

## 二维垂向梯度非均匀介质中弹性波传播特性\*

郑晓梅, 曾新吾

(国防科技大学 光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**研究了二维弹性波在宏观非均匀介质中传播的问题。由于介质物理性质的非均匀性,弹性波在该介质中的传播需用包含介质物理性质的空间导数的非均匀介质波动方程来描述。采用有限元法求解波动方程,重点研究和讨论了物理性质垂向梯度渐变的非均匀介质中弹性波的传播特点。结果显示:波速在垂向上的对称的递增或递减引起平面弹性波的会聚或发散;若波速在垂向上满足双曲余割分布,则弹性波可以在对称轴上周期性聚焦。

**关键词:**弹性波;非均匀介质;有限元;聚束聚焦

**中图分类号:** O343.7    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1001-2486(2015)01-112-06

## Two-dimensional elastic wave propagation characteristics in inhomogeneous medium with vertical gradients

ZHENG Xiaomei, ZENG Xinwu

(College of Opto-electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The propagation problem of two-dimensional elastic wave in macroscopical inhomogeneous medium was analyzed. As the physical properties of medium are variable with space, the elastic wave propagation in this medium should be described by a set of inhomogeneous wave equations which conclude the space derivatives of the medium properties. By solving the inhomogeneous wave equations with finite element method, the elastic wave propagation characteristics in inhomogeneous medium whose physical properties vary with vertical gradients were studied and discussed. Results show that the planar elastic wave converges or diverges respectively when the wave velocity ascends or descends symmetrically in the vertical direction. Moreover, when the profile of the wave velocity is arc-hyperbolic secant, the planar elastic wave focuses periodically on the symmetric axis.

**Key words:** elastic wave; inhomogeneous medium; finite element; beam focusing

弹性波在均匀介质中传播的理论已经较为成熟和完善<sup>[1-4]</sup>,而弹性波在非均匀介质中的传播还有很大研究空间。介质的非均匀性是指物理性质随空间位置的变化而变化,是位置坐标的函数。弹性波在非均匀介质中传播会出现不同于均匀介质中的现象和特点,若仍用通常的均匀介质中波动方程描述弹性波在非均匀介质中的传播则存在较大误差,不能准确地反应波的传播特性。因此需要涵盖了物理性质的空间导数的波动方程来研究非均匀介质中波的传播特性<sup>[5-9]</sup>。

由运动方程、应力应变关系和本构方程可以得到非均匀各向同性介质的弹性波波动方程。一维弹性波的波动方程是一个变系数微分方程,介质物理性质的变化引起波速和位移幅值的改变。二维弹性波的波动方程则是一组变量相互耦合的

波动方程组,弹性波的变化更为复杂,且与介质的物理性质的变化密切相关。

现主要讨论弹性波在二维垂向梯度非均匀介质中的传播问题。垂向梯度非均匀是指物理性质在 $x$ 方向均匀不变,在垂向( $z$ 方向)梯度变化<sup>[3]</sup>。基于有限元法,计算了介质的密度和弹性参数垂向线性变化的情况。结果显示,密度和弹性参数的变化使得波速在垂向上对称地递增或递减,从而导致弹性波会聚或发散。此外计算结果显示,当介质中弹性波波速在垂向上满足反双曲正割分布时,弹性波在对称轴上周期性聚焦。

### 1 基本方程

#### 1.1 非均匀介质波动方程

考虑如图1所示的二维弹性波传播问题, $x, z$

\* 收稿日期:2014-05-15

作者简介:郑晓梅(1985—),女,浙江诸暨人,博士研究生,E-mail:zhengxiaomei@nudt.edu.cn;

曾新吾(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:x.w.zeng@nudt.edu.cn

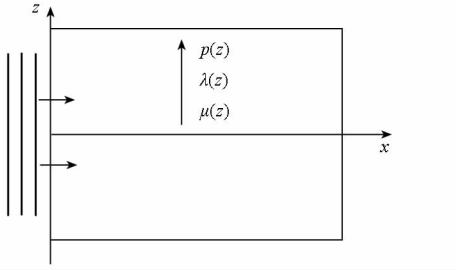


图 1 二维弹性波传播问题

Fig.1 Elastic wave propagation in 2D plane

方向的位移分别用  $u, w$  表示, 则位移向量表示为

$$\mathbf{u} = [u(x, z, t) \quad w(x, z, t)]^T \quad (1)$$

体力项为零时, 质点运动的平衡微分方程为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (5)$$

若材料参数是均匀的, 则式(5)可转换为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{cases} \quad (6)$$

式(6)即为均匀各向同性介质中的弹性波波动方程。比较式(5)和式(6), 可见非均匀介质波动方程不仅各个计算单元的密度和弹性系数不同, 而且还涉及了各点弹性参数的空间偏导数。

考虑入射波为平面简谐波的情况, 此时质点位移可表示为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x, z) \\ W(x, z) \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (7)$$

其中  $\omega = 2\pi f$  为简谐波的圆频率,  $U, W$  分别对应  $x, z$  方向的质点位移幅值。将式(7)代入式(4), 得到如式(8)的频域波动方程

$$\begin{cases} -\rho \omega^2 U = \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial W}{\partial z}] + \frac{\partial}{\partial z} [\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})] \\ -\rho \omega^2 W = \frac{\partial}{\partial x} [\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial z} [\lambda \frac{\partial U}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial z}] \end{cases} \quad (8)$$

### 1.2 有限元法控制方程

将式(8)改写为如式(9)的系数型偏微分方程, 以便于利用基于有限元法的 COMSOL 软件进行计算。

各向同性介质中用拉梅系数  $\lambda, \mu$  表示的应力 - 应变关系为

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xz} = \mu \varepsilon_{xz} \end{cases} \quad (3)$$

由式(2)、式(3)结合应变 - 位移关系可得到弹性波的波动方程

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}] + \frac{\partial}{\partial z} [\mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [\mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial z} [\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}] \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)中的偏导数项展开, 得到

$$\nabla \cdot (-\mathbf{c} \nabla U - \mathbf{a} U + \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla U + \mathbf{a} U = \mathbf{f} \quad (9)$$

$$U = \begin{pmatrix} U(x, z) \\ W(x, z) \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\rho \omega^2 & 0 \\ 0 & -\rho \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{a}$  为吸收系数矩阵,  $\mathbf{c}$  为扩散系数矩阵。此外, 对流系数矩阵  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  和源项矩阵  $\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}$  均为零向量矩阵。可见均匀介质与非均匀介质波动方程都可采用式(9)计算, 区别在前者中  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{c}$  为常数矩阵, 后者中  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{c}$  为变量矩阵。

为减小区域的边界反射对计算的影响, 将源以外的边界设置为吸收边界

$$\mathbf{n} \cdot \left( \nabla \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} \right) + ik \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

其中  $k$  ( $k = \omega/c$ ) 为波数,  $\mathbf{n}$  为边界外法线矢量。

### 1.3 无量纲化波动方程

令  $\rho_0, \lambda_0, \mu_0$  为  $z = 0$  处密度和拉梅系数值,  $c_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}$  为波速,  $t_0 = 1/f, d = c_0 \cdot t_0$  为波长。介质的密度  $\rho$  和拉梅系数  $\lambda, \mu$  表示为

$$\rho(z) = \rho_0 f_\rho(z), \lambda(z) = \lambda_0 f_\lambda(z), \mu(z) = \mu_0 f_\mu(z) \quad (11)$$

其中变化函数  $f_\rho(z), f_\lambda(z), f_\mu(z)$  是关于  $z$  的连

续函数。

要得到式(8)的非均匀介质波动方程无量纲形式,需作如式(12)所示的代换。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{\lambda_0 f_\lambda + 2\mu_0 f_\mu}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda_0 f_\lambda}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \frac{\mu_0 f_\mu}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} \right) \right] + 4\pi^2 f_\rho \bar{U} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{\mu_0 f_\mu}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \frac{\lambda_0 f_\lambda}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda_0 f_\lambda + 2\mu_0 f_\mu}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} \right] + 4\pi^2 f_\rho \bar{W} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中单位长度 1 表示一个波长。另外边界条件也相应地作无量纲处理。

## 2 数值模拟

考虑平面简谐波平行于  $x$  轴,入射到密度为  $\rho$  和拉梅系数为  $\lambda$ 、 $\mu$  的沿垂向( $z$  轴方向)梯度变化的各向同性介质中的情况,即入射波平面波为

$$\mathbf{u} = Ue^{i\omega t} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (14)$$

在非均匀介质中,胀缩运动和剪切运动两种运动形式是耦合的,此时的“纵波”和“横波”不同于均匀介质中的纯纵波和纯横波,而是被称为“准纵波”和“准横波”。利用“准纵波”波速(以下简称波速)进行讨论分析,其大小定义为

$$c_p(z) = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = c_0 \sqrt{\frac{h_1 f_\lambda(z) + 2h_2 f_\mu(z)}{f_\rho(z)}} \quad (15)$$

其中  $h_1 = \lambda_0 / (\lambda_0 + 2\mu_0)$ ,  $h_2 = \mu_0 / (\lambda_0 + 2\mu_0)$ ,  $h_1 + 2h_2 = 1$ 。

下面就材料参数的几种不同变化方式进行计算,并且讨论弹性波的传播特征。

### 2.1 材料参数为线性函数

首先建立类似如图 1 所示的二维计算模型,对称轴  $x$  轴上(即  $z = 0$  轴)  $\rho_0 = 1.140\text{g/m}^3$ ,  $\lambda_0 = 4.4\text{GPa}$ ,  $\mu_0 = 1.5\text{GPa}$ , 于是  $c_0 = 2548\text{m/s}$ 。频率  $f = 1000\text{Hz}$ , 波束宽度  $2R = 4$  的平面波从左侧边界入射到非均匀介质中。

介质的密度、拉梅系数是坐标  $z$  的线性函数,且关于  $x$  轴上下对称(以下关于参数的变化特点指的是  $z \geq 0$  区域),即

$$\begin{cases} f_\rho(z) = 1 + \alpha_1 |z| \\ f_\lambda(z) = 1 + \alpha_2 |z| \\ f_\mu(z) = 1 + \alpha_3 |z| \end{cases} \quad (16)$$

其中  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$  为线性函数的斜率。

选取六种不同的介质(见表 1)进行计算,其中 a 为均匀介质,其余为垂向梯度非均匀介质。

$$\bar{x} = x/d, \bar{z} = z/d, \bar{U} = U/U_0, \bar{W} = W/U_0 \quad (12)$$

其中  $U_0$  为初始位移幅值,无量纲化波动方程如式(13)所示。

表 1 六种不同的介质  
Tab.1 Six different kinds of media

序号	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	参数变化特点
a	0	0	0	均匀
b	0.1	0	0	密度线性增大
c	-0.1	0	0	密度线性减小
d	0	0.1	0.1	拉梅系数线性增大
e	0	0.2	0.2	拉梅系数线性增大
f	0.2	0.2	0.2	密度、拉梅系数线性增大

图 2 中各条曲线为算例 1 中各种介质中的弹性波波速分布。a 线为均匀介质的波速分布,其中波速处处相等。b 线和 c 线分别表示密度沿  $z$  正向线性增大和线性减小的介质,密度减小,波速增大,因此两者的波速沿  $z$  正向分别递减和递增。d 线和 e 线表示弹性参数  $\lambda$  和  $\mu$  沿  $z$  正向线性增大的介质波速分布, $\lambda$  和  $\mu$  越大,波速越大,因此两者的波速都沿  $z$  正向增大。但两者的线性函数斜率即空间梯度不同,斜率越大,相同  $z$  坐标处弹性参数越大,波速也越大。f 表示密度和弹性参数沿  $z$  正向线性递增的介质,由于密度与弹性参数变化函数相同,其波速与均匀介质中波速相同。

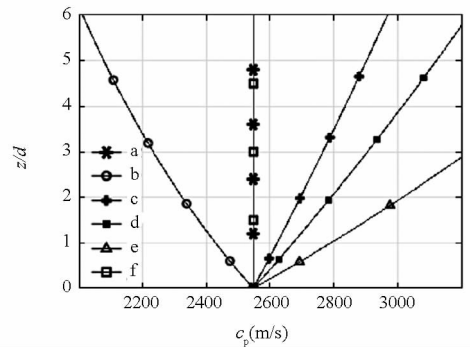


图 2 表 1 中的六种介质的波速分布

Fig. 2 The wave velocity profile of the media in Tab. 1

图 3(a) ~ (f) 对应算例 1 的各种介质中质点在  $x$  方向的位移分量  $\bar{U}(U/U_0)$ 。图 3(a) 为有限宽度平面波在均匀介质中传播,随着传播的进行,波阵面逐渐发散,波束越来越宽。图 3(b) 为由于密度沿  $z$  正向增大,波速沿  $z$  正向减小,波束倾向

波速减小的方向传播,对称轴上下的波束发散分离。图 3(c)与图 3(b)的情况刚好相反,密度沿  $z$  正向减小,波速沿  $z$  正向增大,波束偏向波速减小的方向传播,即波束向对称轴会聚。

图 3(d)(e)中,由于介质 d、e 的波速都沿  $z$  正向增大,因而波传播一定距离后,波束向对称轴会

聚。结合图 2,可知波速在  $z$  正向上变化越快,波束越易会聚,会聚时的波束越窄。因此波束在介质 c、d、e 中会聚时,(e)中波束最窄,(d)次之,(c)最宽。另外,比较三者的对称轴上的质点位移分量  $\bar{U}$  (见图 4(a)),(e)最大,结合图 2 可知波速在垂向上变化越快,位移分量  $\bar{U}$  越大。

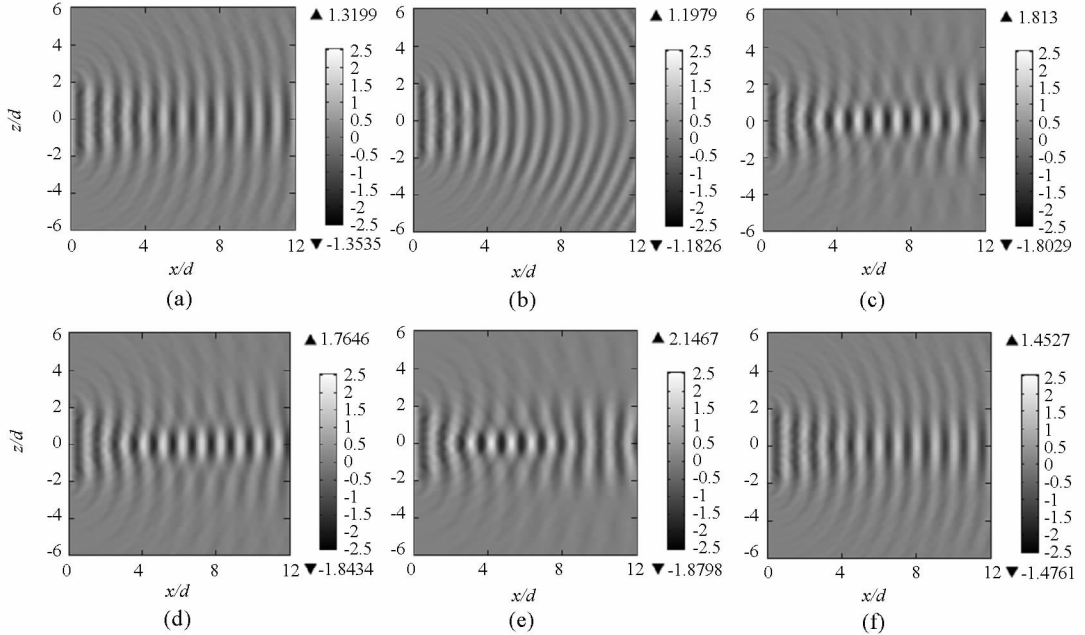


图 3 质点位移分量  $U/U_0$

Fig. 3 The profiles of particle displacement component  $U/U_0$

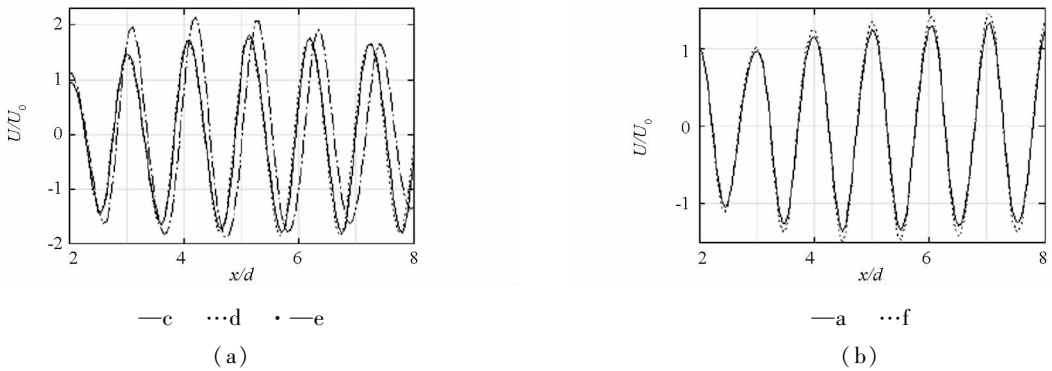


图 4 对称轴上质点位移分量  $U/U_0$

Fig. 4 Particle displacement component  $U/U_0$  on the symmetrical axis

此外,虽然算例 1 中介质 f 的波速等于均匀介质 a 的波速,图 3(a)和图 3(f)相似,两者中波束都未会聚,但由于介质 f 的密度和弹性参数是空间变化的,计算弹性参数的空间导数,其结果还是存在一定差别。例如介质 f 中对称轴上各质点的位移分量  $\bar{U}$  的幅值大于均匀介质 a 的相应值(见图 4(b))。

综上,垂向梯度非均匀介质中不管是由于密度空间变化还是弹性参数空间变化,或者两者同时变化造成波速沿  $z$  正向递增时,弹性波发生会

聚,且波速随  $z$  的变化越快(梯度越大),会聚越明显,质点振动的位移幅值越大。反之,当波速沿  $z$  正向递减时,波束自对称轴向两边分离。

### 2.2 波速为双曲余割函数

现在来研究一类特殊的垂向梯度非均匀介质,其密度是均匀的,而拉梅系数的空间分布为

$$\lambda(z) = \lambda_0 \cosh^2(\alpha|z|), \mu(z) = \mu_0 \cosh^2(\alpha|z|) \tag{17}$$

其中  $\alpha$  为梯度参数。于是波速为垂向坐标的如式(18)所示的反双曲正割(或双曲余割)函数。

$$c_p(z) = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = c_0 \sqrt{h_1 f_\lambda + 2h_2 f_\mu} = c_0 \cosh(\alpha |z|) \quad (18)$$

若定义弹性介质的折射率为

$$n(z) = \frac{c_0}{c_p(z)} = n_0 / \sqrt{\frac{h_1 f_\lambda + 2h_2 f_\mu}{f_\rho}} \quad (19)$$

即折射率满足双曲正割分布。在光学中,入射光线在径向变折射率满足双曲正割分布的透镜中传播时,可以很好地聚焦于一点,并且可以周期性聚焦,根据射线理论<sup>[10]</sup>,首个焦点的位置为  $x_f = \pi/2\alpha$ 。我们期望弹性波在波速双曲余割分布的介质中也可实现类似的聚焦现象。

首先,计算 1000Hz 的平面波在不同介质中的传播。采用波动方程式(8)进行计算。计算区域尺寸为 30m × 20m,取  $\rho_0 = 1.140\text{g/m}^3$ ,  $\lambda_0 = 4.4\text{GPa}$ ,  $\mu_0 = 1.5\text{GPa}$ ,则  $c_0 = 2548\text{m/s}$ 。四种介质中  $\alpha$  分别取 0.05, 0.1, 0.15, 0.2。取波束尺寸  $R = 5\text{m}$ (近似 2 倍波长)。

图 5(a) ~ (d) 分别为四种介质中质点位移分量  $U/U_0$  分布图。图中的实线为用射线理论计算的传播轨迹线。可见,波速变化的梯度参数  $\alpha$  越大,弹性波越容易聚焦,焦点强度(位移幅值比  $U/U_0$ )越大,焦距越短。

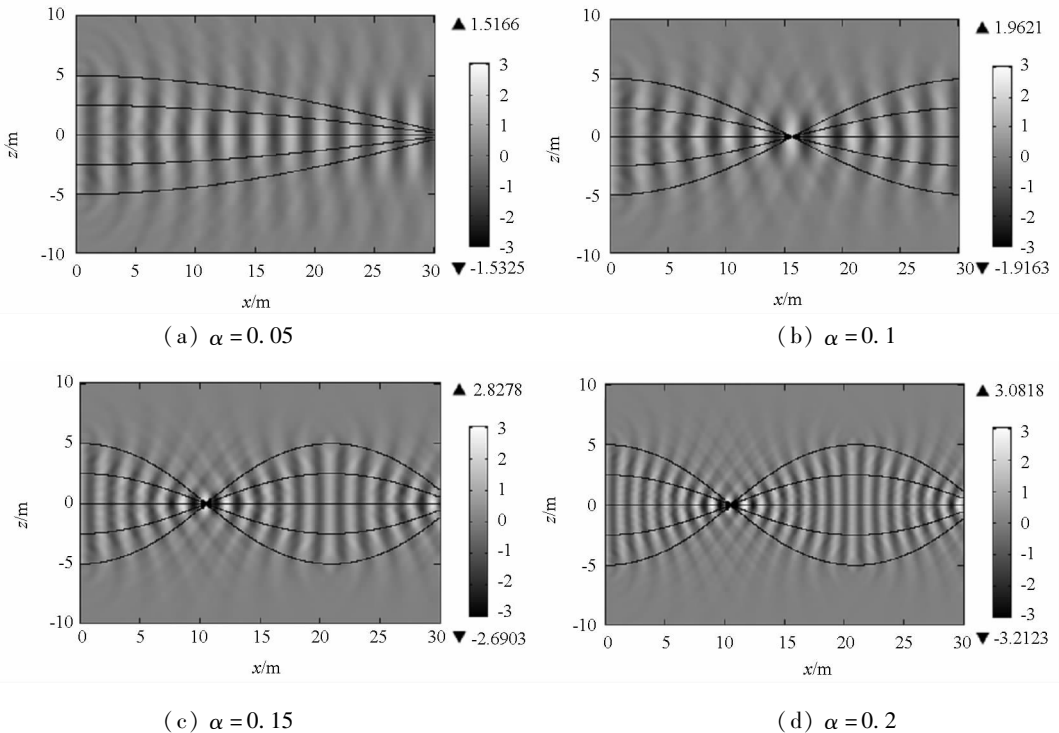


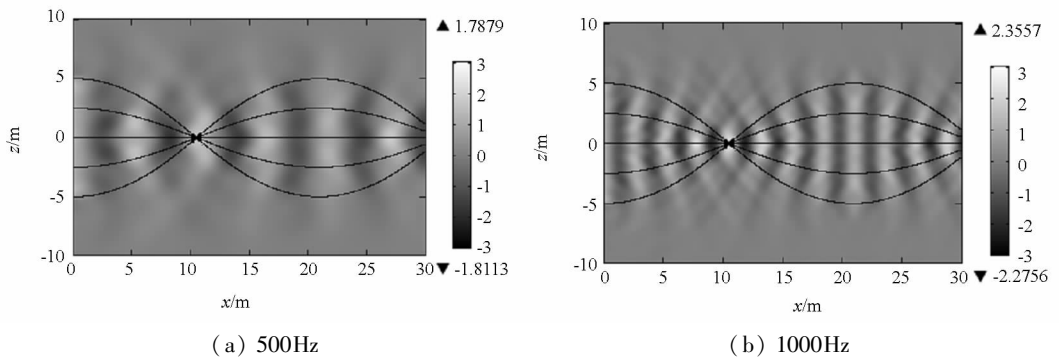
图 5 1000Hz 下不同介质中的质点位移分量  $U/U_0$  分布图

Fig. 5 The profiles of particle displacement component  $U/U_0$  in different media for 1000Hz

其次,计算不同频率弹性波(500Hz, 1000Hz, 1500Hz, 2000Hz)在同种介质( $\alpha$  相同)中的传播。令  $\alpha = 0.15\text{m}^{-1}$ ,其余参数同上例。根据射线理论得到首焦点的位置  $x_f = \pi/2\alpha = 10.5\text{m}$ 。

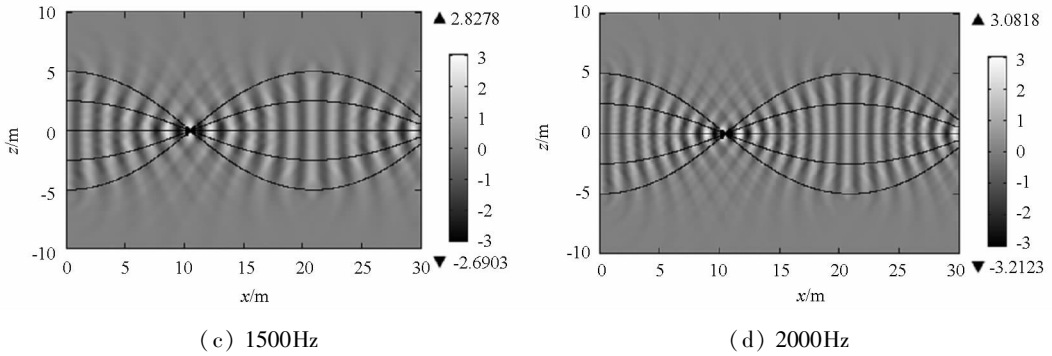
图 6(a) ~ (d) 对应频率 500Hz, 1000Hz,

1500Hz, 2000Hz 弹性波入射时介质中的质点位移  $U/U_0$  分布图。图中的实线为传播轨迹线。由图可见,波的频率越大,弹性波聚焦越明显,焦点强度越大。频率对聚焦的影响在于:相同的非均匀介质对不同频率的弹性波传播的影响不同,频率



(a) 500Hz

(b) 1000Hz

图6 不同频率的弹性波的质点位移分量  $U/U_0$  分布图Fig.6 The particle displacement component  $U/U_0$  profiles of elastic waves with different frequency

越高,介质的非均匀性越显著,而频率越低,介质的非均匀性越弱,更趋近于均匀介质。

### 3 结论

当介质的非均匀性不可忽略时,需采用非均匀介质的弹性波波动方程。利用有限元法计算非均质波动方程,主要研究了二维垂向梯度非均匀介质中弹性波的传播特点。一般地,若介质中弹性波波速在垂向上对称地递增或递减,则相应的弹性波在对称轴上会聚或自对称轴发散。若介质中波速在垂向上满足反双曲正弦分布,则弹性波可以在对称轴上周期性聚焦。聚焦的效果与介质的性质和弹性波的频率有关。

垂向梯度材料的制作,可采用两种均质材料按连续变化的比例混合来实现(波速变化和两种材料的比率变化的关系需要通过实验研究确定)<sup>[11]</sup>。根据等效介质理论<sup>[12-13]</sup>,将两材料在流体(固体)基体中周期排列成圆柱结构,类似于声子晶体<sup>[14]</sup>,通过改变圆柱半径或圆柱排列的间距可等效波速梯度变化的材料<sup>[15-16]</sup>。

弹性波在非均匀介质中传播的研究为改善波束的定向辐射性能提供了一种新思路,在减噪、超声碎石等领域具有潜在的应用价值。

### 参考文献 (References)

- [1] George E M. Theory and problems of continuum mechanics[M]. New York: McGraw Hill Book Company, 1970.
- [2] Graff K F. Wave motion in elastic solids[M]. New York: Dover publication, 1991.
- [3] 曾新吾, 韩开锋. 弹性波动力学基础[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2012.  
ZENG Xinwu, HAN Kaifeng. Foundations of elastic wave dynamics [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2012. (in Chinese)
- [4] 杜世通. 地震动力学[M]. 青岛: 石油大学出版社, 1996.  
DU Shitong. Seismic dynamics [M]. Dongying Qingdao: Petroleum University Press, 1996. (in Chinese)
- [5] 布列霍夫斯基. 分层介质中的波[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 1985.  
L. M. Brekhovskikh L M. Waves in layered media[M]. 2nd ed. Beijing: Academic Press, 1985. (in Chinese)
- [6] Modinos A, Stefanou N, Psarobas I E, et al. On wave propagation in inhomogeneous systems[J]. Physica B, 2001, 296(1):167-173.
- [7] Berezovski A, Engelbrecht J, Maugin G A. Numerical simulation of two-dimensional wave propagation in functionally graded materials [J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2003, 22: 257-265.
- [8] 韩斌, 张涛. 弹性波在非均匀介质中传播的波幅研究[J]. 北京理工大学学报, 2006, 26(5): 383-387.  
HAN Bin, ZHANG Tao. A study on the amplitude of elastic wave transmission in inhomogeneous media[J]. Transaction of Beijing Institute of Technology, 2006, 26(5): 383-387. (in Chinese)
- [9] 郭宏伟, 王尚旭, 孙文博. 基于非均质体的波动方程有限元正演模拟[J]. 石油物探, 2012, 51(4): 319-326.  
GUO Hongwei, WANG Shangxu, SUN Wenbo. Wave equation modeling by finite-element method for heterogeneous body[J]. Geophysical Prospecting for Petroleum, 2012, 51(4): 319-326. (in Chinese)
- [10] 刘德森. 变折射率介质理论及其技术实践[M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 2005.  
LIU Deseng. The theory and technique of gradient index medium [M]. Chongqing: Southwest Normal University Press, 2005. (in Chinese)
- [11] 吴宗汉, 朱彪, 欧阳小禾, 等. 特种传声器[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.  
WU Zonghan, ZHU biao, OUYANG Xiaohe, et al. Special microphones[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011. (in Chinese)
- [12] Wu Y, Lai Y, Zhang Z Q. Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions [J]. Physical Review B, 2007, 76(20):205313.
- [13] Sheng P, Mei J, Liu Z, et al. Dynamic mass density and acoustic metamaterials[J]. Physica B, 2007, 394(2):256-261.
- [14] 王刚, 赵宏刚, 温激鸿, 等. 二维周期钢管阵列带隙特性计算中的时域有限差分算法[J]. 国防科技大学学报, 2004, 4:72-114.  
WANG Gang, ZHAO Honggang, WEN Jihong, et al. Finite difference time domain method for the study of the band gap in the two-dimensional rectangular arrays of the steel tubes in air [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2004, 4:72-114. (in Chinese)
- [15] Popa B-I, Cummer S A. Design and characterization of broadband acoustic composite metamaterials [J]. Physical Review B, 2009, 80(17):174303.
- [16] Alfonso C, Daniel T, José S D. Sound focusing by gradient index sonic lenses [J]. Applied Physics Letters, 2010, 97(10): 104103.