

应用径向基代理模型实现序列自适应再采样优化策略*

武泽平,王东辉,杨希祥,江振宇,张为华
(国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘要:针对径向基插值代理模型样本点预测误差为零时无法获得误差函数进行序列再采样优化的问题,将样本点分布约束引入序列再采样过程,利用潜在最优解加速收敛性,提出一种适用于径向基插值代理模型序列优化的再采样策略,该策略兼顾仿真模型的输出响应特性与样本点的空间分布特性。仿真结果表明,使用该再采样策略后,算法寻优效率和精度均优于传统基于代理模型的优化方法,在对最优解进行有效预测的同时,能显著减少原始模型计算次数。

关键词:径向基插值;代理模型;序列优化;再采样策略

中图分类号:V421.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2014)06-018-07

Adaptive resampling strategy of sequential optimization based on radial basis function surrogate model

WU Zeping, WANG Donghui, YANG Xixiang, JIANG Zhenyu, ZHANG Weihua

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Taking account of that it is difficult to obtain the error function to make sequential re-sampling optimization when the predicted error of sampling points in radial basis function(RBF) interpolation surrogate model is zero, the constraint of sampling point distribution was applied in the process of sequential re-sampling. Taking advantage of the convergence performance of potential optimal solution, a re-sampling strategy which is suitable for the sequential optimization of RBF interpolation surrogate model was proposed. The strategy matches the input response property of emulation model with the spatial distribution property of sampling points. Simulation results indicate that the optimization efficiency and precision of the proposed strategy is higher than that of the traditional optimization method based on surrogate model. The optimum point can be well predicted and the number of computational times in primitive model can be reduced obviously by the proposed strategy.

Key words: radial basis function interpolation; surrogate model; sequential optimization; resampling strategy

优化设计是在满足设定的性能指标和约束条件的前提下,寻求能够使系统性能最优的设计变量组合。飞行器优化设计过程通常需要多次调用复杂分析模型,为了在保证精度的同时尽可能降低计算成本,往往采用计算效率较高的代理模型替代复杂分析模型^[1-2]。代理模型基本思想是在一定的精度条件下,用一个简单逼近函数近似替代复杂高精度性能分析模型,利用已知点(样本)的响应信息来预测未知点响应值。代理模型的构造在数学上可以通过拟合与插值来实现^[3]。Jin等^[4]利用14个代表不同类型问题的算例对多项式回归、多变量自适应回归样条、径向基函数以及Kriging方法4种代理模型方法进行系统对比后发现,在同时考虑模型精度和鲁棒性时,径向基函数模型是最为可靠的。

基于代理模型的优化方法主要包括试验设计获取样本点、计算样本点的响应值并通过近似建模方法构造代理模型和基于代理模型进行优化分析等步骤^[1,5]。为了提高分析精度,序贯采样的方法得到了广泛的应用。再采样过程中合理采样策略能够提升算法对最优解的预测性能^[1,6]。目前常用的再采样策略主要有^[5]:EI准则^[7]、潜在最优加点准则、最大曲率准则等。EI准则由Jones^[7]提出,主要基于近似误差和目标函数上界的估计进行加点,但上界的估计过度依赖于经验;潜在最优加点准则有较快的收敛速度,但很容易陷入局部最优。

1 径向基插值基本原理

径向基函数方法本质上是采用一元函数来对

* 收稿日期:2014-04-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51105368);国防科技大学学校科研计划资助项目(JC12-01-05)

作者简介:武泽平(1990—),男,山西临县人,博士研究生,E-mail:zeping90315@126.com;

江振宇(通信作者),男,副研究员,博士,硕士生导师,E-mail:798095447@qq.com

多元函数进行描述,其在多变量插值中发挥着重要作用^[8]。径向基插值可以表示为

$$s(x) = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(r_k) \quad (1)$$

式中, N 为采样点个数, w_k 为每个样本点的权系数, $\varphi_k(r_k)$ 为基函数。其中 r_k 表示某点 x 距中心点 x_k 的距离(通常为欧氏距离),即:

$$r_k = \|x - x_k\| \quad (2)$$

将 x_k 的响应值 y_k 代入式(1),得

$$s(x_k) = y_k = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(r_{ik}), (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

式(3)中, $\varphi_k(r_{ik})$ 为基函数,常用的基函数形式有:

Gauss 函数—— $\varphi(r) = e^{-\frac{r^2}{c^2}}$;

Multiquadric 函数—— $\varphi(r) = (r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$;

逆 Multiquadric 函数—— $\varphi(r) = (r^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 。

式中, r_{ik} 为 x_i 距中心点 x_k 的欧氏距离, c 为形状参数,当基函数为 Gauss 函数时,形状参数通常取

$$c = \frac{d_{\max}}{\sqrt{m\sqrt{N}}}$$

上式中, d_{\max} 为采样点之间的最大距离, m 为设计变量的个数。已经证明,在采样点两两不同时,式(3)有唯一解,即可求得权系数 w_k 和代理模型 $s(x)$ 。

由于径向基函数的非线性泛化能力较强,而对线性函数的近似精度较差,因此在计算过程中引入线性修正项,此时的径向基函数插值形式为:

$$s(x) = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(r_k) + \lambda_0 + \sum_{j=0}^m \lambda_j x_j \quad (4)$$

式(4)中, λ_0 为常数项。通常先利用最小二乘法得到 $\lambda_j (j = 0, 1, \dots, m)$,再用径向基函数插值得出 $\sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(r_k)$,即可得到经过所有采样点的径向基插值代理模型。

2 基于径向基插值代理模型的序列优化方法

基于代理模型进行优化设计的过程中,采样点越多,代理模型越精确,但需要调用的高精度分析的次数也会随之增加,序贯近似建模方法通过权衡训练样本数量和近似精度,得到精度与效率折中的代理模型^[1]。其主要流程如图 1 所示。采样策略主要包括从已知样本集中选择^[9]和直接选择两种。直接选择过程中,采样点集中加入

新点后对样本点集均匀散布特性进行优化^[10](主要包括极大化最小距离、极小化相关系数、极大化熵等准则),找到最优采样点,再次调用原始计算模型,并将其计算结果添加到训练样本中,重新构造输入-输出代理模型。再采样过程中不进行优化分析,不能有效利用前期代理模型信息指导寻优过程,且需要额外的验证样本来对代理模型进行验证,增加了耗时的分析模型计算次数。

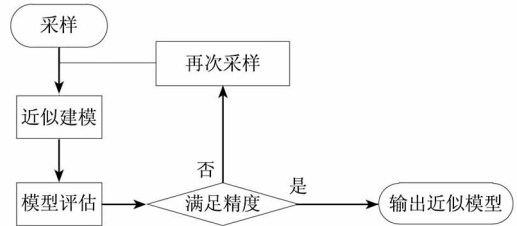


图 1 序贯近似建模流程

Fig. 1 General process of sequential approximate modeling

序列优化是在代理模型构造过程中,充分利用前期代理模型的信息进行合理加点,能够利用每次构造的代理模型信息来指导下一次的采样。每次将新的样本点加入到训练样本集后进行优化分析,根据当前的分析结果寻找最可能接近全局最优解的点加入到样本集中,进行下一轮迭代。算法流程如图 2 所示。

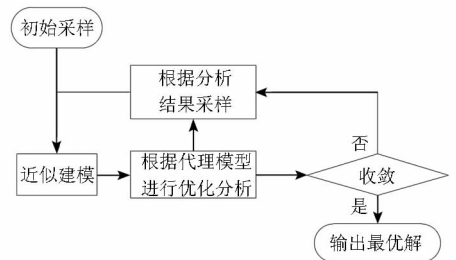


图 2 序列优化流程图

Fig. 2 Flow chart of sequential optimization

在基于代理模型的优化设计过程中,关心的往往是代理模型对最优解及其附近函数特性进行准确预测的能力,而对全局的近似精度要求并不是很苛刻,所以可以适当放宽全局的近似精度以保证对最优解附近区域的高精度近似。

3 序列优化中的再采样策略

在已有的序贯采样策略中,对模型的响应特性考虑不足,仅考虑了采样点的空间分布特性。文献^[7]提出,把潜在最优解(前期代理模型的最优解)加入到样本集中重新构造代理模型从而提高模型响应特性,这种方法可使局部近似能力增加迅速,很快收敛到局部最优,但一旦陷入局部最优则很难跳出局部最优再进行全局搜索。方法应

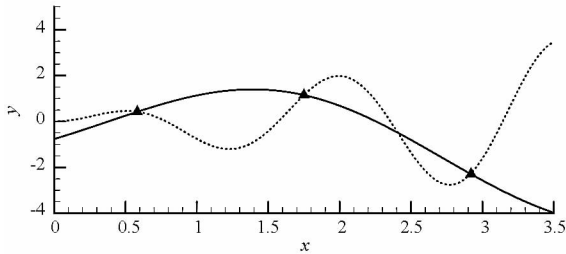
用示例如图 3 所示,对于优化问题

$$f(x) = x \sin(4x) \rightarrow \max$$

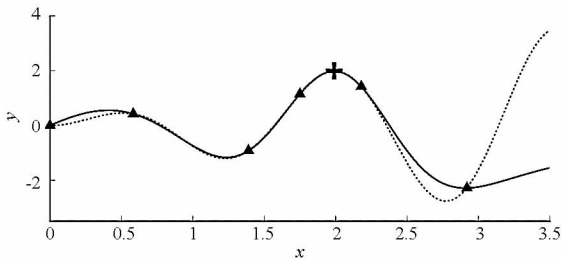
$$(0 \leq x \leq 3.5)$$

设初始采样点个数为 3,后续加点过程中将代理模型的最优点加入到训练样本中重新构造代理模型。

由图 3 可知函数的全局最优点为 $f(3.5) = 3.4671$,而潜在最优解序列加点优化结果将收敛于局部最优 $f(1.9947) = 1.9792$ 。由图 3 可得,潜在最优解策略一旦寻得局部最优,算法将会迅速收敛于局部最优,不具备向未知空间探索进而找到全局最优解的能力。这种方法仅考虑样本空间分布特性的采样策略,忽略了优化的目的是对最优解进行预测这一问题,对设计空间一视同仁,在采样点不断增加过程中,尽管可以对全局进行有效近似,但却带来了大量无效的计算。



(a) 初始代理模型



(b) 最终代理模型

(.....精确模型 —代理模型 ▲采样点)

图 3 潜在最优解序列加点优化结果

Fig. 3 Result of potential optimum solution optimized by resampling points to sequence

本文提出一种有效再采样策略,同时兼顾全局近似能力和算法收敛速度。对采样点空间分布特性描述的量化指标有极大极小距离准则 φ_p , 中心化偏差准则 CL_2 , 最大列相关系数 ρ_{\max} 等^[11-12]。考虑到径向基插值过程中如果样本点间距太小,会导致系数矩阵条件数过大,出现龙格现象,影响插值的稳定^[13]。因此,将极小距离准则 φ_p 作为目标进行优化。模型的量化指标就是目标函数 $f(x)$ 本身。再采样通过如下优化问题求解来实现:

$$\begin{cases} \max: s^{(n)}(x) \\ \text{s. t. } x \in X \\ d(x) \geq \delta \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中, δ 为最小距离约束阈值,选择合适的 δ 对采样结果有重要影响,进而影响整个序列优化的求解效率。

在进行优化的初期,采样点较为稀疏,代理模型可能不够精确,不足以反映函数在整个设计空间的变化规律,此时希望新的采样点能够偏向于探索,在未采样的区域进行采样,提高更新后代理模型的全局近似精度,因此最小距离约束 δ 应该适当取大。在优化问题进行的后期,随着采样点的不断加入,代理模型不断得到更新,其全局近似精度不断提高,此时应更关注代理模型对最优解的表征特性以及算法的收敛性,因此,应当减小最小距离约束 δ ,使采样点在最优解附近集中,进一步增加函数在最优解附近的近似精度。而对于其他区域则可适当放宽其精度要求以实现快速收敛,若此时再对其他区域和最优解附近同等对待则会增加大量不必要的计算,降低优化效率。 δ 的调整方法如式(6)所示:

$$\delta = \min(\sqrt{(x_i - x_j)^T(x_i - x_j)})$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j) \quad (6)$$

式中, N 为采样点个数, x_i, x_j 为采样点的坐标,开始优化时采样点较少,采样点之间的最小距离较大,使得新的采样点可以向未知区域探索,采样点个数增加到比较多时,之间的距离就会减小,可以实现向最优区域搜索,因此采用式(6)所示的最小距离约束可以使根据式(5)所得到的新采样点具有自适应特性。

基于本文自适应再采样策略的序列优化过程如下:

- 1) 采样点 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$, 初始约束下限 d , 最大加点个数 n_{\max} ;
- 2) 计算采样点的响应, 构造初始代理模型 $s(x)$;
- 3) 寻找代理模型 $s(x)$ 全局最优点 $x_{\text{opt},i}$, 若 $i = n_{\max}$, 则输出 $x_{\text{opt},i}$, 算法终止; 若 $x_{\text{opt},i} = x_{\text{opt},i-1}$, 则转步骤 4, 否则, 转步骤 6;
- 4) 若 $s_i(x_{\text{opt},i}) = s_{i-1}(x_{\text{opt},i})$, 转步骤 5, 否则, 转步骤 6;
- 5) 若 $s_i(x_{\text{opt},i}) = f(x_{\text{opt},i})$, 算法终止, 否则, 计算响应 $f(x_{\text{opt}})$, 将 $(x_{\text{opt}}, f(x_{\text{opt}}))$ 加入样本集, 转步骤 6;
- 6) 以 $\varphi_p(x)$ 大于约束下限 d 为约束对 $s(x)$ 进行优化, 寻找代理模型最优解 x_{opt} 。计算响应 $f(x_{\text{opt}})$, 将 $(x_{\text{opt}}, f(x_{\text{opt}}))$ 加入到训练样本集中并调整约束下限 d ;
- 7) 基于新的样本集, 构造代理模型 $s_{i+1}(x)$,

转到步骤2。

算法流程如图4所示。

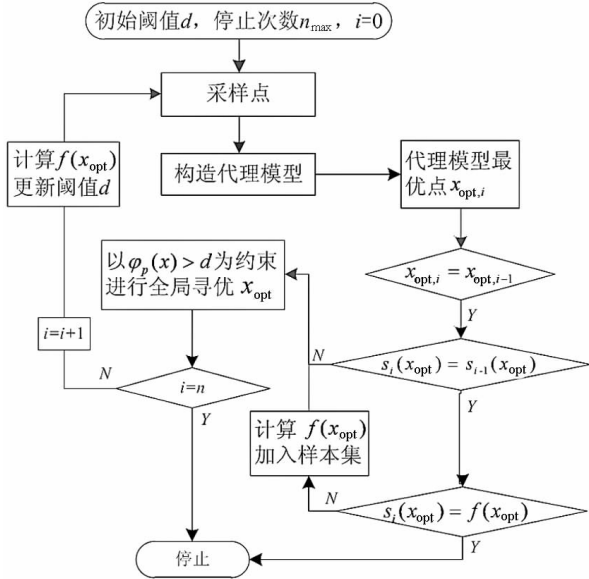
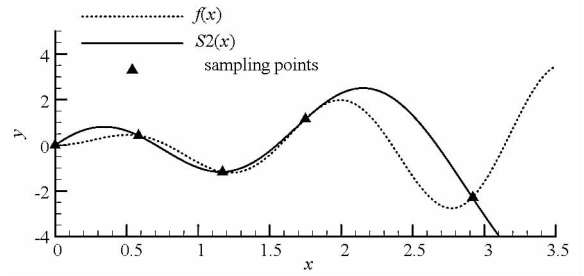


图4 改进序列近似优化流程图

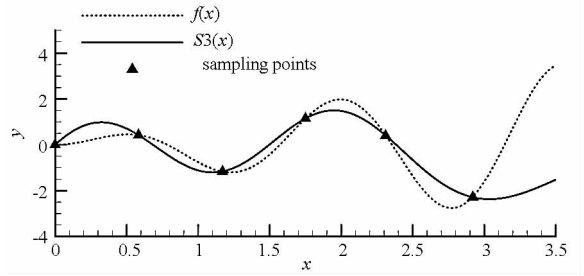
Fig.4 Flow chart of enhanced sequential optimization

在序列优化过程中,约束下限自适应地调整,每次加点后,约束下限调整为所有样本点中的最小距离。这可以使算法在优化前期有较强的全局搜索能力,后期减小约束,便于算法向最优解收敛。加点过程如图5所示。

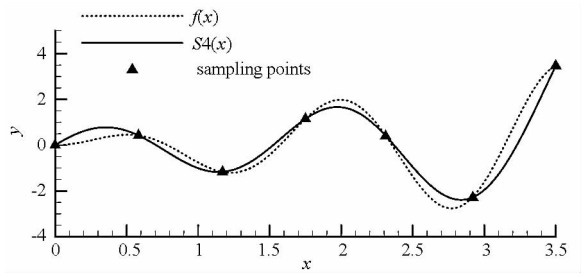
图5逐步展示了采样点和代理模型的更新过程,由于引入了最小距离约束,采样点并没有在局部最优解附近聚集。由图5可知,第5次采样后,已经可以找到最优解,但不收敛,继续增加采样点,采样点逐渐收敛于最优解,说明通过同时将距离和目标函数最大化,可以有效避免收敛于局部最优。



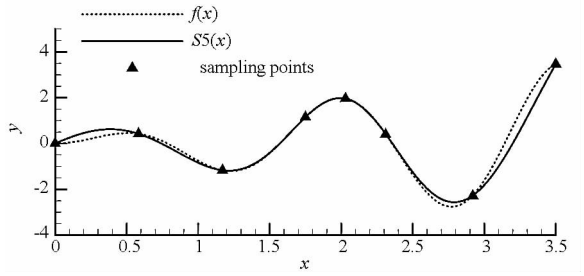
(c) 第二次加点



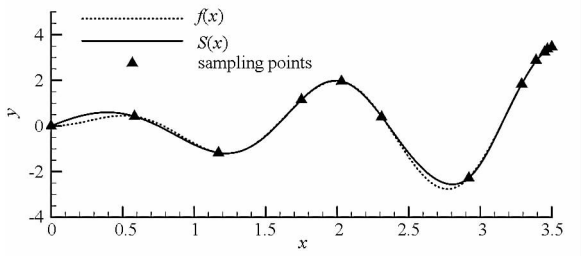
(d) 第三次加点



(e) 第四次加点



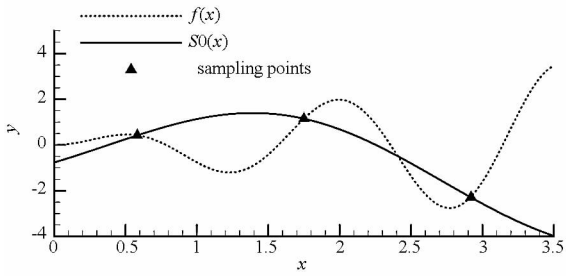
(f) 第五次加点



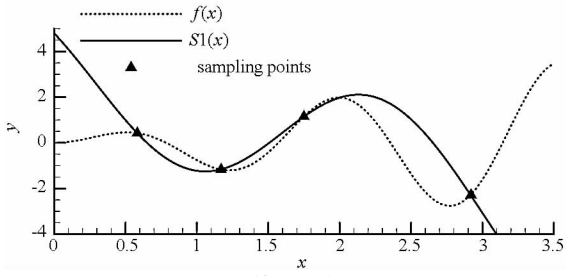
(g) 最终代理模型和采样点

图5 约束样本距离的加点策略

Fig.5 Resampling strategy with distance of sampling points constrained



(a) 初始代理模型



(b) 第一次加点

4 算法验证

4.1 数学测试算例

针对多约束优化问题,在基于代理模型优化过程中,由于所有的约束也是通过计算模型给出,

并不是显式约束,所以必须对所有的约束和目标函数一起构造相应的代理模型,再进一步进行优化分析。对多约束标准算例^[14]:

$$\begin{aligned}
 & f(x) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 0.5)^2 \rightarrow \min \\
 \text{s.t. } & g_1(x) = \frac{[(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 2)^2] \exp(-x_2^7)}{12} - 1 \leq 0 \\
 & g_2(x) = (10x_1 + x_2)/7 - 1 \leq 0 \\
 & g_3(x) = \frac{(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2}{0.2} - 1 \leq 0 \\
 & 0 \leq x \leq 1
 \end{aligned} \tag{7}$$

函数图像如图 6 所示。可行域是两个离散的区域,有一个局部最优解

$$f(0.2623, 0.1223) = -0.6867$$

和一个全局最优解

$$f(0.2016, 0.8332) = -0.7484$$

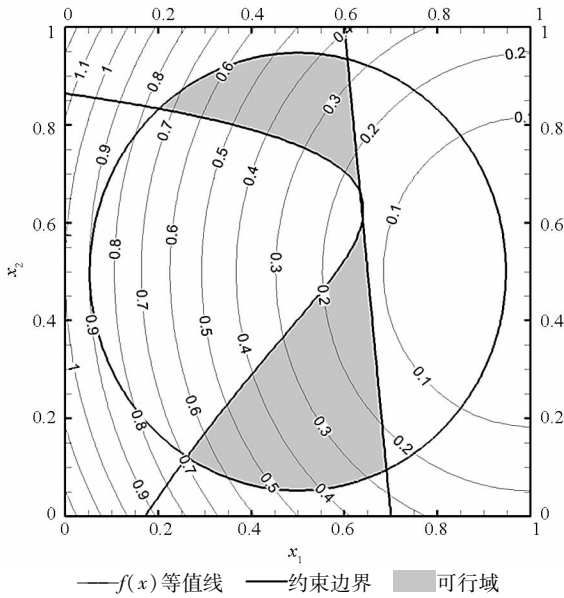


图 6 算例 1 可行域图像

Fig. 6 The feasible region of case 1

序列优化的初始采样点个数取为 5,采用优化拉丁超立方采样^[15],初始采样点和初始代理模型如图 7 所示。

序列加点个数上限为 25,最终优化结果为:

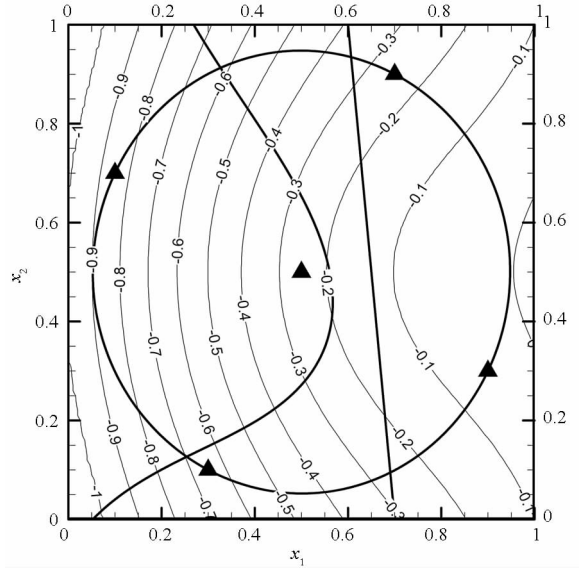
$$\begin{aligned}
 & x = (0.2019, 0.8332)^T \\
 & f(x) = -0.7479 \\
 & g_1(x) = -0.0002 \\
 & g_2(x) = -0.5925 \\
 & g_3(x) = -0.0005
 \end{aligned}$$

所有采样点分布和最终代理模型如图 8 所示。

Kitayama^[14]在对本算例进行序列优化过程中加点 35 个时,算法收敛于

$$x = (0.2024, 0.8327)^T$$

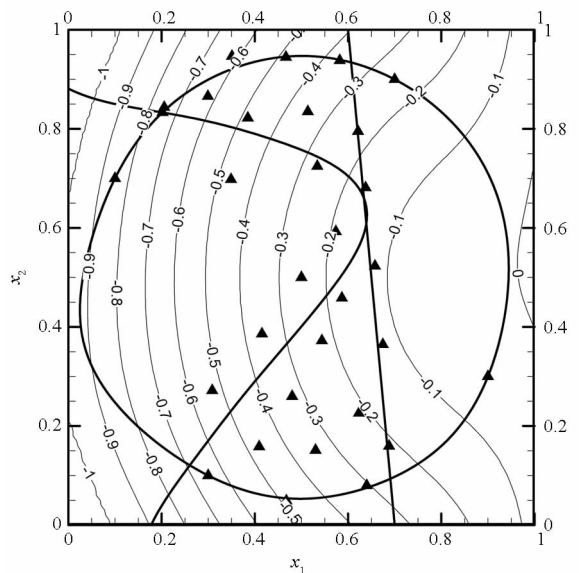
$$\begin{aligned}
 & f(x) = -0.7468 \\
 & g_1(x) = -0.0000 \\
 & g_2(x) = -0.5919 \\
 & g_3(x) = -0.0000
 \end{aligned}$$



—f(x)等值线 —约束边界 ▲采样点

图 7 算例 1 初始采样点与代理模型

Fig. 7 The initial surrogate model and sampling points of case 1



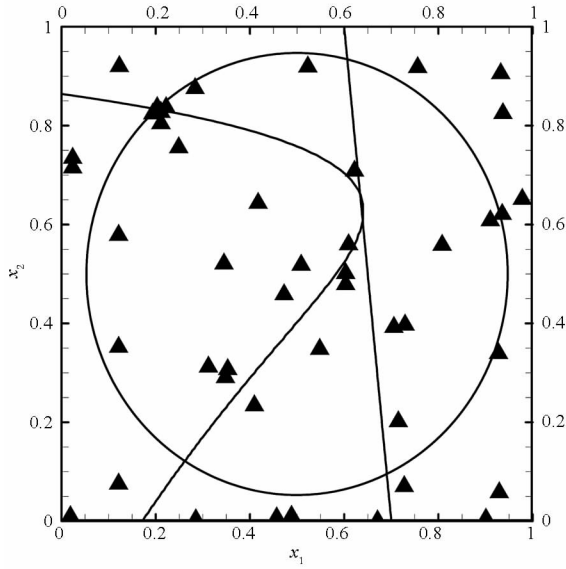
—f(x)等值线 —约束边界 ▲采样点

图 8 算例 1 所有采样点及最终代理模型

Fig. 8 Final surrogate model and sampling points of case 1

加上限取 50,所有采样点的分布如图 9 所示。

优化设计的目标应该是最优点尽量远离约束边界,文中的搜索结果在性能上略优于 Kitayama 的结果,约束距离边界也比 Kitayama 的结果要略远。



—约束边界 ▲采样点

图9 Kitayama 的采样结果

Fig. 9 The sampling results of Kitayama

与 Kitayama 的采样点相比,本文的采样点的分布更靠近可行域,除初始采样点外,序列加点过程中添加的点均在可行域附近,因此提高了可行域内的近似精度,从而得到了性能更优的解。

4.2 工程优化算例

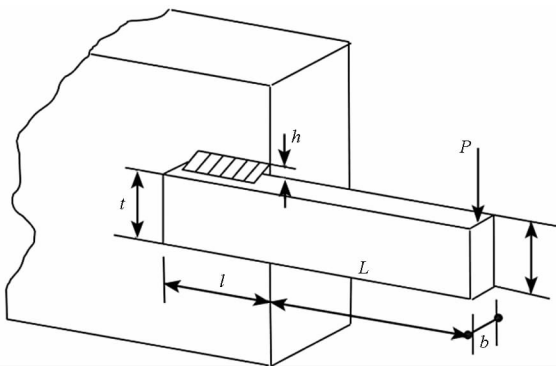


图10 焊接梁空间结构示意图

Fig. 10 Welded beam structure

本节以焊接梁的最小化焊接成本为例,验证本文算法的有效性。焊接梁的空间结构如图10所示,其优化设计的目标是在满足约束的条件下尽量降低制造成本,4个设计变量分别是 $h(x_1)$, $l(x_2)$, $t(x_3)$ 和 $b(x_4)$,约束有最大应力约束、最大变形约束、形状约束等。

焊接梁优化的数学模型为:

$$\min: f(x) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.04811x_3x_4(14.0 + x_2)$$

$$\text{s. t. } \begin{aligned} g_1(x) &= \tau(x) - \tau_{\max} \leq 0 \\ g_2(x) &= \sigma(x) - \sigma_{\max} \leq 0 \\ g_3(x) &= x_1 - x_4 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4(x) &= 0.10471x_1^2 + 0.04811x_3x_4(14.0 + x_2) - 5.0 \leq 0 \\ g_5(x) &= 0.125 - x_1 \leq 0 \\ g_6(x) &= \delta(x) - \delta_{\max} \leq 0 \\ g_7(x) &= P - P_c(x) \leq 0 \end{aligned}$$

其中:

$$\tau(x) = \sqrt{(\tau')^2 + 2\tau'\tau''\frac{x_2}{2R} + (\tau'')^2}, \tau' = \frac{P}{\sqrt{2}x_1x_2}$$

$$\tau'' = \frac{MR}{J}, M = P(L + \frac{x_2}{2}), R = \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + (\frac{x_1 + x_3}{2})^2}$$

$$J = 2\left\{\sqrt{2}x_1x_2\left[\frac{x_2^2}{12} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)^2\right]\right\}, \sigma(x) = \frac{6PL}{x_4x_3^2}$$

$$\delta(x) = \frac{4PL^3}{Ex_3^3x_4}$$

$$P_c(x) = \frac{4.013E}{L^2} \sqrt{x_3^2x_4^6/36} \left(1 - \frac{x_3}{2L}\sqrt{\frac{E}{4G}}\right)$$

$$P = 6000\text{lb}, L = 14\text{in}, E = 30 \times 10^6\text{psi}$$

$$G = 12 \times 10^6\text{psi}, \tau_{\max} = 13600\text{psi}$$

$$\sigma_{\max} = 30000\text{psi}, \delta_{\max} = 0.255\text{in}$$

初始采样 25 个点,序列更新次数上限设置为 100,算法在第 66 次更新后收敛,收敛曲线如图 11、图 12 所示。从误差收敛曲线可以看出在优化的前期,由于函数的信息不足,算法趋向于在未知区域的探索,采样点位置较为随机,在算法后期,代理模型能够正确反映函数的变化规律,采样点在最优点附近聚集,提高最优点附近区域的近似精度,找到精度更高的最优点。

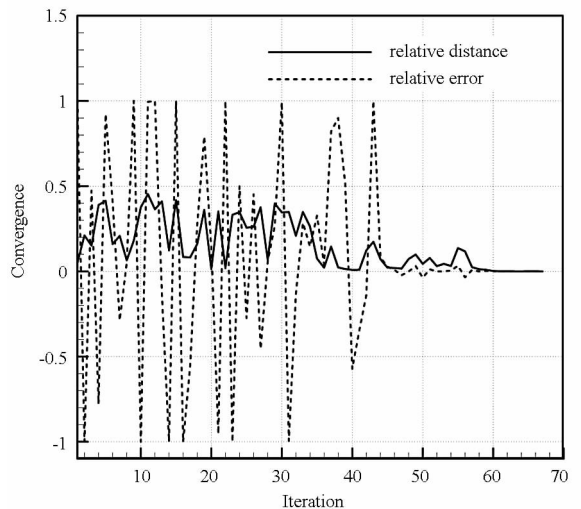


图11 相对误差收敛曲线

Fig. 11 The convergence curve of relative error

最终优化结果的设计变量和约束值如表1所示。同时,表1还列出了文献[16-18]中对此问题的优化结果。通过本文算法与文献中算法结果的对比,本文在计算精度不降低的情况下,显著减

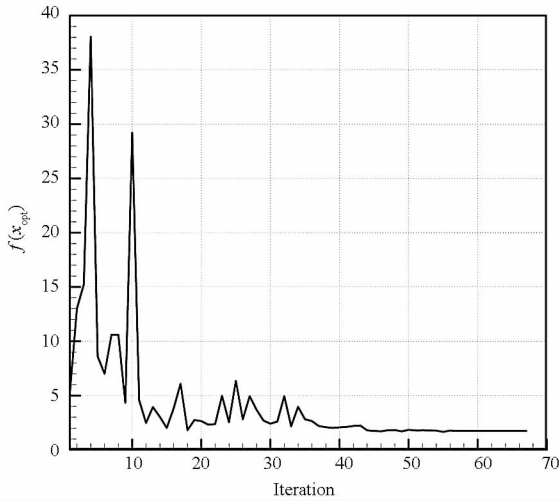


图 12 函数值收敛曲线

Fig. 12 The convergence curve of function value

少了模型的运算次数。

表 1 焊接梁优化结果对比

Tab. 1 Results comparison of welded beam optimization

	本文算法	文献[16]	文献[17]	文献[18]
x_1	0. 205 767	0. 205 730	0. 203 137	0. 202 369
x_2	3. 470 064	3. 470 489	3. 542 998	3. 544 214
x_3	9. 035 815	9. 036 624	9. 033 498	9. 048 210
x_4	0. 205 767	0. 205 730	0. 206 179	0. 205 723
$g_1(x)$	-0. 18	0. 000 000	-44. 578 56	-12. 839 79
$g_2(x)$	-0. 01	-0. 000 002	-44. 663 53	-1. 247 467
$g_3(x)$	0. 00	0. 000 000	-0. 003 042	-0. 001 498
$g_4(x)$	-3. 390 54	-3. 432 984	-3. 423 726	-3. 429 347
$g_5(x)$	-0. 080 767	-0. 080 730	-0. 078 137	-0. 079 381
$g_6(x)$	-0. 235 539	-0. 235 540	-0. 235 557	-0. 235 536
$g_7(x)$	-2. 874	0. 000 000	-38. 028 26	-11. 681 35
$f(x)$	1. 724 993	1. 724 80	1. 733 46	1. 728 02
模型调用次数	91	20 000	>100 000	>100 000

5 结论

本文分析了已有再采样策略特点,发现其不能很好地兼顾采样点空间分布特性和模型输出特性;提出一种新的再采样策略,该策略能有效平衡局部开发和全局探索能力,有效提升对最优解的预测性能。仿真结果表明,针对数学测试算例和工程优化算例,本文算法都能对最优解进行有效预测,同时减少原始模型的调用次数,特别适用于复杂系统分析模型的优化设计。

参考文献 (References)

[1] Forrester A I J, Keane A J. Recent advances in surrogate-based optimization[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2009,

45(1-3): 50-79.
 [2] Sacks J, Welch W J, Mitchell T J, et al. Design and analysis of computer experiments[J]. Statistical Science, 1989, 4(4): 409-435.
 [3] 赫显姆. 多学科设计优化中智能算法与近似模型研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2011.
 HE Xianmu. Research on intelligent algorithms and approximation models to multidisciplinary design optimization[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2011. (in Chinese)
 [4] Jin R, Chen W, Simpson T W. Comparative studies of metamodeling techniques under multiple modeling criteria[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 23(1): 1-13.
 [5] Queipo N V, Haftka R T, Shyy W, et al. Surrogate-based analysis and optimization[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2005, 41(1): 1-28.
 [6] 高月华,王希诚. 基于 Kriging 代理模型的多点加点序列优化方法[J]. 工程力学, 2012, 29(4): 90-95.
 GAO Yuehua, WANG Xicheng. A sequential optimization method with multi-point sampling criterion based on kriging surrogate model[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(4): 90-95. (in Chinese)
 [7] Jones D R. A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces[J]. Journal of Global Optimization, 2001, 21(4): 345-383.
 [8] 姜自武. 样条函数与径向基函数的若干研究[D]. 大连:大连理工大学, 2010.
 JIANG Ziwu. Some researches on spline functions and radial basis functions[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010. (in Chinese)
 [9] 李晓斌,金振中,邹汝平,等. 基于 Kriging 函数的序贯近似建模方法[J]. 机械设计与研究, 2007, 23(3): 6-10, 13.
 LI Xiaobin, JIN Zhenzhong, ZOU Ruping, et al. Kriging function-based sequential approximation modeling method[J]. Machine Design and Research, 2007, 23(3): 6-10, 13. (in Chinese)
 [10] Jones D R, Schonlau M, Welch W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. Journal of Global Optimization, 1998, 13(4): 455-492.
 [11] Jin R C, Chen W, Sudjianto A. An efficient algorithm for constructing optimal design of computer experiments[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2005, 134(1): 268-287.
 [12] 刘晓路,陈英武,荆显荣,等. 优化拉丁方试验设计方法及其应用[J]. 国防科技大学学报, 2011, 33(5): 73-77.
 LIU Xiaolu, CHEN Yingwu, JING Xianrong, et al. Optimized latin hypercube sampling method and its application[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2011, 33(5): 73-77. (in Chinese)
 [13] 魏月兴. 径向基插值近似方法理论与应用研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2009.
 WEI Yuexing. Research on theory and application of radial basis function approximation[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2009. (in Chinese)
 [14] Kitayama S, Arakawa M, Yamazaki K. Sequential approximate optimization using radial basis function network for engineering optimization[J]. Optimization and Engineering, 2011, 12(4): 535-557.
 [15] 刘新亮,郭波. 基于改进 ESE 算法的多目标优化试验设计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 410-414
 LIU Xinliang, GUO Bo. Multi-objective experimentation design optimization based on modified ESE algorithms[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 410-414. (in Chinese)
 [16] Yildiz A R. Comparison of evolutionary-based optimization algorithms for structural design optimization[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2013, 26(1): 327-333.
 [17] Huang F Z, Wang L, He Q. An effective co-evolutionary differential evolution for constrained optimization[J]. Application of Mathematical Computation, 2007, 186(1): 340-356.
 [18] He Q, Wang L. An effective co-evolutionary particle swarm optimization for constrained engineering design problems[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2007, 20(1): 89-99.