

## 平流层飞艇飞行模态分析\*

杨跃能, 郑伟, 闫野, 邵汉斌

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**平流层飞艇的总体布局、升空原理和工作模式明显不同于导弹、飞机等传统飞行器,其动力学特性亦不同于上述飞行器,须深入研究其飞行动力学的基本特性、一般规律和内在机理。针对此问题,系统研究了平流层飞艇的飞行模态。采用小扰动方法推导了平流层飞艇的线性运动方程,将其解耦分组为纵向运动方程和横侧向运动方程;定义模态及模态参数,研究平流层飞艇的模态分析方法;通过计算分析状态方程的特征值和特征向量,研究了平流层飞艇的飞行模态。结果表明:纵向运动由浮沉、浪涌和摆动三种模态叠加而成,横侧向运动由偏航衰减、侧滑衰减和滚转振荡三种模态叠加而成。

**关键词:**飞行力学;平流层飞艇;运动方程;运动模态;特征向量

**中图分类号:**V429 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2015)04-057-08

## Flight mode analysis for stratospheric airships

YANG Yueneng, ZHENG Wei, YAN Ye, SHAO Hanbin

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The aerodynamic shape, overall design and operation principle of stratospheric airships are different from the conventional aircrafts such as airplane and missile, and the flight mechanism. The dynamics characteristics of the stratospheric airship are different from the conventional aircrafts. Therefore, the inherent mechanism and characteristics of the stratospheric airship need to be further investigated. The linearization equations of motion for stratospheric airship were derived by using the "small disturbance" theory, which could be divided into longitudinal motion and lateral-directional motion. The flight modes and mode parameters were defined, and an analytical method was proposed to analyze the flight dynamics. Flight modes of the stratospheric airship were investigated based on eigenvalue and eigenvector of the state equations. Results show that the longitudinal motion includes three modes: heave mode, surge mode and pendulum mode, whereas the lateral motion includes another three modes: yaw mode, sideslip mode and roll oscillation mode.

**Key words:** flight dynamics; stratospheric airship; motion equations; flight mode; eigenvector

临近空间是指距地面 20 ~ 100km 高度之间的空间范围,介于常规航空器的最高飞行高度和航天器的最低轨道高度之间,是跨接航空与航天的枢纽<sup>[1]</sup>。随着航天科技的迅猛发展,人类对临近空间的认识逐步深化,其特有的应用价值和战略意义日益凸显,成为各航天大国关注的焦点<sup>[2]</sup>。临近空间飞行器是指能够在临近空间区域飞行并执行特定任务的飞行器,按飞行速度可分为两大类<sup>[3]</sup>:一类是低动态飞行器,包括高空气球、平流层飞艇、高空长航时无人机等;另一类是高动态飞行器,包括高超声速滑翔飞行器、高超声速巡航飞行器等。其中,平流层飞艇以其显著的应用优势成为临近空间飞行器技术的主要研究方向之一<sup>[4]</sup>。

平流层飞艇是指依靠浮升气体提供静升力,

依靠推进系统和控制系统实现操纵飞行,长期工作在平流层平均风速较小的高度范围,并执行特定任务的浮空类飞行器。平流层飞艇的总体布局、升空原理和工作模式不同于导弹、飞机等飞行器,具有以下特点:气动外形为流线型轴对称旋转体;主要依靠浮升气体提供静升力;体积/质量比大、飞行速度低,惯性特性显著;工作模式多为低速巡航和区域驻留。上述特点使得平流层飞艇的动力学特性不同于导弹、飞机等飞行器,因此,须深入研究其飞行动力学的基本特性、一般规律和内在机理。Mueller 等推导了高空飞艇 (High Altitude Airship, HAA) 的动力学模型,基于小扰动线性化方程,仿真研究了其开环响应特性<sup>[5]</sup>。欧阳晋等研究了“致远一号”飞艇的动力学建模问题,推导了六自由度运动方程,并对其纵向运动进

\* 收稿日期:2014-12-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11502288)

作者简介:杨跃能(1984—),男,湖南邵阳人,讲师,博士,E-mail:yangyueneng@163.com

行了理论分析和仿真研究<sup>[6]</sup>。Li Yuwen 等建立了 Skyship-500 飞艇动力学模型,并通过仿真试验分析了飞艇的运动模态<sup>[7]</sup>。文献[8]采用 Newton-Euler 方法推导了矢量形式的六自由度动力学模型,采用近似线性化方法和 Lyapunov 稳定性理论研究了飞艇的运动稳定性。王晓亮以某型试验飞艇的非线性动力学模型为研究对象,采用近似线性化方法分析了飞艇的运动稳定性和可控性<sup>[9]</sup>。

上述文献为平流层飞艇动力学特性研究提供了借鉴,但是对平流层飞艇飞行模态的物理成因和内在机理尚缺乏系统深入的研究。针对这一问题,杨跃能等采用小扰动方法推导了平流层飞艇的线性化运动方程,研究了平流层飞艇的模态分析方法;通过计算分析状态方程的特征值和特征向量,系统研究了平流层飞艇的飞行模态,揭示了其一般规律和内在机理。

## 1 平流层飞艇动力学模型

### 1.1 坐标系及运动参数定义

如图 1 所示,定义地面坐标系  $o_e x_e y_e z_e$  和体坐标系  $o_b x_b y_b z_b$ <sup>[7]</sup>。运动参数定义如下:位置矢量  $\mathbf{R} = [x, y, z]^T$ ,  $x, y, z$  分别为轴向、侧向和垂直方向的位移;姿态角矢量  $\boldsymbol{\Omega} = [\theta, \psi, \phi]^T$ ,  $\theta, \psi, \phi$  分别为俯仰角、偏航角和滚转角;速度矢量  $\mathbf{v} = [u, v, w]^T$ ,  $u, v, w$  分别为轴向、侧向和垂直方向的速度;角速度矢量  $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$ ,  $p, q, r$  分别为滚转、俯仰和偏航角速度。 $CV, CG$  分别为平流层飞艇的浮心和重心,  $CV$  到  $CG$  的矢量为  $\mathbf{r}_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ 。

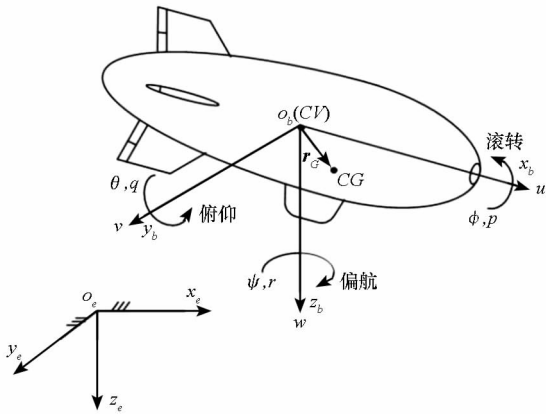


图 1 坐标系及运动参数示意图

Fig. 1 Coordinate frames and motion variables

### 1.2 线性化运动方程

采用小扰动方法对平流层飞艇六自由度运动

方程<sup>[10]</sup>进行线性化,可得纵向线性运动方程和横侧向线性运动方程。

#### 1.2.1 纵向线性运动方程

平流层飞艇的纵向线性运动方程可表示为<sup>[11]</sup>:

$$\mathbf{M}_L \dot{\mathbf{x}}_L = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_L + \mathbf{B}_L \mathbf{u}_L \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{x}_L = [u, w, q, \theta]^T$  为状态向量;  $\mathbf{u}_L = [T, v, \delta_e]^T$  为控制向量,  $\delta_e$  为等效水平舵,  $T$  为螺旋桨推力大小,  $v$  为推力矢量与  $x_b o_b z_b$  面之间的夹角。

$$\mathbf{M}_L = \begin{bmatrix} m + m_{11} & 0 & mz_C & 0 \\ 0 & m + m_{22} & mx_C & 0 \\ mz_C & -mx_C & I_y + m_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta \\ M_u & M_w & M_q & M_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} X_T & X_v & X_{\delta_e} \\ Z_T & Z_v & Z_{\delta_e} \\ M_T & M_v & M_{\delta_e} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $X_i, Z_i, M_i (i = u, w, q, \theta, T, v, \delta_e)$  分别为轴向力、垂直方向力以及俯仰力矩对纵向运动参数和控制量的偏导数<sup>[10,12]</sup>。

式(1)等号两边同时左乘  $\mathbf{M}_L^{-1}$ , 可得:

$$\dot{\mathbf{x}}_L = \bar{\mathbf{A}}_L \mathbf{x}_L + \bar{\mathbf{B}}_L \mathbf{u}_L \quad (5)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{A}}_L = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} \bar{X}_u & \bar{X}_w & \bar{X}_q & \bar{X}_\theta \\ \bar{Z}_u & \bar{Z}_w & \bar{Z}_q & \bar{Z}_\theta \\ \bar{M}_u & \bar{M}_w & \bar{M}_q & \bar{M}_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_L = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \bar{X}_T & \bar{X}_v & \bar{X}_{\delta_e} \\ \bar{Z}_T & \bar{Z}_v & \bar{Z}_{\delta_e} \\ \bar{M}_T & \bar{M}_v & \bar{M}_{\delta_e} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 1.2.2 横侧向线性运动方程

平流层飞艇横侧向线性运动方程可表示为:

$$\mathbf{M}_S \dot{\mathbf{x}}_S = \mathbf{A}_S \mathbf{x}_S + \mathbf{B}_S \mathbf{u}_S \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{x}_S = [v, p, r, \phi]^T$  为状态向量;  $\mathbf{u}_S = [\mu, \delta_r]^T$  为控制向量,  $\delta_r$  为等效方向舵,  $\mu$  为推力矢量与  $x_b o_b z_b$  面之间的夹角。

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} m + m_{22} & -mz_C & mx_C & 0 \\ -mz_C & I_x + m_{44} & -I_{xz} & 0 \\ mx_C & -I_{xz} & I_y + m_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_r & Y_\phi \\ L_v & L_p & L_r & L_\phi \\ N_v & N_p & N_r & N_\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{B}_S = \begin{bmatrix} Y_\mu & Y_{\delta_r} \\ L_\mu & L_{\delta_r} \\ N_\mu & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中,  $Y_i, L_i, N_i (i = v, p, r, \phi, \mu, \delta_r)$  分别为侧向力、滚转力矩以及偏航力矩对横侧向运动参数和控制向量的偏导数<sup>[11,13]</sup>:

式(8)等号两边同时左乘  $\mathbf{M}_S^{-1}$ , 可得:

$$\dot{\mathbf{x}}_S = \bar{\mathbf{A}}_S \mathbf{x}_S + \bar{\mathbf{B}}_S \mathbf{u}_S \quad (12)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{A}}_S = \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} \bar{Y}_v & \bar{Y}_p & \bar{Y}_r & \bar{Y}_\phi \\ \bar{L}_v & \bar{L}_p & \bar{L}_r & \bar{L}_\phi \\ \bar{N}_v & \bar{N}_p & \bar{N}_r & \bar{N}_\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_S = \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{B}_S = \begin{bmatrix} \bar{Y}_\mu & \bar{Y}_{\delta_r} \\ \bar{L}_\mu & \bar{L}_{\delta_r} \\ \bar{N}_\mu & \bar{N}_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 2 模态分析方法

自由扰动运动是指在无控制输入和无干扰条件下, 仅由运动参数的初值所引起的扰动运动。在数学上, 自由扰动运动为小扰动运动方程的齐次方程在非零初值条件下的解。在物理上, 自由扰动运动为飞艇受到瞬时扰动后的运动响应。自由扰动运动反映了平流层飞艇运动的固有特性<sup>[14]</sup>, 因此, 可以通过平流层飞艇的自由扰动运动来研究其模态特征。

### 2.1 特征值及特征向量

特征值及特征向量是自由扰动运动中最重要特征量, 据此可以导出自由扰动运动的一般性质。特征值决定自由扰动运动的模态及运动稳定性; 特征向量决定各运动模态中各运动参数不同的幅值比和相位差, 从而决定了各运动模态中运动参数扰动的主次要素<sup>[15]</sup>。

对于自由扰动运动问题, 平流层飞艇的状态方程可表示为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (15)$$

对于  $n$  维方阵  $\mathbf{A}$  和  $n$  维列向量  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots$

$v_n]^T$ , 若存在  $\lambda$ , 使得

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (16)$$

则称  $\lambda$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值,  $\mathbf{v}$  为特征值  $\lambda$  所对应的特征向量。

由式(16)可得:

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{E}$  为  $n$  维单位矩阵。

若式(17)存在非零解, 则有以下特征方程成立:

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0 \quad (18)$$

当纵向和横侧向扰动运动描述为 4 阶的状态方程时, 对应于特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的特征向量为:

$$\mathbf{v}_i = [f_1(\lambda_i), f_2(\lambda_i), f_3(\lambda_i), f_4(\lambda_i)]^T \quad (19)$$

式中,  $f_1(\lambda_i), \dots, f_4(\lambda_i)$  为特征矩阵  $(\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A})$  的某一行的 4 个代数余子式。

特征矢量  $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  可用比值表示为:

$$\mathbf{v}_i = \left[ \frac{f_1(\lambda_i)}{f_4(\lambda_i)}, \frac{f_2(\lambda_i)}{f_4(\lambda_i)}, \frac{f_3(\lambda_i)}{f_4(\lambda_i)}, 1 \right]^T \quad (20)$$

若特征值  $\lambda_i$  为实数, 则特征矢量各元素也为实数, 可直接用比值表示; 若特征值  $\lambda_i$  为复数, 则特征矢量各元素也为复数, 此时其比值可用幅值比和相位差表示。

### 2.2 模态及模态参数

不同特征值对应的扰动运动的类型不同, 每一个实数特征值或一对复数特征值都对应着一个基本运动形态, 称为模态<sup>[16]</sup>。每一个特征值所对应的模态运动的线性叠加, 构成了平流层飞艇的扰动运动。

以二阶系统为例讨论模态<sup>[17]</sup>, 二阶系统的标准特征方程可表示为:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (21)$$

式中,  $\xi, \omega_n$  分别为系统的阻尼比和无阻尼自振频率。

式(21)对应的微分方程为:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (22)$$

式(22)可以在给定  $x(0), \dot{x}(0)$  初值的条件下进行求解。

式(21)的特征根为:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \triangleq \eta + i\omega \quad (23)$$

由式(23)可得,  $\lambda_{1,2}$  或为一对共轭复根, 或为两个实根。

式(22)的解为:

$$x(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} \quad (24)$$

其中,  $X_1, X_2$  由初始条件  $x(0), \dot{x}(0)$  确定。

如式(24)所示,当 $\lambda_{1,2}$ 为两个实根时, $x(t)$ 的运动为两个指数型单调运动的叠加。若 $\lambda_{1,2}$ 为一对共轭复根,则(24)可表示为:

$$x(t) = 2 |X_1| e^{\eta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (25)$$

式中,振幅 $|X_1|$ 和初始相位 $\varphi$ 由 $x(0), \dot{x}(0)$ 确定。

常用的模态参数定义如下<sup>[16]</sup>:

1) 半衰期 $t_{1/2}$ 或倍幅时间 $t_2$ 。半衰期 $t_{1/2}$ 描述了模态运动参数变化至初始值的一半(模态收敛)所需时间;倍幅时间 $t_2$ 则描述了模态运动参数变化至初始值的两倍(模态发散)所需时间。由式(25)可得,若模态收敛,则有

$$e^{\lambda_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad e^{\eta_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

求解可得

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{或} \quad t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\eta}$$

当模态发散时,则有

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{或} \quad t_2 = \frac{\ln 2}{\eta}$$

2) 振荡频率 $\omega$ 或周期 $T$ 。对于振荡型模态,频率 $\omega$ (rad/s)表示单位时间内的振荡次数,周期 $T$ (s)表示振荡一周所需的时间。由式(23)可得

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

3) 半衰期内振荡次数 $N_{1/2}$ 。半衰期内振荡次数 $N_{1/2}$ 表明振荡模态频率与阻尼之间的关系, $N_{1/2}$ 值越大,则表示振荡频率过高或振荡阻尼过小。由定义可得

$$N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T} = \frac{\ln 2 \sqrt{1 - \xi^2}}{2\pi\xi}$$

上述关于模态及模态参数的定义,适用于各类由线性常微分方程描述的高阶系统。对于4阶的纵向(或横侧向)扰动运动方程,当特征根为一对共轭复根 $\eta \pm i\omega$ 和两个不同实根 $\lambda_3, \lambda_4$ 时,扰动运动规律为

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{\eta t} \cos(\omega t + \varphi_1) + X_{3,1} e^{\lambda_3 t} + X_{4,1} e^{\lambda_4 t} \\ \vdots \\ x_4(t) = A_4 e^{\eta t} \cos(\omega t + \varphi_4) + X_{3,4} e^{\lambda_3 t} + X_{4,4} e^{\lambda_4 t} \end{cases}$$

式中, $x_1, \dots, x_4$ 为扰动状态量。

每一个特征根对应的模态在各个状态量中的表现关系(振荡模态振幅比例 $A_1 : A_2 : \dots : A_4$ ,相位差 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_4$ 和单调模态幅值比)取决于该特征根所对应的特征矢量。

### 3 平流层飞艇飞行模态

#### 3.1 纵向运动模态

以某型飞艇为例研究其飞行模态。 $\bar{Z}_u, \bar{Z}_\theta, \bar{M}_u$ 的值通常很小,纵向运动的特征矩阵可以近似为:

$$\bar{A}_L = \begin{bmatrix} \bar{X}_u & \bar{X}_w & \bar{X}_q & \bar{X}_\theta \\ 0 & \bar{Z}_w & \bar{Z}_q & 0 \\ 0 & \bar{M}_w & \bar{M}_q & \bar{M}_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$\bar{A}_L$ 的近似特征多项式为

$$\Delta_L = \det(sI - \bar{A}_L) = \begin{vmatrix} s - \bar{X}_u & -\bar{X}_w & -\bar{X}_q & -\bar{X}_\theta \\ 0 & s - \bar{Z}_w & -\bar{Z}_q & 0 \\ 0 & -\bar{M}_w & s - \bar{M}_q & -\bar{M}_\theta \\ 0 & 0 & -1 & s \end{vmatrix}$$

$$\approx (s - \bar{X}_u)(s - \bar{Z}_w)(s^2 - \bar{M}_q s - \bar{M}_\theta) \quad (27)$$

$\bar{A}_L$ 的近似特征值为:

$$\lambda_1 = \bar{X}_u, \lambda_2 = \bar{Z}_w, \lambda_{3,4} = \frac{\bar{M}_q \pm \sqrt{\bar{M}_q^2 + 4\bar{M}_\theta}}{2} i$$

根据纵向运动的特征矩阵式(26)计算可得 $\bar{A}_L$ 的精确特征值为:

$$\lambda_1 = -0.022, \lambda_2 = -0.877, \lambda_{3,4} = -0.072 \pm 0.097i$$

根据纵向运动方程的特征值,可将飞艇纵向运动分为以下三个模态:

1) 浪涌模态。特征值 $\lambda_1 = \bar{X}_u$ 对应的模态为浪涌模态,如图2(a)所示。该模态表征轴向速度 $u$ 的增量变化类似于“海浪的涌动”,所以称之为浪涌模态。近似特征值 $\lambda_1 = \bar{X}_u$ 体现了由轴向速度 $u$ 引起的阻力变化,通常为较小的负值。因此,浪涌模态的时间常数 $T_u = -1/\bar{X}_u$ 较大,为缓慢模态。根据特征矩阵的精确特征值分析可得:特征值 $\lambda_1 = -0.022$ 的绝对值远小于特征值 $\lambda_2 = -0.877$ 和复数特征值 $\lambda_{3,4} = -0.072 \pm 0.097i$ 实部的绝对值。因此, $\lambda_1$ 对应的浪涌模态为呈指数规律变化的缓慢模态。由图3可知,轴向速度增量 $\Delta u$ 由初值按指数规律递增,120s后增加至8.9m/s,表征了浪涌模态。

2) 浮沉模态。特征值 $\lambda_2 = \bar{Z}_w$ 对应的模态为浮沉模态,如图2(b)所示。该模态表征垂直方向速度分量 $w$ 的变化。 $w$ 的变化导致垂直位移发生变化,类似于“物体在水中的浮沉”,所以称之为浮沉模态。近似特征值 $\lambda_2 = \bar{Z}_w$ 体现了由飞行速度的垂直分量 $w$ 引起的阻力变化, $\bar{Z}_w$ 通常为负

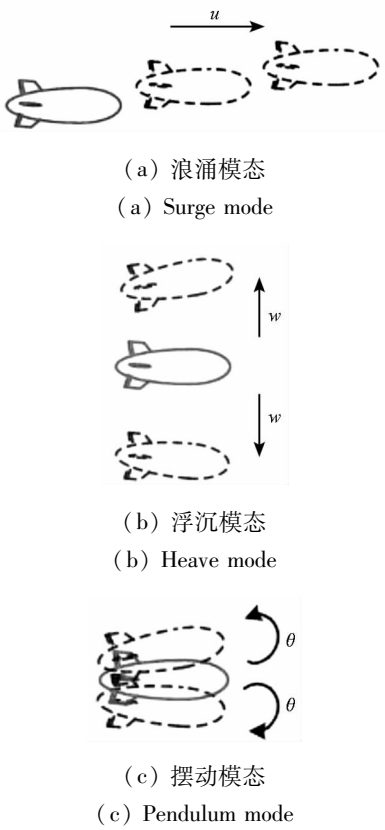


图2 纵向运动模态示意图

Fig. 2 Modes of longitudinal motion

值,且随着速度的增加而负向增大。浮沉模态呈指数规律衰减,时间常数为  $T_w = -1/\bar{Z}_w$ 。根据特征矩阵的精确特征值分析可得:特征值  $\lambda_2 = -0.877$  的绝对值远大于特征值  $\lambda_1 = -0.022$  和复数特征值  $\lambda_{3,4} = -0.072 \pm 0.097i$  实部的绝对值。因此,  $\lambda_2$  对应的浮沉模态为快衰减运动模态。由图3可得,垂直速度增量  $\Delta w$  先减小后增加,约40s后收敛至  $-1.5\text{m/s}$ ,表征了浮沉模态。

3) 摆动模态。特征值  $\lambda_{3,4} = \frac{\bar{M}_q \pm \sqrt{\bar{M}_q^2 + 4\bar{M}_\theta}}{2} i$

为一对共轭复数,对应的模态为摆动模态,如图2(c)所示。该模态表征飞艇在俯仰方向的上下摆动,称之为摆动模态。近似特征值  $\lambda_{3,4}$  的表达式中,  $\bar{M}_q$  体现了由俯仰角速度  $q$  引起的俯仰阻尼力矩,  $\bar{M}_\theta$  体现了由重力引起的俯仰阻尼力矩。由于飞艇的重心与浮心不重合,通常重心位于浮心之下,所以初始扰动将导致飞艇在俯仰方向上下运动,俯仰角随之变化,如图3所示,表征了摆动模态。飞艇纵向运动模态参见表1<sup>[11]</sup>。

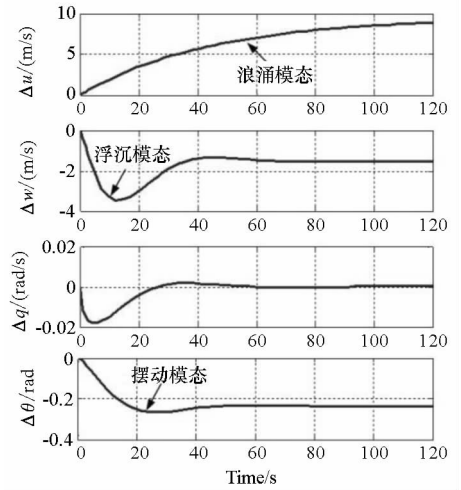


图3 纵向运动参数变化曲线

Fig. 3 Variables of longitudinal motion

表1 纵向运动模态参数

Tab. 1 Mode parameters of longitudinal motion

特征根	$t_{1/2}/\text{s}$	$T/\text{s}$	$\xi$	$\omega_n/(\text{rad/s})$	模态
$\lambda_1 = -0.022$	37.506	—	—	—	浪涌
$\lambda_2 = -0.877$	0.791	—	—	—	浮沉
$\lambda_{3,4} = -0.072 \pm 0.097i$	9.627	64.742	0.596	0.121	摆动

对应于  $\lambda_1$  的特征矢量为:

$$\mathbf{v}_1 = [-1 \quad -0.0004 \quad 0 \quad -0.0012]^T$$

对应于  $\lambda_2$  的特征矢量为:

$$\mathbf{v}_2 = [-0.272 \quad -0.961 \quad 0.028 \quad -0.032]^T$$

对应于  $\lambda_{3,4}$  的特征矢量为:

$$\mathbf{v}_{3,4} = [-0.041 \mp 0.077i \quad 0.995 \quad 0.003 \pm 0.004i \quad 0.011 \mp 0.039i]^T$$

因为特征矢量仅提供状态变量的相对变化信息,所以可按比值给出特征矢量,假定  $\theta$  对应的特征矢量元素为1,则有:

$$\mathbf{v}_1 = [833.333 \quad 0.333 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{v}_2 = [8.527 \quad 30.138 \quad 0.878 \quad 1]^T$$

$\lambda_{3,4}$  的特征矢量按比值给出时,可用幅值比及相位差表示为:

$$|\mathbf{v}_{3,4}| = [2.153 \quad 24.554 \quad 0.123 \quad 1]^T$$

$$\Delta\varphi = [43.78^\circ \quad -74.24^\circ \quad 52.61^\circ \quad 0^\circ]^T$$

纵向运动的模态特征结构见表2。

表 2 纵向运动模态特征结构

Tab. 2 Mode structure of longitudinal motion

状态变量	浪涌模态 特征矢量	浮沉模态 特征矢量	摆动模态 特征矢量
$\Delta u$	833.333	8.527	1.554 + 1.489i
$\Delta w$	0.333	30.138	6.665 - 23.633i
$\Delta q$	0	0.878	0.074 + 0.098i
$\Delta \theta$	1	1	1
$\Delta u: \Delta w:$	833.333:	8.527:	2.153e <sup>43.7°</sup> :
$\Delta q: \Delta \theta$	0.333:	30.138:	24.55e <sup>-74.2°</sup> :
	0:1	0.878:1	0.123e <sup>53.6°</sup> :1

### 3.2 横侧向运动模态

$\bar{Y}_p, \bar{N}_p$  的值通常很小,横侧向运动的特征矩阵(13)近似为:

$$\bar{A}_S = \begin{bmatrix} \bar{Y}_v & 0 & \bar{Y}_r & \bar{Y}_\phi \\ \bar{L}_v & \bar{L}_p & \bar{L}_r & \bar{L}_\phi \\ \bar{N}_v & 0 & \bar{N}_r & \bar{N}_\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$\bar{A}_S$  的近似特征多项式为:

$$\Delta_S = \det(sI - \bar{A}_S) = \begin{vmatrix} s - \bar{Y}_v & 0 & -\bar{Y}_r & -\bar{Y}_\phi \\ -\bar{L}_v & s - \bar{L}_p & -\bar{L}_r & -\bar{L}_\phi \\ -\bar{N}_v & 0 & s - \bar{N}_r & -\bar{N}_\phi \\ 0 & 0 & -1 & s \end{vmatrix}$$

$$\approx (s - \bar{Y}_v - \bar{N}_r) \left( s - \bar{Y}_v - \frac{\bar{L}_v \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi} \right) \left\{ s^2 - \left( \frac{\bar{L}_v \bar{L}_p \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi} \right) s - \bar{L}_\phi \right\} \quad (29)$$

式中,  $\bar{Y}'_v = \bar{Y}_v - \left( \frac{\bar{Y}_r \bar{N}_v}{\bar{N}_r} \right)$ ,  $\bar{Y}'_\phi = \bar{Y}_\phi - \left( \frac{\bar{Y}_r \bar{N}_\phi}{\bar{N}_r} \right)$ 。

$\bar{A}_S$  的近似特征值为:

$$\lambda_1 = \bar{Y}_v + \bar{N}_r, \lambda_2 = \bar{Y}'_v + \frac{\bar{L}_v \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi},$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{\left( \frac{\bar{L}_v \bar{L}_p \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\bar{L}_v \bar{L}_p \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi} \right)^2 + 4\bar{L}_\phi}}{2} i$$

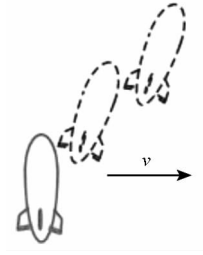
根据横侧向运动的特征方程式(14)计算可得  $\bar{A}_S$  的精确特征值为:

$$\lambda_1 = -0.127, \lambda_2 = -0.889, \lambda_{3,4} = -0.149 \pm 0.722i$$

根据横侧向运动方程的特征值,可将飞艇横侧向运动分为以下三个模态:

1) 侧滑衰减模态。特征值  $\lambda_1 = \bar{Y}_v + \bar{N}_r$  对应的模态为侧滑衰减模态,如图 4(a)所示。特征值  $\lambda_1$  的表达式中,  $\bar{Y}_v$  体现了侧向速度  $v$  引起的侧向阻力,  $\bar{N}_r$  体现了由偏航角速度  $r$  引起的航向阻尼力矩,因此  $\lambda_1$  为负值。该模态呈指数规律衰减,时间常数为  $T_v = -1/(\bar{Y}_v + \bar{N}_r)$ ,且随着侧向速度

$v$  的增加,其衰减速度增加,所以称之为侧滑衰减模态。图 5 中,侧向速度增量  $\Delta v$  由初值逐渐收敛至 1.8m/s,且响应曲线的斜率递减,表征了侧滑衰减模态。



(a) 侧滑衰减模态

(a) Sideslip subsidence mode



(b) 偏航衰减模态

(b) Yaw subsidence mode



(c) 滚转振荡模态

(c) Roll oscillation mode

图 4 横侧向运动模态示意图

Fig. 4 Mode of lateral motion of airship

2) 偏航衰减模态。特征值  $\lambda_2 = \bar{Y}'_v + \frac{\bar{L}_v \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi}$  对

应的模态为偏航衰减模态,如图 4(b)所示。特征值  $\lambda_2$  的表达式中,  $\bar{Y}_r$  体现了由偏航角速度  $r$  引起的侧向阻力,  $\bar{N}_r$  体现了由偏航角速度  $r$  引起的偏航阻尼力矩,  $\bar{Y}_\phi$  体现了由滚转角  $\phi$  引起的侧向阻力,  $\bar{N}_\phi$  体现了由滚转角  $\phi$  引起的偏航阻尼力矩,因此  $\lambda_2$  为负值。该模态呈指数规律衰减,时间常数为  $T_r = -1/\left( \bar{Y}'_v + \frac{\bar{L}_v \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi} \right)$ ,所以称之为偏航衰减模态。图 5 中,偏航角速度增量  $\Delta r$  呈指数规律衰减,约 30s 收敛至 -0.03rad/s,表征了偏航衰减模态。特征值  $\lambda_2$  的表达式中,  $\bar{Y}_\phi$  和  $\bar{N}_\phi$  表明滚转运动和偏航运动存在一定程度的耦合。

3) 滚转振荡模态。特征值  $\lambda_{3,4} = \frac{(\bar{L}_v \bar{L}_p \bar{Y}'_\phi)}{\bar{L}_\phi} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{L}_v \bar{L}_p \bar{Y}'_\phi}{\bar{L}_\phi}\right)^2 + 4\bar{L}_\phi} i$  为一对共轭复数,对应的模态为滚转振荡模态,如图4(c)所示。

该模态表征飞艇的滚转振荡运动,称之为滚转振荡模态。近似特征值  $\lambda_{3,4}$  的表达式中,  $\bar{L}_p$  体现了由滚转角速度  $p$  引起的滚转阻尼力矩,  $\bar{L}_\phi$  体现了由重力引起的滚转阻尼力矩。与俯仰摆动模态类似,由于飞艇的重心与浮心不重合,通常重心位于浮心之下,所以初始扰动将导致飞艇的滚转运动发生振荡。图5中,滚转角速度  $p$  和滚转角  $\phi$  均有较为明显的振荡现象,表征了滚转振荡模态。

飞艇横侧向运动模态参数见表3<sup>[11]</sup>。飞艇横侧向运动的模态特征结构见表4。

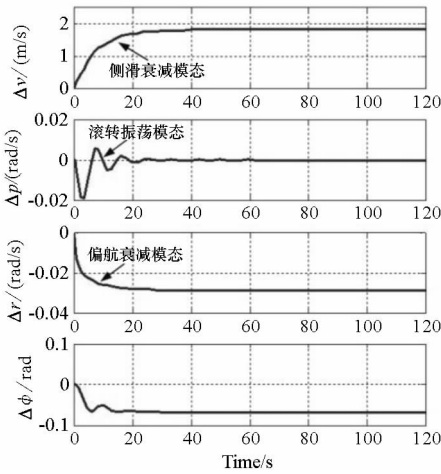


图5 横侧向运动参数变化曲线  
Fig.5 Variables of lateral motion

表3 横侧向运动模态参数

Tab.3 Mode parameters of lateral motion

特征根	$t_{1/2}/s$	$T/s$	$\xi$	$\omega_n/(\text{rad/s})$	模态
$\lambda_1 = -0.127$	5.458	—	—	—	侧滑衰减
$\lambda_2 = -0.889$	0.779	—	—	—	偏航衰减
$\lambda_{3,4} = -0.149 \pm 0.722i$	4.625	8.698	0.202	0.738	滚转振荡

对应于  $\lambda_1$  的特征矢量为:

$$\mathbf{v}_1 = [-1 \quad -0.003 \quad 0.006 \quad 0.021]^T$$

对应于  $\lambda_2$  的特征矢量为:

$$\mathbf{v}_2 = [0.98 \quad 0.107 \quad -0.116 \quad -0.12]^T$$

对应于  $\lambda_{3,4}$  的特征矢量为:

$$\mathbf{v}_{3,4} = [-0.959 \quad -0.164 \pm 0.027i \quad 0.002 \mp 0.004 \quad 0.08 \pm 0.211i]^T$$

表4 横侧向运动模态特征结构

Tab.4 Mode structure of lateral motion

状态变量	侧滑衰减模态 特征矢量	偏航衰减模态 特征矢量	滚转振荡模态 特征矢量
$\Delta v$	47.619	-8.167	-1.507 + 3.974i
$\Delta p$	0.143	-0.892	-0.148 + 0.722i
$\Delta r$	-0.286	0.967	-0.014 - 0.017i
$\Delta \phi$	1	1	1
$\Delta v: \Delta p:$	47.619:	-8.167:	4.25e <sup>110.77°</sup> :
$\Delta r: \Delta \phi$	0.143:	-0.892:	0.737e <sup>101.57°</sup> :
	-0.286:1	0.967:1	0.021e <sup>-129.51°</sup> :1

假定  $\phi$  对应的特征矢量元素为1,则有:

$$\mathbf{v}_1 = [47.619 \quad 0.143 \quad -0.286 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{v}_2 = [-8.167 \quad -0.892 \quad 0.967 \quad 1]^T$$

$\lambda_{3,4}$  的特征矢量按比值给出时,可用幅值比及相位差表示为:

$$|\mathbf{v}_{3,4}| = [4.25 \quad 0.737 \quad 0.021 \quad 1]^T$$

$$\Delta \phi = [110.77^\circ \quad 101.57^\circ \quad -129.51^\circ \quad 0^\circ]^T$$

#### 4 结论

本文系统研究了平流层飞艇的飞行模态。采用小扰动方法将非线性运动方程线性化解耦为纵向和横侧向运动方程,以便于采用解析法研究平流层飞艇的运动规律。定义了平流层飞艇的模态及模态参数,通过计算分析运动状态方程的特征值和特征向量,研究了其飞行模态:纵向运动由浮沉、浪涌和摆动三种模态叠加而成,横侧向运动由偏航衰减、侧滑衰减和滚转振荡三种模态叠加而成。平流层飞艇飞行模态分析为控制系统设计和飞行试验提供了参考依据。此外,模态分析方法还可以拓展应用于高空气球、浮升组合式飞艇等浮空器,丰富和发展了浮空器飞行力学理论方法,对推动临近空间浮空器的发展应用具有重要价值。

#### 参考文献 (References)

[1] Wang W Q. Near-space vehicles: supply a gap between satellites and airplanes for remote sensing [J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2011, 26(4): 4-9.

[2] Young M, Keith L S, Pancotti A. An overview of advanced concepts for near space systems [C]//Proceedings of 45th AIAA Joint Propulsion Conference and Exhibit, Colorado, USA, 2009.

[3] Kurkcu C, Erhan H, Umur S. Unmanned aerial systems' near space operation concept [C]// Proceedings of 5th International Conference on Recent Advances in Space

- Technologies, Istanbul, Turkey, 2011.
- [4] Schaefer I, Kueke R, Lindstrand P. Airships as unmanned platforms challenge and chance [C]//Proceedings of 1st AIAA Technical Conference and Workshop on Unmanned Aerospace Vehicles, Virginia, USA, 2008.
- [5] Mueller J B, Paluszek M A, Zhao Y Y. Development of an aerodynamic model and control law design for a high altitude airship [C]//Proceedings of the 3rd AIAA Unmanned Unlimited Technical Conference, Workshop and Exhibit, Chicago, USA, 2004.
- [6] 欧阳晋, 屈卫东, 席裕庚. 平流层验证飞艇的建模与分析[J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(6): 956-960.  
OUYANG Jin, QU Weidong, XI Yugeng. Stratospheric verifying airship mode ling and analysis [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2003, 37(6): 956-960. (in Chinese)
- [7] Li Y W, Nahon M. Modeling and simulation of airship dynamics [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2007, 30(6): 1691-1700.
- [8] 杨跃能, 郑伟, 吴杰. 临近空间对地观测平台的矢量化建模及稳定性分析[J]. 国防科技大学学报, 2011, 33(3): 28-32.  
YANG Yueneng, ZHENG Wei, WU Jie. Vector modeling and stability analysis of a near space earth observation platform[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2011, 33(3): 28-32. (in Chinese)
- [9] 王晓亮. 平流层对地观测平台非线性气动力及其运动的研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2006.  
WANG Xiaoliang. Research on nonlinear aerodynamics and motion of a stratospheric earth observation platform [D]. Shanghai; Shanghai Jiaotong University, 2006. (in Chinese)
- [10] 杨跃能. 平流层飞艇动力学建模与控制方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2013.  
YANG Yueneng. Dynamics modeling and flight control for a stratospheric airship [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2013. (in Chinese)
- [11] Khoury G A, Gillett J D. Airship technology [M]. USA: Cambridge University Press, 1999.
- [12] Kulczycki E A, Johnson J R, Bayard D S, et al. On the development of parameterized linear analytical longitudinal airship models [C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, 2008.
- [13] Eric A, Kulczycki S M, Koehler A E, et al. Development of an analytical parameterized linear lateral dynamic model for an aerobot airship [C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Oregon, USA, 2011.
- [14] Etkin B, Reid L D. Dynamics of flight: stability and control[M]. 3rd ed. USA: Wiley, 1996.
- [15] 方振平, 陈万春, 张曙光. 航空飞行器飞行动力学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005.  
FANG Zhenping, CHEN Wanchun, ZHANG Shuguang. Flight control of aircraft [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2005. (in Chinese)
- [16] 吴森堂, 费玉华. 飞行控制系统[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005.  
WU Sentang, FEI Yuhua. Flight control system [M]. Beijing: Press of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005. (in Chinese)
- [17] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2007.  
HU Shousong. Automatic control theory [M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)