

高重合度人字齿轮轮齿最佳修形优化设计*

赵宁, 秋朋园, 刘贵立

(西北工业大学机电学院, 陕西西安 710072)

摘要:基于斜齿轮轮齿接触分析技术,建立了考虑人字齿轮典型安装误差的抛物线人字齿轮轮齿接触分析方法。综合考虑人字齿轮的传动误差与啮合特性,采用带精英策略的快速非支配排序遗传算法对高重合度人字齿轮的传动性能进行了多目标优化设计,该算法克服了优化结果的局部收敛,获得了人字齿轮最佳的齿廓、齿向抛物线修形参数。通过实例表明,修形优化后的齿面啮合印痕与传动误差较优化之前得到了明显的改善,有效地改善了高重合度人字齿轮的齿面偏载现象,降低了齿轮传动过程中的啮合冲击。对加工的人字齿轮在减振降噪试验台上进行带载试验,对比优化前后的噪音分贝值,进一步验证了该优化方法对人字齿轮副减振降噪具有一定作用。

关键词:多目标优化;人字齿轮;轮齿接触分析;遗传算法;抛物线修形参数;噪音

中图分类号:TH113 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2015)01-165-06

Modification optimization of double helical gears with high contact ratio

ZHAO Ning, QIU Pengyuan, LIU Guili

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Parabola modification method of double helical gears was proposed, tooth contact analysis of modified gears including typical install errors was established based on tooth contact analysis of helical gears. Considering the transmission errors and meshing performance, transmission behavior of double helical gears was optimized from using the fast non-dominated sorting genetic algorithm to obtain the best parabola modification coefficient which could also avoid the local convergence. Examples show that path of contact and transmission errors of optimized gears are preferable distinctly. It has an important significance in improving distribution of load of tooth surface as well as reducing gear meshing impact. In the end, the noise value of original gears and optimization ones are obtained by the loaded test, further verifies the optimal method has certain effect on the noise reduction of gears.

Key words: multi-objective optimization; double helical gears; tooth contact analysis; genetic algorithm; parabola modification coefficient; noise

人字齿轮传动具有承载能力高、工作平稳性好、自平衡轴向力等优点,因此被广泛应用于航空、航天、船舶等领域。国外先进直升机已将人字齿轮传动应用于其主减速器,以实现大功率的“分扭-并车”传动。适当的轮齿修形有助于消除齿轮卸载产生的应力集中以及载荷沿齿向分布不均,改善轮齿啮合过程产生的振动与冲击,大大提高了齿轮传动的质量^[1]。与常规的人字齿轮传动相比,高重合度人字齿轮传动过程中参与啮合的轮齿对数更多,承载能力更大,但工作时对轮齿的误差和变形也更加敏感,因此,对高重合度人字齿轮进行修形就显得尤为重要^[2-4]。

方宗德等^[5-6]将三维有限元与数学规划相结

合,提出了斜齿轮三维修形的模型及优化设计方法。唐增宝等^[7]建立了齿轮动态分析的数学模型,采用优化设计方法,确定最佳齿廓修形量和修形长度。王三民等^[4]进行了高速大重合度直齿圆柱齿轮的齿廓最佳修形研究,在对高速大重合度圆柱齿轮的传动性能进行计算机模拟的基础上,提出了确定齿廓最佳修形量的方法。孙月海等^[8]以理论渐开线直齿圆柱齿轮修形减振为目的,研究了恒定设计载荷下,保持齿轮传动误差为定值的齿廓修形参数的计算方法。目前,对人字齿轮副轮齿进行修形研究的文章相对较少,王成等^[9]对船用大重合度人字齿轮进行了齿廓修形优化设计与试验研究,对小齿轮齿廓采用三段抛物线修形,

* 收稿日期:2014-04-23

作者简介:赵宁(1958—),男,广东广州人,教授,博士,博士生导师,E-mail:zhaon@nwpu.edu.cn

并给出了轮齿端面齿廓修形量的计算方法。现有的研究多数仅对轮齿齿廓进行修形,且齿廓修形参数地优化往往采用单目标优化方式,无法兼顾齿轮的传动误差与轮齿啮合特性,不能较好地优化齿轮传动的综合性能。且人字齿轮在传动过程中,载荷首先作用在轮齿螺旋线的前端部分,然后再逐渐扩展到全齿宽上,因此,对齿轮进行齿向修形研究对降低啮合冲击更为有效。

1 高重合度人字齿轮轮齿修形

人字齿轮可视为由两个螺旋角相同,但旋向相反的斜齿轮组成。考虑齿轮设计制造的经济性,将啮合齿轮的变形量都集中反映在小齿轮上,仅对小入字齿轮进行轮齿修形。

1.1 齿廓修形

齿廓修形的主要目的是切掉齿轮啮合时产生的干涉部分,轮齿的修形主要是通过改变刀具切削刃的形状实现的,由于刀具的抛物线齿廓易于加工且试验证明对渐开线圆柱齿轮采取抛物线型齿廓修形能有效地改善齿轮啮合性能^[10]。本文在齿廓修形设计中,齿条齿廓采用抛物线代替直线齿廓,以获得小齿轮齿廓的抛物线修形。

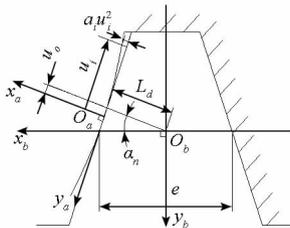


图 1 齿廓抛物线修形示意图

Fig. 1 Parabola modification of rack-cutter profiles

图 1 中坐标系 S_a 的 y 轴与齿条齿廓重合,坐标系 S_b 的 x 轴与齿条分度线重合; u_i 是齿条沿齿廓方向的坐标参数; α_n 为齿条法面压力角; L_d 为坐标系 S_a 和 S_b 坐标原点的距离; e 为分度线齿槽宽。

则斜齿条左侧抛物线齿廓上任一点的坐标在 S_a 坐标系中表示为

$$\mathbf{r}_a(u_i) = [a_i u_i^2, -u_i, 0, 1]^T \quad (1)$$

其中, a_i 为齿廓抛物线系数。

图 2 中坐标系 S_c 与齿条固联并位于齿条端面内, l_i 是齿条沿齿宽方向的坐标参数, β_c 为齿条螺旋角。

通过坐标变换,将齿条刀具齿廓方程转换为刀具的齿面方程

$$\begin{cases} \mathbf{r}_c(u_i, l_i, \varphi_i) = \mathbf{M}_{cb} \cdot \mathbf{M}_{ba} \cdot \mathbf{r}_a(u_i, l_i) \\ f(u_i, l_i, \varphi_i) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

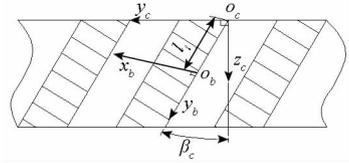


图 2 斜齿条坐标系

Fig. 2 Coordinate system of pinion rack-cutter

当存在制造和安装误差时,人字齿轮左右两端轮齿不能同步啮合,因此对于左右端小轮齿面的加工,可以采用不同的修形刀具。

1.2 齿向修形

适当的齿向修形有助于改善载荷沿齿间分布不均的现象,同时齿向抛物线修形可使齿轮传动获得抛物线式的传动误差,从而降低齿轮的振动等级,大大改善齿轮副的传动性能。Litvin 提出了采用数控碟形砂轮磨齿机与数控蜗杆砂轮磨齿机,通过控制砂轮的径向进给与切向进给对渐开线斜齿轮进行齿面双向修形的方法^[6-7]。本文将这种修形方法应用于人字齿轮的齿向修形,以人字齿轮两侧斜轮齿齿宽中点为抛物线修形的顶点,沿分度圆螺旋线方向进行对称抛物线修形,其法向修形量为

$$y = a^* x^2 \quad (3)$$

实际加工中,若不采用改变刀具切削刃的形状进行修形,只要将修形参数换算为相同的轮齿齿廓及齿向修形量,即可达到预期的效果。

2 人字齿轮副轮齿几何接触分析

2.1 斜齿轮副轮齿几何接触分析

轮齿接触分析是利用计算机技术对齿轮啮合过程中的齿面接触情况及传动误差进行数值仿真的一种重要方法。轮齿接触分析的主要构想是基于相啮合的两齿面切触的模拟。齿轮两齿面的瞬时线接触仅仅在理论上对于无安装误差和制造误差的理想齿轮传动时存在。实际上,由于齿轮的制造、安装误差,理论上的线接触将被点接触所替代^[11-12]。

下面讨论存在制造、安装误差情况下斜齿轮副的点接触。

图 3 中 S_g 是固定坐标系; S_1 和 S_2 分别固定在主被动齿轮箱体上,随齿轮转动; S_c, S_f, S_h 是辅助坐标系; φ_1, φ_2 是主被动齿轮的转角; ΔE 是中心距安装误差; ΔL 是轴向偏移误差; $\Delta \gamma$ 是轴线平行度误差,这里仅考虑垂直平面上的轴线平行度误差,研究表明该误差对齿轮啮合传动具有较大的影响^[1]。

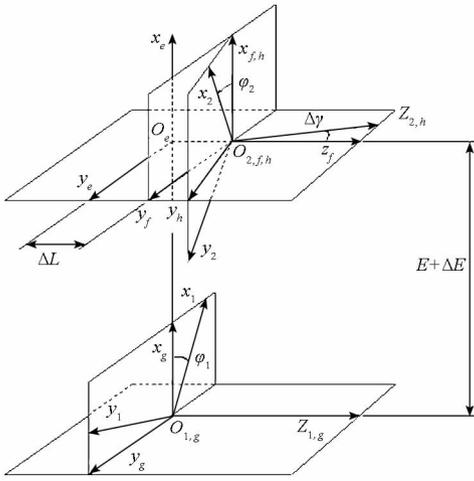


图3 考虑误差的斜齿轮啮合坐标系

Fig. 3 Coordinate system on considering the error of skew gear engagement

在齿轮啮合过程中,两齿面连续相切接触。因此,在固定坐标系中,任意时刻两齿面都有公共接触点,且公共接触点处有公法线,即

$$\begin{cases} \mathbf{r}_g^{(1)}(u_1, l_1, \varphi_1) = \mathbf{r}_g^{(2)}(u_2, l_2, \varphi_2) \\ \mathbf{n}_g^{(1)}(u_1, l_1, \varphi_1) = \mathbf{n}_g^{(2)}(u_2, l_2, \varphi_2) \end{cases} \quad (4)$$

式(4)中,上标“1”和“2”分别代表主、被动齿轮,下标“g”代表各矢量均表示在固定坐标系 \$S_g\$ 中。

其中, \$u_1, l_1\$ 为主动齿轮的齿面参数, \$u_2, l_2\$ 为被动齿轮的齿面参数。此时可取 \$\varphi_1\$ 为输入量,求解以 \$u_1, u_2, l_1, l_2, \varphi_2\$ 为未知量的方程组,从而得到两齿面的一个接触点。以一定的步长改变 \$\varphi_1\$ 的值,继续求解,直至求出的接触点超出齿面的有效边界。通过求解矢量方程得出接触点位置矢量,对于每个瞬时接触点,可以分别确定相应的主曲率与主方向,得到齿面的啮合印痕^[13-14]。齿轮副的传动误差定义为被动轮实际转角偏离理论转角之值,即

$$\Delta\varphi_2 = (\varphi_2 - \varphi_2^0) - (\varphi_1 - \varphi_1^0) \frac{z_1}{z_2} \quad (5)$$

式(5)中, \$z_1\$ 和 \$z_2\$ 分别为主、被动轮齿数; \$\varphi_1^0\$ 和 \$\varphi_2^0\$ 分别为主、被动轮的初始转角。

2.2 人字齿轮副轮齿几何接触分析

基于斜齿轮轮齿接触分析的求解方法,将人字齿轮看作是左右斜齿轮同步啮合,分别对左右斜齿轮副进行轮齿接触分析,从而可以在分析过程中考虑人字齿轮制造误差,如螺旋角误差、相角误差等。通过轮齿接触分析计算可得到人字齿轮的几何传动误差,将同一啮合时刻的左右两端斜齿轮副轮齿接触分析得到的啮合路径及啮合印痕进行合成,从而可以得到人字齿轮副的啮合印痕。

由于制造、安装误差的存在,齿轮传动的过程中,人字齿轮左右两侧斜齿轮会产生不同程度的偏载,导致一侧斜齿轮对进入啮合时,另一侧斜齿轮对可能还没有接触,此时在计算过程中,先计算一侧斜齿轮啮合时主从动轮的转角,带入另一侧斜齿轮方程中求得瞬时接触点和啮合印痕,本文在计算过程中先对人字齿轮右侧斜齿轮进行分析,再对其左侧斜齿轮进行分析。

对由于制造误差产生的左右两端啮合齿的相位差,采用左右两端主动轮不同步的办法,即

$$\varphi_L = \varphi_R - \Delta\varphi \quad (6)$$

其中: \$\Delta\varphi = \frac{\sum e}{r_b \cos\beta_b}\$, \$\varphi_L\$ 为左端主动轮转角; \$\varphi_R\$ 为右端主动轮转角; \$\Delta\varphi\$ 为由于相对制造误差产生的轮齿相位差; \$\sum e\$ 为左右两端斜齿轮副的相对制造误差; \$r_b\$ 和 \$\beta_b\$ 分别为主动轮基圆半径和基圆螺旋角。

3 人字齿轮副轮齿修形优化

由于安装误差的存在,人字齿轮在传动过程中会产生冲击、偏载等现象。而且对于具有较高重合度的人字齿轮,对误差的存在更加敏感。因此,对人字齿轮进行优化的目的是在确保传动平稳的条件下,同时减轻齿轮的偏载现象,需要综合优化传动误差与轮齿齿面接触性能。当存在制造和安装误差时,人字齿轮左右两端轮齿不能同步啮合,对于左右端齿面的加工,可以采用不同的修形刀具。本文以齿轮几何传动误差波动量最小、人字齿轮左侧齿面上接触点个数最多为目标函数。即

第一目标函数:

$$\min f_1 = \min(\max(\Delta\varphi_2) - \min(\Delta\varphi_2)) \quad (7)$$

第二目标函数:

$$\min f_2 = \min(-PN) \quad (8)$$

其中, \$\max(\Delta\varphi_2)\$, \$\min(\Delta\varphi_2)\$ 分别为传动误差的最大值与最小值, \$\Delta\varphi_2\$ 的计算如式(5)所示。 \$PN\$ 为人字齿轮左侧斜齿轮齿面上的接触点个数。为了简化计算过程,对小人字齿轮进行修形时,简化左右两端斜齿轮齿廓、齿向抛物线修形系数相同,即将设计优化变量的个数减为3个。以齿廓抛物线修形二次项系数 \$\alpha_1\$, 齿廓抛物线修形顶点参数 \$u_{01}\$, 齿向抛物线修形二次项系数 \$\alpha^*\$ 为设计优化变量。

采用带精英策略的快速非支配排序遗传算法对人字齿轮的目标函数进行多目标优化,最大限度地克服了传统遗传算法的缺陷,避免了优化过程中产生局部收敛。该方法基于 Pareto 最优解概念,无需人为指定各目标函数的权值。优化所得

结果是一个非劣解集,设计者可以根据实际工作需要选择结果参数,从而获得最佳修形参数^[15]。

人字齿轮轮齿修形的多目标优化流程图如图 4 所示。

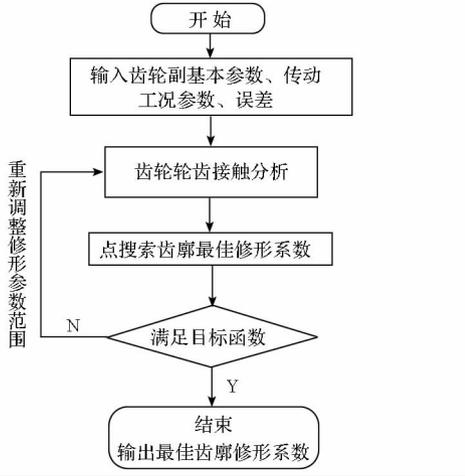


图 4 轮齿修形多目标优化流程图

Fig. 4 Flow chart of multi-objective optimization for modification

4 人字齿轮副轮齿修形优化实例

考虑单级人字齿轮传动,输入功率 $P = 1000\text{kW}$,输入转速 $n_1 = 2584\text{r/min}$,传动比 $u = 10$,中心距 $a = 621\text{mm}$ 。大、小齿轮材料相同,渗碳淬火,齿面硬度 $58 \sim 62\text{HRC}$,取 $\sigma_{Hlim1} = \sigma_{Hlim2} = 1700\text{N/mm}^2$, $\sigma_{Flim1} = \sigma_{Flim2} = 550\text{N/mm}^2$,5 级精度。

算法参数设置如下:种群大小为 108,最大进化代数为 100 代,交叉概率为 0.8,变异概率为 0.3,交叉分布指数为 10,变异分布指数为 30。

高重合度人字齿轮的基本参数及安装误差取值如表 1 所示。本文实例中仅考虑中心距误差及轴线平行度误差。实际计算时,可对不同误差状态下的轮齿齿形进行优化设计。

表 1 人字齿轮基本参数
Tab. 1 Parameters of gears

| 参数 | 小齿轮 / 大齿轮 |
|-------------|-----------|
| 齿轮齿数 | 23 / 231 |
| 模数 | 4.051 |
| 压力角/(°) | 20 |
| 螺旋角/(°) | 34.096 |
| 齿宽/mm | 112.51 |
| 中心距误差/mm | 0.04 |
| 轴线平行度误差/(') | 0.01 |

图 5 ~ 图 8 是优化设计可行解随进化过程分

布图,其中 x 为传动误差, PV 为左侧斜齿轮传动啮合点个数。

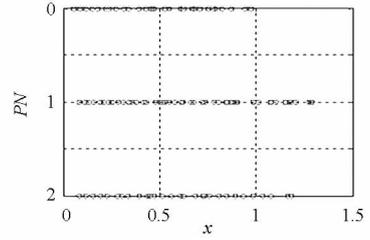


图 5 优化 10 代时可行解分布图

Fig. 5 Distribution of solution in 10 generation

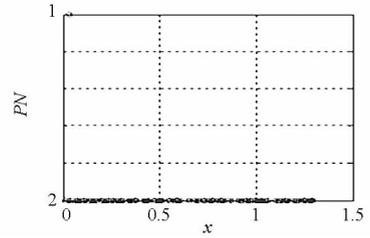


图 6 优化 40 代时可行解分布图

Fig. 6 Distribution of solution in 40 generation

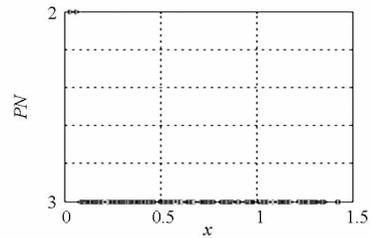


图 7 优化 60 代时可行解分布图

Fig. 7 Distribution of solution in 60 generation

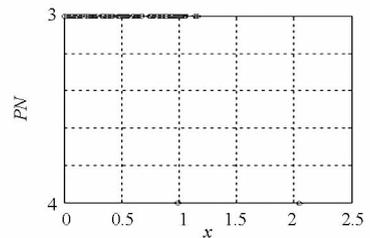


图 8 优化 100 代时可行解分布图

Fig. 8 Distribution of solution in 100 generation

观察遗传算法优化得到的可行解分布图,可以看出随着进化代数的不断增加,两个目标函数逐渐趋于最优。

优化过程进行到第 10 代时,人字齿轮左侧斜齿轮齿面上的接触点个数从 0 到 2 分布不等,即当右侧齿面接触时,左侧齿面上会出现完全没有接触的情况,此时齿轮传动过程中会出现严重的偏载现象。当优化进行到 40 代时,左侧齿面上的接触点个数基本为 2 个,个别情况存在 1 个接触点。优化至 60 代时,接触点的个数基本分布在 3 个,过程中传动误差波动量基本不变。最终,在优

化进行到第100代时,人字齿轮左侧齿面上的接触点个数保持在3个,且有两个优化结果的接触点已经到达4个,同时可以看出,在遗传算法进行到60代~100代的过程中,传动误差的波动量也得到了优化,降至0~1.25(")范围内。可以看出,整个优化过程中,人字齿轮传动误差的波动量几乎都控制在0~1.5(")范围内,但随着优化过程的进行,齿面接触点的个数迅速得到了优化,说明了中心距误差及轴交角误差主要影响人字齿轮的齿面接触印痕。

通过优化,人字齿轮传动误差及人字齿轮左侧齿面上的接触点个数均得到了优化,使得传动误差保持较小的同时,人字齿轮左侧接触点数目增加。优化得到的人字齿轮修形参数为一组非劣解集,从中选出的一组修形参数如表2所示。实际计算中,设计者可根据设计需要及加工条件,自行选择优化所得修形参数。由于计算机硬件条件的限制,本次优化设计中遗传算法仅优化至100代,在实际优化问题中,可以选择较大的遗传代数。

表2 人字齿轮修形系数优化参数表

Tab.2 Optimization parameter list of modification coefficient

| 人字齿轮抛物线修形参数 | 优化前/后 |
|---------------------------|----------------|
| 齿廓修形二次项系数 α_1 | 0.005/0.006 37 |
| 齿廓修形顶点位置 u_{01} (mm) | -0.01/-0.032 9 |
| 齿向抛物线修形二次项系数 α_1^* | 2E-11/4E-6 |
| 传动误差波动量 (") | 1.27/0.332 |
| 左侧齿面接触点数 | 0/3 |

优化前后齿轮接触印痕与传动误差如图9、图10所示。

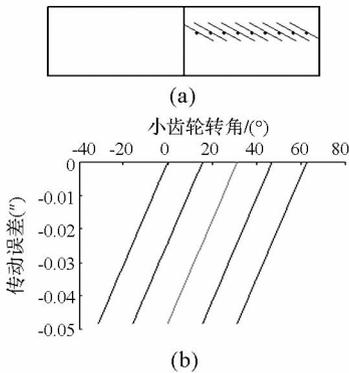


图9 优化前齿面啮合印痕及传动误差曲线图

Fig.9 Contact path and transmission errors before modification

对比图9和图10可以看出,对人字齿轮进行齿廓修形及一定量的齿向修形,如图9(a)所示,

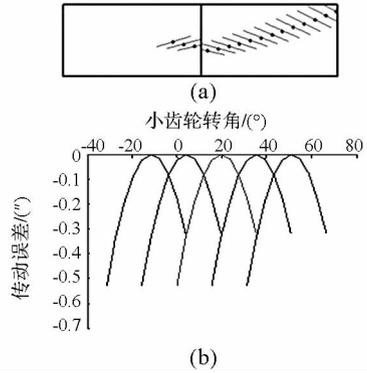


图10 优化后齿面啮合印痕及传动误差曲线图

Fig.10 Contact path and transmission errors after modification

人字齿轮右侧齿面接触时,左侧齿面上没有接触点,出现了严重的偏载现象,且此时的传动误差曲线分布不连续,齿轮在传动过程中将出现振动与冲击。由于圆柱齿轮对中心距误差不敏感的特性,也可以看出轴线平行度误差对齿轮传动具有严重的影响。

在优化之后,图10(a)中,啮合印痕图对比修形优化之前得到了明显改善。可以看出,对人字齿轮进行适量的齿向修形后,齿轮右侧齿面接触印痕分布偏斜,单侧斜齿轮轮齿的载荷分布得到了改善,左侧齿面从完全没有接触点增加到有3个或4个接触点,人字齿轮的传动误差曲线变为连续的抛物线型,虽然数值略微增大,但是仍在误差精度范围内,这说明齿向修形对齿轮误差有一定的补偿作用,有利于降低误差引起的啮合冲击对齿轮传动的影响,进一步说明了其对高重合度人字齿轮轮齿进行修形优化具有重大意义。

5 人字齿轮传动噪声试验

对齿轮进行齿廓修形和齿向修形可大大降低齿轮传动系统的振动与噪声。因此,本文对优化前后的两组齿轮进行了噪音水平检测。

将加工的齿轮在高速齿轮减振降噪试验台上进行带载试验,噪声测试分析系统主要包括传声器、放大器、噪声采集系统、声级计和磁带记录仪等。在试验齿轮箱的右侧及箱体后面距离测量表面1m处,共布置6个传声器,分别测量了优化前后6个测点上人字齿轮试验箱的空气噪音分贝值,测量数值如表3所示。

对比人字齿轮副修形优化前后的噪音分贝值,可以看出优化后,齿轮传动的噪音水平下降了约5~7dB,试验结果进一步说明了对人字齿轮副进行最佳修形优化设计取得了良好的减振降噪效果。

表 3 优化前后齿轮副噪音水平

Tab.3 Noise level of gears

| 测点 | 优化前/(dB) | 优化后/(dB) |
|-----|----------|----------|
| 1 号 | 114.34 | 108.72 |
| 2 号 | 117.13 | 111.11 |
| 3 号 | 113.56 | 108.24 |
| 4 号 | 115.27 | 109.56 |
| 5 号 | 116.79 | 111.49 |
| 6 号 | 115.76 | 108.91 |

6 结论

1) 齿条齿廓采用抛物线代替直线齿廓, 获得小人字齿轮齿廓的抛物线修形, 修形方法简便易行。

2) 基于斜齿轮轮齿接触分析的求解方法, 对考虑安装误差及修形的高重合度人字齿轮轮齿进行几何接触分析, 得到高重合度人字齿轮副的啮合印痕和传动误差。

3) 综合考虑了人字齿轮的传动误差与轮齿啮合特性, 基于人字齿轮轮齿接触分析技术, 以几何传动误差波动量最小、人字齿轮左侧齿面上接触点个数最多为目标函数, 采用带精英策略的快速非支配排序遗传算法对高重合度人字齿轮的抛物线修形系数进行了多目标优化设计, 最终获得了轮齿最佳修形参数。通过对比修形优化前后的传动误差曲线与啮合印痕, 证明了经优化后高重合度人字齿轮的传动性能得到了一定程度的改善。

4) 通过试验, 对比优化前后的两组齿轮的噪音分贝值, 可以看出优化后噪音分贝值下降了 5~7dB, 进一步说明了本文提出的优化设计方法对改善人字齿轮传动性能, 减小齿轮传动的振动及噪音具有一定的意义。

参考文献 (References)

[1] 齿轮手册编委会. 齿轮手册(上册)[M]. 北京: 机械工业出版社, 1990, :169-173.
Gear manual editorial committee. Gear manual (volume one)[M]. Beijing: China Machine Press, 1990:169-173. (in Chinese)

[2] Sato T, Umezawa K, Ishikawa J. Effects of contact ratio and profile correction on gear rotational vibration[J]. JSME Bulletin, 1983, 26(221): 2010-2016.

[3] Lee C W, Lin H H, Oswald F B. Influence of liner profile modification and loading conditions on the dynamic tooth load and stress of high-contact-ratio spur gears[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1991, 113(12): 473-480.

[4] 王三民, 纪名刚. 高速大重合度直齿圆柱齿轮的齿廓最佳修形研究[J]. 航空学报, 1996, 17(1): 121-124.
WANG Sanmin, JI Minggang. Study on the best profile

modification of high-speed spur gears with high-contact-ratio[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1996, 17(1): 121-124. (in Chinese)

[5] 方宗德, 沈允文. 斜齿轮传动鼓形齿的优化设计[J]. 航空动力学报, 1992, 7(1): 27-30.
FANG Zongde, SHEN Yunwen. Optimization design of drum helical gear. [J]. Journal of Aerospace Power, 1992, 7(1): 27-30. (in Chinese)

[6] 方宗德, 赵宁. 圆柱齿轮三维修形的计算与实验[J]. 制造技术与机床, 1995, 3: 24-27.
FANG Zongde, ZHAO Ning. Calculation and experimental of modification cylindrical gear [J]. Manufacturing Technology and Machine, 1995, 3: 24-27. (in Chinese)

[7] 唐增宝, 钟毅芳. 修形参数对齿轮动态性能影响的分析研究[J]. 机械传动, 1994, 18(3): 29-30.
TANG Zengbao, ZHONG Yifang. Analyses for influences of profile modification parameters on dynamic characteris [J]. Journal of Mechanical Transmission, 1994, 18(3): 29-30. (in Chinese)

[8] 孙月海, 张策, 熊光彤, 等. 减小齿轮传动误差波动的渐开线直齿齿轮齿廓修形研究[J]. 天津大学学报, 2001, 34(2): 214-216.
SUN Yuehai, ZHANG Ce, XIONG Guangtong, et al. Reserch on modification of involute spur gear tooth profile reducing transmission error[J]. Journal of Tianjin University, 2001, 34(2): 214-216. (in Chinese)

[9] 王成, 方宗德, 郭琳琳, 等. 人字齿轮齿廓修形优化设计与试验研究[J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(2): 224-227.
WANG Cheng, FANG Zongde, GUO Linlin, et al. Modification optimization and test of double helical gears[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2010, 28(2): 224-227. (in Chinese)

[10] 杨杰. 人字齿轮传动的高重合度设计与修形研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2012, 41-57.
YANG Jie. Research on high contact ratio design and modification of double helical gear transmission[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2012, 41-57. (in Chinese)

[11] Litvin. Gear geometry and applied theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[12] 赵宁, 曾晓春, 郭辉, 等. 斜齿面齿轮齿面仿真及其轮齿接触分析[J]. 航空动力学报, 2008, 23(10): 1927-1932.
ZHAO Ning, ZENG Xiaochun, GUO Hui, et al. Tooth contact analysis of face gear drive with helical pinion and simulation of tooth face[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(10): 1927-1932. (in Chinese)

[13] 方宗德. 修形斜齿轮的轮齿接触分析[J]. 航空动力学报, 1997, 12(3): 247-249.
FANG Zongde. Tooth contact analysis of modification helical Gear[J]. Journal of Aerospace Power, 1997, 12(3): 247-249. (in Chinese)

[14] 王成. 人字齿轮啮合特性与修形设计研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2009, 12-14.
WANG Cheng. The research of meshing characteristic and modification of double helical gears[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2009, 12-14. (in Chinese)

[15] 高媛. 非支配排序遗传算法(NSGA)的研究与应用[D]. 杭州: 浙江大学, 2006, 23-30.
GAO Yuan. Reserch and application of fast non-dominated sorting genetic algorithm[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2006, 23-30. (in Chinese)