

采用状态转移矩阵的拦截中段制导方法*

柴华¹, 仲明², 梁彦刚¹

(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073;

2. 中国人民解放军 69006 部队, 新疆 乌鲁木齐 830001)

摘要:基于相对运动理论提出拦截中段制导方法。方法原理为,将拦截器初始轨迹与施加修正后的轨迹视为一主一从两空间目标,以相对运动理论描述从目标相对于主目标的运动规律,于是初始的修正量可由终点处相对状态求解。给出了一般形式的相对运动模型,运用几何法与变分法推导得到了 J_2 摄动影响下相对运动的状态转移矩阵,在此基础上,提出了采用状态转移矩阵的拦截中段制导方法。仿真算例表明,提出的方法能够为工程实际中的拦截中段制导提供有效支持。

关键词:中段制导;相对运动; J_2 摄动;状态转移矩阵

中图分类号: **文献标志码:** **文章编号:**1001-2486(2015)04-137-06

Midcourse guidance of interception using state transition matrix

CHAI Hua¹, ZHONG Ming², LIANG Yangang¹

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. The PLA Unit 69006, Wulumuqi 830001, China)

Abstract: On the basis of relative motion theory, a midcourse guidance method of exoatmospheric interception was developed. The mechanism of this method is that treating the initial and modified trajectories as chief and deputy space objects respectively, modeling the dynamics of the deputy relative to the chief by the relative motion theory and solving the initial corrections through the final relative states. The universal relative motion model was provided and then the state transition matrix of relative motion under the influence of J_2 disturbance was derived by employing the geometry and the variation method. Lastly the midcourse guidance method using state transition matrix was proposed on this basis. Simulation example shows that the proposed method serves as an efficient support for midcourse guidance of interceptors in practice.

Key words: midcourse guidance; relative motion; J_2 disturbance; state transition matrix

在导弹防御作战中,中段制导是指拦截器在助推段结束之后、末段导引开始之前,为消除环境噪声等因素造成的飞行状态误差,采用脉冲推力等方式实施一次或多次状态修正的过程。中段制导的效果好坏直接关系到拦截器能否捕获目标并在末段导引中占据优势的拦截几何,因而具有十分重要的作用^[1-3]。脉冲推力式的中段制导事实上可以抽象为一固定时间拦截问题,即给定初、终位置与飞行时间,求解初始需用速度的问题。在二体假设下,求解固定时间拦截问题有许多经典方法,如 Herrick 方法^[4]、Godal 方法^[4]、Lambert 飞行时间定理^[5]等。然而,当引入更为精确的引力场模型时,上述方法不再适用,需要探索更为有效的求解方法。

考虑到对于拦截中段制导这一特定的固定时

间拦截问题而言,飞行时间较短(约 200s)、速度修正量较小(约 100m/s),本文提出基于相对运动理论的求解方法。相对运动理论广泛地应用于卫星编队飞行、空间交会对接等领域,涌现出了 CW 方程、TH 方程等经典模型。通过引入三大假设:参考轨道偏心率为 0,地球引力为中心引力场,两目标距离远小于地心距, Clohessy 与 Wiltshire^[6]将非线性的相对运动模型简化为便于解析求解的线性时变微分方程组,即 CW 方程(亦称 Hill^[7]方程)。舍弃圆参考轨道假设, Tschauner 与 Hempel 推导得到了适用于椭圆参考轨道的线性相对运动模型,给出了以参考轨道真近点角/偏近点角表示的解析解,其相对运动模型被称为 TH 方程。Yamanaka 与 Ankersen^[8]引入变量替换,简化了 TH 方程的求解过程,推导了一种形式简洁的状

* 收稿日期:2015-06-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11272346)

作者简介:柴华(1988—),男,山西沁水人,博士研究生,E-mail:chaihua@nudt.edu.cn;

梁彦刚(通信作者),男,副教授,博士,E-mail:liangyg@nudt.edu.cn

态转移矩阵,并探讨了其与 CW 方程的一致性。尽管 CW 方程与 TH 方程在工程实际中得到了广泛应用,但两者均以二体中心引力场为前提,因此难以满足要求。Gim 与 Alfriend 等^[9-11]针对 J_2 摄动影响下的相对运动模型展开了研究,避免了直接求解复杂微分方程组,推导给出了相对运动方程的状态转移矩阵,为实现高精度的相对运动建模创造了条件。本文将以此状态转移矩阵为基础,提出一种有效的固定时间拦截问题求解策略,并探讨其在拦截中段制导中的实用性。

1 坐标系定义

所涉及的坐标系为地心惯性坐标系与当地垂直/当地水平坐标系,两者定义如下:

地心惯性 (Earth Centered Inertial, ECI) 坐标系,记为 I。原点 O_E 位于地心, $O_E x_1$ 轴在赤道平面内指向平春分点, $O_E z_1$ 轴垂直于赤道平面指向北极, $O_E y_1$ 轴与 $O_E x_1$ 、 $O_E z_1$ 轴垂直并满足右手定则,如图 1 所示。由于岁差与章动影响,春分点具有进动性。在建立地心惯性系时需指定春分点基准。本文采用的 ECI 系是以 2000 年 1 月 1 日 12:00:00 的平春分点为基准,因此又称为 J2000 坐标系。

当地垂直/当地水平 (Local Vertical Local Horizontal, LVLH) 坐标系,记为 L。原点 O 位于飞行器质心, Ox 轴指向飞行器地心矢径方向, Oy 轴在飞行器弹道(轨道)平面内垂直于 Ox 轴并指向速度方向, Oz 轴与 Ox 、 Oy 轴垂直并满足右手定则,如图 1 所示。

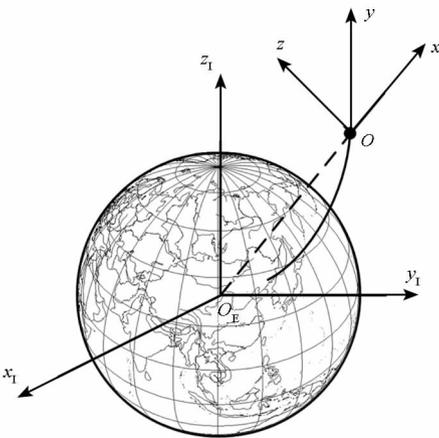


图 1 ECI 坐标系与 LVLH 坐标系

Fig. 1 ECI coordinate system and LVLH coordinate system

由 ECI 系到 LVLH 系的转换矩阵可由式(1)给出。

$$M_{I \rightarrow L} = M_3(\theta) M_1(i) M_3(\Omega) \quad (1)$$

式中, $\theta = \omega + f$ 为飞行器纬度幅角 (ω 为近地点角距, f 为真近点角), i 为轨道倾角, Ω 为升交点赤经。

2 相对运动方程

设空间中存在主目标与从目标两飞行器,两者在 ECI 系下的位置矢量分别为 R_c 与 R_d ,由经典轨道力学可知

$$\begin{cases} \ddot{R}_c = -\frac{\mu}{R_c^3} R_c + f_c \\ \ddot{R}_d = -\frac{\mu}{R_d^3} R_d + f_d \end{cases} \quad (2)$$

式中, μ 为地球引力常数, f_c 与 f_d 分别为两目标所受摄动力产生的加速度。

将从目标相对于主目标的位置矢量记作 $r = R_d - R_c$,那么有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \ddot{R}_d - \ddot{R}_c \\ &= -\frac{\mu}{R_d^3} R_d + f_d + \frac{\mu}{R_c^3} R_c - f_c \\ &= \frac{\mu}{R_c^3} \left[R_c - \left(\frac{R_c}{R_d} \right)^3 R_d \right] + f \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $f = f_d - f_c$ 为两目标摄动加速度之差。

以主目标 LVLH 系作为基准坐标系,记作 LC。式(3)在 LC 系中描述需要考虑绝对导数与相对导数的相互转换,即

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} + 2 \omega_c \times \frac{\delta r}{\delta t} + \omega_c \times (\omega_c \times r) + \dot{\omega}_c \times r \quad (4)$$

式中, ω_c 与 $\dot{\omega}_c$ 分别表示主目标角速度矢量与角加速度矢量。

结合式(3)、式(4)可得

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} + 2 \omega_c \times \frac{\delta r}{\delta t} + \omega_c \times (\omega_c \times r) + \dot{\omega}_c \times r \\ = \frac{\mu}{R_c^3} \left[R_c - \left(\frac{R_c}{R_d} \right)^3 R_d \right] + f \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)即为 LC 系下一般形式的相对运动方程。对应于不同的引力场模型,该方程具有不同的表现形式,其解析求解是十分困难的。在二体引力场假设下,可将式(5)线性化(即 TH 方程),并推导出形式简洁的状态转移矩阵,相关研究已经较为成熟。当考虑更为精确的引力场模型时,问题变得更加复杂。Alfriend 等学者对这一问题进行了研究,推导了 J_2 摄动影响下相对运动的状态转移矩阵。

3 状态转移矩阵

为避免直接求解微分方程带来的困难,Alfriend等学者采用几何法来推导相对运动方程的状态转移矩阵。该方法的主要思路为,将从目标相对于主目标的位置速度转换为轨道根数之差,以轨道根数之差随时间的变化来刻画相对状态的迁移。在推导过程中,需引入差分轨道根数的概念。首先给出两组相互等价的轨道根数:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\text{CL}} = [a, e, i, \Omega, \omega, f]^T \\ \mathbf{e}_{\text{NS}} = [a, \theta, i, q_1, q_2, \Omega]^T \end{cases} \quad (6)$$

式中: \mathbf{e}_{CL} 为经典轨道根数, a 为半长轴, e 为偏心率; \mathbf{e}_{NS} 为非奇异轨道根数, $q_1 = e \cos \omega$, $q_2 = e \sin \omega$ 。为避免经典轨道根数在描述圆轨道时出现的奇异现象,下文将采用非奇异轨道根数实现状态转移矩阵的推导。

差分轨道根数定义为从目标与主目标轨道根数之差,即

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{e} &= \mathbf{e}_d - \mathbf{e}_c \\ &= [\delta a, \delta \theta, \delta i, \delta q_1, \delta q_2, \delta \Omega]^T \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_d^{(\text{LC})} = \mathbf{M}_{\text{I} \rightarrow \text{LC}} \mathbf{M}_{\text{LD} \rightarrow \text{I}} \mathbf{R}_d^{(\text{LD})} = \mathbf{M}_{\text{I} \rightarrow \text{LC}} \mathbf{M}_{\text{LD} \rightarrow \text{I}} [R + \delta R, 0, 0]^T \\ \mathbf{V}_d^{(\text{LC})} = \mathbf{M}_{\text{I} \rightarrow \text{LC}} \mathbf{M}_{\text{LD} \rightarrow \text{I}} \mathbf{V}_d^{(\text{LD})} = \mathbf{M}_{\text{I} \rightarrow \text{LC}} \mathbf{M}_{\text{LD} \rightarrow \text{I}} [V_{xj_2} + \delta V_{xj_2}, V_{yj_2} + \delta V_{yj_2}, V_{zj_2} + \delta V_{zj_2}]^T \end{cases} \quad (11)$$

式(1)已经给出了 ECI 系与 LVLH 系之间的转换关系,考虑到主目标与从目标的轨道根数足够接近,可将矩阵 $\mathbf{M}_{\text{LD} \rightarrow \text{I}}$ 在 $\mathbf{M}_{\text{LC} \rightarrow \text{I}}$ 处泰勒展开且仅保留一阶项,结合式(8)、式(9)有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta R \\ R \delta \theta + R \delta \Omega \cos i \\ R(\delta i \sin \theta - \delta \Omega \cos \theta \sin i) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta V_{xj_2} \\ \delta V_{yj_2} \\ \delta V_{zj_2} \end{bmatrix} + V_{xj_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \theta + \delta \Omega \cos i \\ \delta i \sin \theta - \delta \Omega \cos \theta \sin i \end{bmatrix} + \\ &V_{yj_2} \begin{bmatrix} -\delta \theta - \delta \Omega \cos i \\ 0 \\ \delta i \cos \theta + \delta \Omega \sin \theta \sin i \end{bmatrix} + \\ &V_{zj_2} \begin{bmatrix} -\delta i \sin \theta + \delta \Omega \cos \theta \sin i \\ -\delta i \cos \theta - \delta \Omega \sin \theta \sin i \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &\boldsymbol{\omega}_x \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{bmatrix} + \boldsymbol{\omega}_y \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \boldsymbol{\omega}_z \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

由轨道力学可知

$$R = \frac{a(1 - q_1^2 - q_2^2)}{1 + q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta} \quad (13)$$

式中,下标 d 与 c 分别表示从目标与主目标。需要指出,在下文推导中,所有不含下标 c 的轨道根数(或其衍生项)均对应于主目标。例如,式(8)中的 R 等价于式(2)中的 R_c 。

3.1 由相对位置速度到差分密切轨道根数的转换

以 LC 系作为基准坐标系,主目标地心矢径与速度矢量可分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_c^{(\text{LC})} = [R, 0, 0]^T \\ \mathbf{V}_c^{(\text{LC})} = [V_{xj_2}, V_{yj_2}, V_{zj_2}]^T \end{cases} \quad (8)$$

从目标地心矢径与速度矢量可分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_d^{(\text{LC})} = [R + x, y, z]^T \\ \mathbf{V}_d^{(\text{LC})} = \begin{bmatrix} V_{xj_2} + \dot{x} - y \boldsymbol{\omega}_z + z \boldsymbol{\omega}_y \\ V_{yj_2} + \dot{y} + x \boldsymbol{\omega}_z - z \boldsymbol{\omega}_x \\ V_{zj_2} + \dot{z} - x \boldsymbol{\omega}_y + y \boldsymbol{\omega}_x \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

式中: x, y, z 分别为从目标相对位置矢量 \mathbf{r} 在 LC 系三方向的分量; $\boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y$ 与 $\boldsymbol{\omega}_z$ 分别为主目标角速度矢量在 LC 系三方向的分量,即

$$\boldsymbol{\omega}_c = [\boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y, \boldsymbol{\omega}_z]^T \quad (10)$$

与此同时,从目标满足式(11)所示关系。

$$\begin{cases} V_{xj_2} = \sqrt{\mu/p}(q_1 \sin \theta - q_2 \cos \theta) \\ V_{yj_2} = \sqrt{\mu/p}(1 + q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta) \\ V_{zj_2} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中, $p = a(1 - q_1^2 - q_2^2)$ 。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_x = -\frac{\alpha n}{2a^2 \eta^7} (1 + e \cos f)^3 \sin 2i \sin \theta \\ \boldsymbol{\omega}_y = 0 \\ \boldsymbol{\omega}_z = \sqrt{\mu p} / R^2 \end{cases} \quad (15)$$

式中, $\alpha = 3J_2 R_e^2$, $n = \sqrt{\mu/a^3}$, $\eta = \sqrt{1 - e^2}$, J_2 为带谐系数值, R_e 为地球赤道半径。

将式(13)~(15)代入式(12),可将 LC 系下从目标的相对状态表示为差分轨道根数的形式。于是有

$$\mathbf{X}_d^{(\text{LC})}(t) = \boldsymbol{\Sigma}(t) \delta \mathbf{e}(t) \quad (16)$$

3.2 由差分密切轨道根数到差分平均轨道根数的转换

在 J_2 摄动影响下,密切轨道根数随时间的变化较为复杂,难以给出解析描述。因此,在推导轨道根数之差的时间迁移规律时,采用平均轨道根数作为替代对象。本节将推导给出差分密切轨道

根数与差分平均轨道根数之间的转换关系。

许多文献对密切轨道根数与平均轨道根数的转换问题进行了研究,此处采用文献[10]的方法,即有

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^m - \frac{\alpha}{3}(\mathbf{e}^{lp} + \mathbf{e}^{sp1} + \mathbf{e}^{sp2}) \quad (17)$$

式中, \mathbf{e} 为密切轨道根数, \mathbf{e}^m 为平均轨道根数, \mathbf{e}^{lp} 为长周期项, \mathbf{e}^{sp1} 与 \mathbf{e}^{sp2} 为短周期项。需要指出的是, \mathbf{e}^{lp} , \mathbf{e}^{sp1} 与 \mathbf{e}^{sp2} 均以平均轨道根数表示,也就是说,由密切轨道根数计算平均轨道根数需通过迭代来实现。下文将在 4.1 节对这一问题进行详细阐述。

由式(17)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{e}^m} \\ &= \mathbf{I} - \frac{\alpha}{3}[\mathbf{D}^{lp}(t) + \mathbf{D}^{sp1}(t) + \mathbf{D}^{sp2}(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

式中, \mathbf{I} 为单位矩阵。

于是有

$$\delta \mathbf{e}(t) = \mathbf{D}(t) \delta \mathbf{e}^m(t) \quad (19)$$

3.3 差分平均轨道根数的时间迁移

与密切轨道根数相比,平均轨道根数的变化规律更为简洁,有

$$\begin{cases} a^m = a_0^m, \lambda^m = \lambda_0^m + (\dot{\omega}^m + \dot{M}^m)(t - t_0), i^m = i_0^m \\ q_1^m = q_{10}^m \cos[\dot{\omega}^m(t - t_0)] - q_{20}^m \sin[\dot{\omega}^m(t - t_0)] \\ q_2^m = q_{10}^m \sin[\dot{\omega}^m(t - t_0)] + q_{20}^m \cos[\dot{\omega}^m(t - t_0)] \\ \Omega^m = \Omega_0^m + \dot{\Omega}^m(t - t_0) \end{cases} \quad (20)$$

式中,上标 m 表示平均根数,下标 0 表示初始时刻, M 为平近点角, $\lambda = M + \omega$ 为平纬度幅角。 ω^m , M^m 与 Ω^m 的时间变化率均可由初始时刻的平均轨道根数表示。

对式(20)中最后一式等号两边进行变分操作,保留一阶项,有

$$\begin{aligned} \delta \Omega^m &= \delta \Omega_0^m + \left(\frac{\partial \dot{\Omega}^m}{\partial a_0^m} \delta a_0^m + \frac{\partial \dot{\Omega}^m}{\partial \theta_0^m} \delta \theta_0^m + \frac{\partial \dot{\Omega}^m}{\partial i_0^m} \delta i_0^m + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \dot{\Omega}^m}{\partial q_{10}^m} \delta q_{10}^m + \frac{\partial \dot{\Omega}^m}{\partial q_{20}^m} \delta q_{20}^m + \frac{\partial \dot{\Omega}^m}{\partial \Omega_0^m} \delta \Omega_0^m \right) \Delta t \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $\Delta t = t - t_0$ 。

δa^m , $\delta \theta^m$, δi^m , δq_1^m 与 δq_2^m 的表达式可采用类似方式获得,从而可以给出差分平均轨道根数的时间迁移表达式,即

$$\delta \mathbf{e}^m(t) = \Phi_e(t, t_0) \delta \mathbf{e}^m(t_0) \quad (22)$$

结合式(16)、式(19)、式(22),可以得到 J_2 假设下相对运动方程的状态转移矩阵,即

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_d^{(LC)}(t) &= \Sigma(t) \mathbf{D}(t) \Phi_e(t, t_0) \mathbf{D}^{-1}(t_0) \cdot \\ &\quad \Sigma^{-1}(t_0) \mathbf{X}_d^{(LC)}(t_0) \\ &= \Phi_{J_2}^{(LC)} \mathbf{X}_d^{(LC)}(t_0) \end{aligned} \quad (23)$$

式中,矩阵 $\Sigma(t)$, $\mathbf{D}(t)$ 与 $\Phi_e(t, t_0)$ 的详细表达式已由文献[10]在其附录中给出,本文不再赘述。需要指出的是,本文在推导过程中,发现文献[10]给出的表达式存在两处错误,这里更正如下:矩阵 $\Sigma(t)$ 第 2 行第 2 列的元素推导错误,正确表达式应为 $\Sigma_{22} = (V_{yJ_2}/p)(p - R)$; ε_1 的表达式错误,正确的表达式应为 $\varepsilon_1 = (q_1^m)^2 + (q_2^m)^2$ 。

4 拦截中段制导方法

4.1 平均轨道根数的计算

式(17)给出了密切轨道根数与平均轨道根数之间的关系,依据该式计算平均轨道根数需要通过迭代来实现。迭代步骤如下:

设历元时刻的密切轨道根数为 \mathbf{e} , 第 i 次迭代得到的平均轨道根数为 \mathbf{e}_i^m , 取 $\mathbf{e}_0^m = \mathbf{e}$ 。

- 1) 以 \mathbf{e}_i^m 计算长周期摄动项 \mathbf{e}_i^{lp} 。
- 2) 以 \mathbf{e}_i^m 计算短周期摄动项 \mathbf{e}_i^{sp1} 与 \mathbf{e}_i^{sp2} 。
- 3) 对 \mathbf{e}_i^m 进行修正,即

$$\mathbf{e}_{i+1}^m = \mathbf{e} + \frac{\alpha}{3}(\mathbf{e}_i^{lp} + \mathbf{e}_i^{sp1} + \mathbf{e}_i^{sp2}) \quad (24)$$

- 4) 重复上述过程,直到满足收敛准则为止。收敛准则可取为

$$|\mathbf{e}_{i+1}^m - \mathbf{e}_i^m| \leq \varepsilon \quad (25)$$

式中, ε 为容许误差限。

4.2 制导方法流程

前文指出,拦截中段制导问题事实上可以抽象为固定时间拦截问题。考虑到对于中段制导而言,飞行时间较短而速度修正量较小,因而本文提出基于状态转移矩阵的制导方法。

问题描述:

在 ECI 坐标系下,已知 t_0 时刻拦截器的位置、速度矢量分别为 \mathbf{R}_0 , \mathbf{V}_0 , 预测命中时刻为 t_f , 预测命中点为 \mathbf{R}_f 。由于误差因素的影响,拦截器以初始状态难以准确到达预测命中点,需要实施中段导引,确定速度修正量 $\Delta \mathbf{v}$ 。

方法流程:

- 1) 由初始状态 \mathbf{R}_0 , \mathbf{V}_0 计算初始时刻的密切轨道根数 \mathbf{e} , 建立初始的 LVLH 坐标系;
- 2) 将 \mathbf{R}_0 , \mathbf{V}_0 外推至 t_f 时刻, 得到终点状态

R'_f 与 V'_f ;

3) 由终点状态 R'_f, V'_f 计算终点时刻的密切轨道根数 e_f , 建立终点处 LVLH 坐标系;

4) 计算终点 LVLH 系下预测命中点的相对位置 r_f , 即

$$r_f^{(L)} = M_{1 \rightarrow L} r_f^{(1)} = M_{1 \rightarrow L} (R_f - R'_f) \quad (26)$$

5) 由 e_s, e_f 分别计算初始与终点时刻的平均轨道根数 e_s^m, e_f^m , 结合式(23) 得到相对运动的状态转移矩阵 $\Phi_{J_2}^{(L)}$;

6) 初始时刻的速度修正量 Δv 满足

$$\begin{bmatrix} r_f^{(L)} \\ \dots \end{bmatrix} = \Phi_{J_2}^{(L)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta v^{(L)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

由式(27)可知

$$\Delta v^{(L)} = \begin{bmatrix} \varphi_{14} & \varphi_{15} & \varphi_{16} \\ \varphi_{24} & \varphi_{25} & \varphi_{26} \\ \varphi_{34} & \varphi_{35} & \varphi_{36} \end{bmatrix}^{-1} r_f^{(L)} \quad (28)$$

式中, φ_{ij} 为矩阵 $\Phi_{J_2}^{(L)}$ 第 i 行、第 j 列的元素。图2 给出了采用状态转移矩阵的中段制导方法的流程。

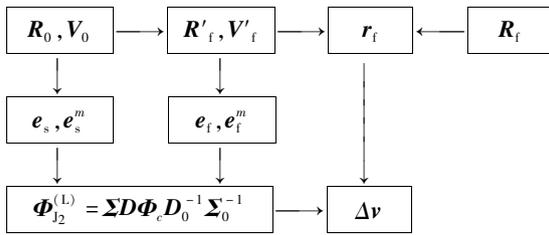


图2 制导方法流程

Fig.2 Procedure of the midcourse guidance method

5 仿真算例

上文提出了采用状态转移矩阵的拦截中段制导方法。本节将引入仿真算例, 验证所提方法的性能, 分析其适用条件。

5.1 状态转移矩阵的精度

首先考察本文给出的状态转移矩阵在刻画拦截器相对运动时的精度。设 $t_0 = 1003.6s$ 时刻拦截器在 J2000 系下的位置速度矢量分别为 $R_0 = [2\ 196\ 308.118, -2\ 361\ 659.419, 6\ 082\ 688.107]^T$; $V_0 = [853.466\ 678, -6\ 083.398\ 166, 2\ 767.032\ 528]^T$ 。

在 t_0 时刻向拦截器施加速度冲量, 拦截器的飞行轨迹将发生变化。表1 给出了 LVLH 系下3 组不同的速度冲量值。以解析的 J_2 轨迹外推结果作为真值, 将偏离真值的程度作为衡量状态转移矩阵精度的指标。图3 给出了不同速度冲量下

状态转移矩阵的误差随时间的变化情况。

表1 LVLH 系下的初始速度冲量

Tab.1 Initial velocity impulses in the LVLH coordinate system

工况	$v_x/(m/s)$	$v_y/(m/s)$	$v_z/(m/s)$
1	5	5	5
2	50	50	50
3	100	100	100

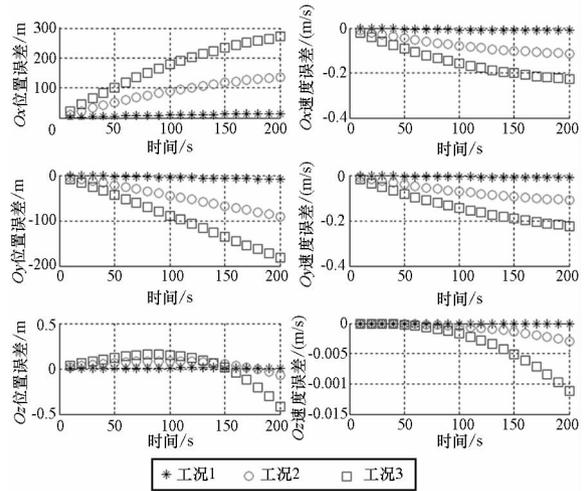


图3 状态转移矩阵的误差随时间的变化

Fig.3 Error of state transition matrix versus time

由图3 可知, 在本文给出的仿真条件下(时间不超过 200s、速度修正量不大于 100m/s), 采用状态转移矩阵刻画拦截器的飞行轨迹具有较高的精度: 与真值相比, 位置误差不超过 300m, 速度误差不超过 0.4m/s。需要注意的是, 在图3 中, 随着速度冲量的增加, 状态转移矩阵的性能出现下降。这是由于当速度冲量增加时, 新轨道与参考轨道的偏差在增大, 推导状态转移矩阵时引入的小偏差假设受到挑战, 忽略非线性项的代价越来越明显地体现出来。

5.2 中段制导方法的性能

设预测命中时刻 $t_f = 1186.9s$, 预测命中点在 J2000 系下的位置矢量为

$$R_f = [2\ 322\ 135.847, -3\ 439\ 448.051, 6\ 478\ 344.336]^T$$

采用两种方法求解初始时刻所需的速度修正量 Δv 。一种是图2 给出的中段制导方法, 一种是文献[5] 给出的基于 Lambert 飞行时间定理的联合方程方法。将两种方法求解得到的速度修正量施加至拦截器, 得到预测命中时刻拦截器与 R_f 点的距离 Δr 作为衡量制导方法精度的指标。仿真结果如表2 所示, 表2 同时还给出了两种方法的

计算耗时 Δt 。

表 2 制导方法性能对比

Tab. 2 Contrast of the efficiency of the guidance methods

	$\Delta v / (\text{m/s})$	$\Delta r / \text{m}$	$\Delta t / \text{ms}$
中段制导方法	86.385	154.391	19.617
文献[5]方法	87.934	259.801	2.741

由表 2 可知,由于考虑了 J_2 项摄动的影响,本文提出的中段制导方法比联合方程方法更加精确。本文方法的计算耗时约为 20ms,尽管比联合方程方法高出一个量级,但是仍处于可接受的范围内。

5.3 中段制导方法的适用性

需要指出,本文采用线性化的相对运动模型来实现拦截中段制导,这决定了制导方法的性能与 Δv 的大小密切相关(即主从目标是否足够接近从而满足线性化条件)。改变预测命中点 R_t 的位置,图 4 给出了需用速度修正量 Δv 与方法误差 Δr 的对应关系,以此考察制导方法的适用性。由图可知,随着 Δv 的增加,方法误差 Δr 也不断增大。当 Δv 达到 100m/s 时,制导方法产生的 Δr 不超过 200m,考虑到拦截器末制导段的修正能力,这一误差量级是足够精确的。

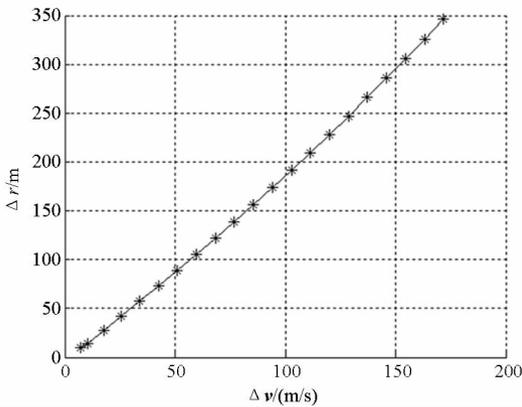


图 4 Δr 与 Δv 的对应关系

Fig. 4 The relations between Δr and Δv

6 结论

对拦截中段制导问题展开了研究。针对高精

度引力场模型条件下固定时间拦截问题难以求解的现状,提出了基于相对运动模型的求解策略。在 J_2 引力场假设下,推导得到了相对运动的状态转移矩阵,从而可将固定时间拦截问题转化为相对状态的转移问题。仿真算例表明,提出的方法为快速求解速度修正量提供了一条有效途径。

由于推导过程引入了线性化,因此本文的制导方法仅适用于拦截器实际飞行轨迹与标称飞行轨迹足够接近的情形。但仿真算例分析表明,这一约束并不影响本文方法在拦截中段制导中的应用。

参考文献 (References)

- [1] Zarchan P. Tactical and strategic missile guidance [M]. 4th ed. USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
- [2] Zarchan P. Midcourse guidance strategies for exoatmospheric intercept [R]. Charles Stark Draper Laboratory, 1998.
- [3] Newman B. Strategic intercept midcourse guidance using modified zero effort miss steering [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(1): 107–112.
- [4] 任莹. 人造地球卫星轨道力学 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988.
REN Xuan. Orbital mechanics of artificial earth satellite [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1988. (in Chinese)
- [5] Battin R H. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics [M]. USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999.
- [6] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous [J]. Journal of the Aerospace Science, 1960, 27(9): 653–658.
- [7] Hill G W. Researches in the lunar theory [J]. American Journal of Mathematics, 1878, 1(3): 245–260.
- [8] Yamanaka K, Ankersen F. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1): 60–66.
- [9] Alfriend K T, Schaub H, Gim D W. Gravitational perturbations, nonlinearity and circular orbit assumption effects on formation flying control strategies [J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2000, 104: 139–158.
- [10] Gim D W, Alfriend K T. State transition matrix of relative motion for the perturbed noncircular reference orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(6): 956–971.
- [11] Alfriend K T, Vadali S R, Gurfil P, et al. Spacecraft formation flying: dynamics, control and navigation [M]. USA: Butterworth-Heinemann, 2009.