$

若 I 为奇数, 由于 $I - t_1 > I - t$, 则

$$\begin{aligned} \|\Xi_{t_1,(\cdot, i)}\| - \|\Xi_{t,(\cdot, i)}\| &= 2^{t_1-1} - 1 - (2^{t-1} - 1) \\ &= 2^{t_1-1} - 2^{t-1} > 0 \end{aligned}$$

由上述可知, 当 $t_1 < t$ 时, 改进算法在第 t_1 层分层后能找到一个向量大于 $\max(\gamma_t, \Xi_{t,(\cdot, i)})$ 。

2) 当 $t_1 > t$ 时, 若 I 为偶数, 有

$$\|\gamma_{t_1}\| - \|\gamma_t\| = 2^{t_1} - 2^t > 0$$

若 I 为奇数, 因为 t_1 和 t 都为正整数, 所以 $t_1 - t \geq 1$, 即 $2^{t_1} \leq 2^{t+t}$, 再由 $I = 2t + 1$, 则有

$$\begin{aligned} \|\gamma_{t_1}\| - \|\Xi_{t,(\cdot, i)}\| &= 2^{t_1} - (2^{t-1} - 1) \\ &= 1 + 2^{t_1} - 2^{t+t} \\ &\geq 1 > 0 \end{aligned}$$

由上述可知, 当 $t_1 > t$ 时, 改进算法在第 t_1 层分层后能找到一个向量大于 $\max(\gamma_t, \Xi_{t,(\cdot, i)})$ 。

综上所述, 在 $t_1 < t$ 和 $t_1 > t$ 的情况下, 若在第 t_1 层进行分层后均能找到一个向量大于 $\max(\gamma_t, \Xi_{t,(\cdot, i)})$, 即证明了在第 $t = \lfloor I/2 \rfloor$ 层进行分层时改进算法的计算复杂度最小。

本文算法采用分解思想对小波树进行处理, 即先将原 N 维向量分解成若干维数较低的向量, 再将分解后的下层各向量合并成矩阵 Ξ , 最后分别对上层向量 γ 和下层矩阵 Ξ 进行观测并重构。同时, 在理论上证明了改进算法具有低复杂度及对应参数最优取值的合理性。

3 仿真实验

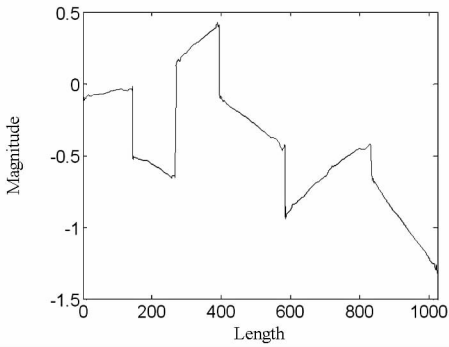
本节对文献[11]中基于小波树模型的压缩感知重构算法(Tree-based CS)和本文算法(H-Tree-based CS)性能进行比较。为了验证改进算

法的有效性,采用3次多项式分段光滑信号进行仿真测试,设置5个间断点,选用 Daubechies - 4 小波作为小波基函数,利用共轭梯度法 (conjugate gradients) 求解,最大迭代次数设为 20 次。

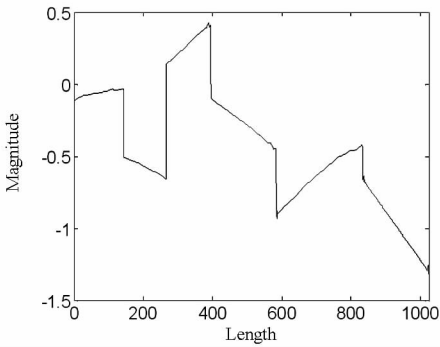
3.1 重构效果比较

首先分别采用改进前后的两种算法对长度 $L = 2^{10}$ 的同一信号进行重构,观测量取 $M = 3K$,其中 K 表示信号稀疏度。

图 2 为改进前后两种算法针对图 1 中的原信号进行单次重构的效果比较。从图中可以看出,改进后算法重构误差为 0.012212,小于文献 [11] 算法的重构误差 0.043496。



(a) 原算法 $MSE = 0.043496$



(b) 改进算法 $MSE = 0.012212$

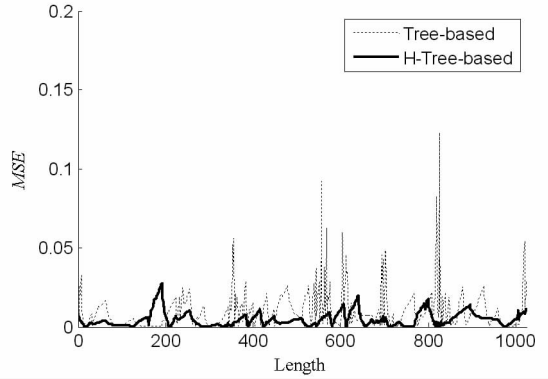
图 2 重构效果比较

Fig. 2 Comparison of reconstruction performance

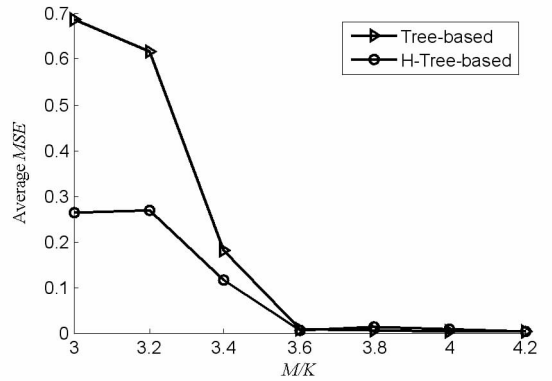
图 3(a) 为两种算法下信号单次重构误差比较,取原信号与重构信号差的绝对值作为测量指标。经比较发现,改进后的算法重构误差较低且整体错误水平较为稳定。

图 3(b) 显示了两种算法中当 M/K 递增时平均重构误差比较,对同一个信号在不同的 M 取值处分别进行 200 次蒙特卡洛实验,取重构误差的平均值。经比较发现,当 M/K 较小时,即观测量较少时,改进算法相对原算法可以获得较高的重构精度。

本文算法具有较小的重构误差主要有两方面原因:一是改进后的算法对小波系数进行了分层



(a) 单次信号重构误差



(b) 平均重构误差

图 3 信号重构误差比较

Fig. 3 Comparison of signal reconstruction error

处理,由于重要子树的长度较短,使算法的搜索空间变小,更有利于共轭梯度法在有限的迭代次数内准确拟合;二是本文算法对原小波树进行了分解,分解后的各子树均采用文献 [11] 中观测量的计算方法,但是对于矩阵 Ξ 中各向量的稀疏度,取矩阵 Ξ 中向量稀疏度最大值作为每个向量的稀疏度,导致观测量高于原算法中的观测量。因此,本文提出的改进算法保证了重构的精度。

3.2 计算时间比较

1) 为了验证改进算法的时效性,分别随机生成长度为 $L = 2^9, L = 2^{10}, L = 2^{11}, L = 2^{12}, L = 2^{13}$ 的信号,对每个信号进行 50 次蒙特卡洛仿真实验,取运行时间的平均值,结果如图 4 所示。

从图 4 中可以看出改进后的算法在效率方面较原算法有很大的提高,尤其是在信号长度增加的情况下,这种优势更为突出。原因是随着信号长度的增加,CSSA 算法计算复杂度都呈非线性增长,且当搜索到一个距树根较近的非单调变化的节点时,都要计算以此节点为根的所有子树小波系数平均值的绝对值,进一步增加了计算复杂度。而改进后的算法对小波树模型进行分层处理:一是通过减少各个小波子树的层数降低了计

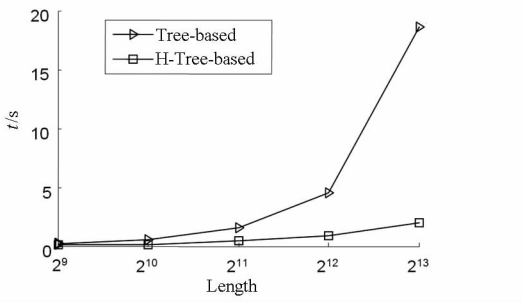


图 4 运行时间比较

Fig. 4 Efficiency comparison of the two methods

算复杂度;二是减少了非单调变化大系数出现的可能性。这种分解的思想在处理大尺度信号时效果更为明显。

2) 为了验证当分层数 t 取 $\lfloor I/2 \rfloor$ 时算法的总体复杂度最小,分别利用长度为 2^{13} 和 2^{12} 的信号做蒙特卡洛仿真实验。针对不同的分层数做了 50 次仿真实验,取运行时间的平均值,实验结果如图 5 所示,在结果中可以看出最小的平均运行时间均出现在分层数为 6 的情况下,由此进一步验证了改进算法计算复杂度的理论分析的正确性。

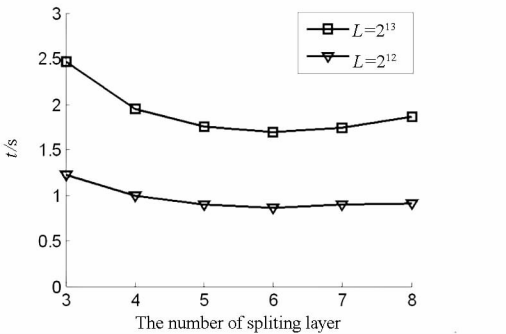


图 5 不同分层位置的运行时间比较

Fig. 5 Efficiency comparison of the two methods in different splitting layers

4 结论

本文研究了分段光滑信号小波分解系数的性质,分析证明了其系数具有分层连通树结构,并基于模型压缩感知理论,提出基于上述结构的压缩重构算法。这种分层处理的方法降低了运算复杂

度,从而有效提高了重构效率。仿真证明了本文算法的有效性。

参考文献 (References)

- [1] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2):489 - 509.
- [2] Candès E. Compressive sampling [C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2006:1433 - 1452.
- [3] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289 - 1306.
- [4] Theodoridis S, Kopsinis Y, Slavakis K. Sparsity-aware learning and compressed sensing: an overview [J]. arXiv preprint arXiv:1211.5231, 2012.
- [5] Kutyniok G. Theory and applications of compressed sensing [J]. arXiv preprint arXiv:1203.3815, 2012.
- [6] He L H, Carin L. Exploiting structure in wavelet-based Bayesian compressive sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9):3488 - 3497.
- [7] Duarte M, Wakin M, Baraniuk R. Wavelet domain compressive signal reconstruction using a hidden Markov tree model [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008:5137 - 5140.
- [8] Crouse M, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(4):886 - 902.
- [9] Zhao Y, Zhuang X, Dai Z, et al. Wavelet compressive sampling signal reconstruction using upside-down tree structure [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2011. DOI: 10.1155/2011/606974.
- [10] Mallat S. A wavelet tour of signal processing [M]. Academic press, 1999.
- [11] Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, et al. Model-based compressive sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(4):1982 - 2001.
- [12] Baraniuk R G. Optimal tree approximation with wavelets [C]//Proceedings of International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation, 1999: 196 - 207.
- [13] Baraniuk R G, Jones D L. A signal-dependent time frequency representation: fast algorithm for optimal kernel design [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(1):134 - 146.
- [14] Baraniuk R G, DeVore R A, Kyriazis G, et al. Near best tree approximation [J]. Advances in Computational Mathematics, 2002, 16(4): 357 - 373.