doi:10.11887/j.cn.201505011

http://journal. nudt. edu. cn

# 条(环)状干摩擦阻尼器的微滑移数值模型\*

## 赵 宁,蔺彦虎

(西北工业大学 机电学院,陕西 西安 710072)

摘 要:提出一种求解弹性条(环)状阻尼器微滑移接触运动的数值方法。将阻尼器和外部激励历程在 空间和时间上离散,将相同数量的干摩擦触点布置于离散阻尼器上;把接触运动判据应用到各离散接触点, 确定其运动状态并修正刚度矩阵,求解整个阻尼器的平衡方程。该方法避免了有限元软件求解含摩擦接触 问题的迭代过程,从而保证了求解的可执行性。同时,克服了微滑移模型理论解法对法向载荷分布规律及载 荷时变性的限制,为求解具有局部性以及时变性的法向载荷的结构动态响应提供了更为精确的边界条件,从 而可提高结构频响分析的准确性。应用多谐波平衡法分别计算宏滑移和微滑移阻尼器约束下的结构动态响 应,发现在结构减振中,微滑移模型能够适应更宽范围的法向力。

关键词:干摩擦阻尼器;微滑移;接触运动;多谐波平衡法;动响应

中图分类号:TH133 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2015)05-067-08

# A numerical model for the bar or circular micro-slip dry friction damper

#### ZHAO Ning, LIN Yanhu

(College of Mechanical, Northwestern Polytechnical University, Xi' an 710072, China)

Abstract: A numerical method to solve the contact kinematic problems of elastic bar or circular micro-slip dry friction damper was proposed. Firstly, the damper and the time course of external excitation were discretized in the space and time domain respectively, and the same number of contact points was attached to the discrete damper. Secondly, the determination criterion of the contact kinematic state of the contact point pairs was used to each contact pair, and the stiffness matrix of the damper was modified. Thirdly, the whole balance equation with the new stiffness matrix was solved in each time step. Differing from the way the finite element software dealing with the contact problem with friction, the iteration was avoided, thus the feasibility of the solution was guaranteed. Meanwhile, the restriction of the distribution and the time variability of the normal load was overcome, and therefore it provided a more accurate boundary condition for solving dynamic response of structure. Lastly, the response of structures constrained by the macro-slip and micro-slip damper were computed by the MHBM (Multi Harmonic Balance Method) respectively and the distinctness of the solution was analyzed. Results show that the micro-slip model damper can have a broader normal force range for vibration reduction.

Key words: dry friction damper; micro-slip; contact kinematic; multi harmonic balance method; dynamic response

由于结构简单、在高温及复杂环境的稳定性 及优良的减振性能,干摩擦阻尼器被广泛应用于 工程中。如为了降低筒形结构的航空发动机的篦 齿封严装置振动幅值,在其定子或转子上安装有 阻尼环或阻尼套筒;航空发动机的叶-盘系统中, 叶片设计有凸台,通过振动时凸台间的挤压和相 对运动来降低叶片振动幅值;航空薄壁齿轮上安 装的阻尼环等结构<sup>[1]</sup>,均是应用干摩擦进行结构 减振的实例。

叶片减振结构中,凸台面积以及凸台间的法 向力较小,可将其简化为单对触点,进行非线性结 构的动响应求解<sup>[2]</sup>。然而,对于安装阻尼环、阻 尼套筒的结构,由于接触面积大,加上筒状结构进 行周波型振动或者盘状结构进行节径型振动时, 将引起不同接触部位的法向力变化,局部法向力 可能会变得较大,这时还将阻尼器与结构间的作 用通过单对接触点来表示,将不符合阻尼器与结 构间的实际。

微滑移模型用多对触点来表达其与结构间的局部摩擦作用, Menq<sup>[3-4]</sup>建立了考虑微滑移效应的矩形杆模型, 杆与结构间分布有厚度可忽略的剪切层, 用该剪切层模拟阻尼器和结构表面微观

凸起,给出了接触运动以及干摩擦力的理论 解<sup>[3]</sup>,并将该理论解应用于结构动态响应计算, 并与实验结果<sup>[4]</sup>对比,验证了该模型的准确性。 徐自力<sup>[5]</sup>将该模型引入叶片减振分析,并分析了 最优正压力的影响因素。Csaba<sup>[6]</sup>的微滑移模型 忽略了 Menq 模型中的剪切层,用单元节点切向 刚度模拟阻尼器的切向刚度。Menq 与 Csaba 模 型均采用解析法求解,法向力分布为特定形式,不 可时变,激励力或激励位移也被设定为谐波形式。 这些假设往往不符合应用中的载荷分布以及变化 特性,具有一定的局限性。

商用有限元软件应用迭代法求解含摩擦的接触问题,迭代过程实际上是确定触点运动状态的 过程。有限元软件能较好地模拟含摩擦的局部接 触作用,并对结构做时域内的响应分析,然而,多 数商业有限元软件,如 Ansys、Abaqus 等均不能用 来做非线性频响分析,而非线性频响求解又是薄壁 结构减振设计的重要内容。马晓秋<sup>[7]</sup>用谐波法描 述干摩擦力,将干摩擦力等效为结构内阻,用 Ansys 软件计算了叶片频响。然而一阶谐波法是一种近 似方法,不能准确表达接触运动的粘 – 滑效应,等 效方法对求解的准确性也有一定影响。因此有必 要针对阻尼器具体结构,发展出能够方便求解接触 运动的数值模型,将其应用于非线性频响分析,摆 脱应用有限元软件求解接触问题的束缚。

本文将 Yang<sup>[8]</sup> 发展的宏滑移模型黏滞—滑 移—分离判据应用于微滑移模型,形成了求解微滑 移接触运动的数值方法。相比微滑移模型理论解 法,该方法对微滑移模型法向载荷分布规律及其时 变性没有限制,同时取消了 Menq<sup>[3]</sup>模型中防止刚 体位移的限位弹簧,可对刚体位移进行准确求解。 求解过程无须迭代,从而保证求解的可执行性。最 后,应用多谐波平衡法(Multiple Harmonic Balance Method,MHBM)计算微滑移数值模型约束下的结 构动响应,以证实所发展模型的实用性,并分析了 宏滑移模型和微滑移模型对结构动响应影响的 异同。

### 1 Yang 模型及算例

#### 1.1 Yang 宏滑移模型

相比于微滑移模型,对宏滑移模型的研究较 多,也较为成熟。Sanliturk 和 Ewins<sup>[9]</sup>发展了一种 求解宏滑移模型的"轨迹跟踪法",该方法将求解 周期离散为若干时间点,对每一时间步的运动状 态进行判断,确定运动状态后,计算出相应状态下 的位移量及干摩擦力。重复进行以上步骤,即可 得到整个周期内的触点运动状态及干摩擦力,一般地,跟踪过程只需维持两个周期,即可得到稳定的运动状态。单颖春<sup>[10]</sup>应用类似方法计算叶片动响应,并与实验值对比,取得了很好的效果。

Yang 于 1998 年发表文章<sup>[8]</sup>详细讨论了宏滑 移模型的运动状态确定以及状态判定依据,并假 设激励为谐波形式时运动状态的转换角。所建立 的滑移模型如图1所示。

图1中,body1和body2表示两接触物体,通 过触点表示两者的作用力,body2可运动也可固 定。 $n_0$ 表示初始法向力; $k_u$ , $k_v$ 分别为切向及法 向刚度;u,v分别为切、法向运动;f表示干摩擦 力; $\mu$ 为干摩擦系数;w表示触点切向运动;n表示 法向力。两接触体可能存在3种运动状态,黏滞、 滑移或分离状态,在接触运动周期内,这几种状态 可能会相互转化,如表1所示。



图 1 Yang 接触运动模型

Fig. 1 Yang's contact kinematic model

表1中,"E"表示黏滞状态,"P"表示正向滑动,"N"表示反向滑移,"S"表示分离状态,"当前"表示当前时刻触点的运动状态,"后继"表示运动状态从当前到下一时刻的转化。

表1 运动状态转化条件

当前	后继	转换条件
Ε	Р	$f - \mu n = 0,  \dot{f} - \mu n > 0$
	N	$f + \mu n = 0$ , $\dot{f} + \mu \dot{n} < 0$
	S	$n_0 + k_v v = 0,  \dot{v} < 0$
P	Ε	$f + \mu k_v = 0,  \dot{u} - \mu k_v \dot{v} / k_u < 0$
	N	不会发生
	S	$n_0 + k_v v = 0,  \dot{v} < 0$
N	Ε	$f - \mu k_v = 0,  \dot{u} + \mu k_v \dot{v} / k_u > 0$
	P	不会发生
	S	$n_0 + k_v v = 0,  \dot{v} < 0$
S	E	$n_0 + k_v v = 0$ , $\dot{v} > 0$
		$-\mu \dot{n} < \dot{f} < \mu \dot{n},  \dot{w} = 0$
	P	$n_0 + k_v v = 0$ , $\dot{v} > 0$ , $\dot{u} > \mu k_v \dot{v} / k_u$
	N	$n_0 + k_v v = 0$ , $\dot{v} > 0$ , $\dot{u} < -\mu k_v \dot{v} / k_u$

干摩擦力遵循 Coulomb 摩擦定律,即  $f(t,u) = \begin{cases} k_u(u(t) - w(t)), \operatorname{abs}(f) < u\mathbf{n}(t) \\ \mu \mathbf{n}(t) \times \operatorname{sgn}(w(t)), \operatorname{otherwise} \end{cases}$ 

(1)

式中, sgn 为符号函数, abs 为绝对值符号, t 为时间。

#### 1.2 宏滑移接触运动模型算例

选取图 1 中"body1"的运动参数如表 2 所示, "body2"固定不动,求解该模型。求解时将周期 离散,按表 1 中所示的"当前状态",计算运动状 态参数及力值,然后依据表 1 中的不等式,判定是 否发生了运动状态转化,如果转化,则按照新的状 态求解各参量,如果未发生状态转化,则计算下一 个时刻各参数。计算取摩擦系数 µ 为 0.5,t 代表 离散时间点。

结果如图2所示,图中每列为表2中计算参

数的运动状态、力及滞回环。可以看出应用 Yang 发展的判据可求解复杂的运动状态。从图 2 第二 行可以看出在运动过程中,两物体遍历了分离— 黏滞—滑移运动,所以该行的第三列所示的滞回 环中有相当一部分值为 0。第三行表示在平面内 的运动频率不同时的运动状态,类似于李萨如的 运动形式,这时摩擦力及滞回曲线显得更为复杂, 平面内 y 向运动频率为 x 向的 3 倍,所以滞回环 也呈现出这种关系。

表 2 宏滑移模型计算参数

Tab. 2 Parameters of macro-slip model					
U(u)/m	U(u)/m	汁白 V(z)/m	$k_u$	$k_v$	
U(x)/m	U(y)/m	広凹 ν(z)/m	(N/m)	(N/m)	
$3\sin(t)$	$2\cos(t)$	$2+0.5\cos(t)$	5	10	
$3\sin(t)$	$2\cos(t)$	$0.5 + \cos(t)$	4	10	
$3\sin(t)$	$3\cos(3 \times t)$	$2 + 0.5 \sin(t)$	6	9	



图 2 运动状态、力及滞回曲线 Fig. 2 Curve of kinematic state, force and hysteresis

## 2 微滑移数值模型及求解方法

#### 2.1 条(环)状阻尼器的离散

工程中经常用到的阻尼器为环状或条状结

构,如阻尼环、阻尼块。干摩擦模型的建立是为了 研究法向力存在时的切向运动及受力,故适合用 杆模型等效条状阻尼器<sup>[3]</sup>。图 3(a)为 Menq<sup>[3]</sup>建 立的微滑移模型,在阻尼块与结构的接触面上布 有剪切层,用来模拟接触面的切、法向力学行为。 该模型认为,当接触体表面粗糙度足够小时,将接 触表面均匀划分为若干块,尽管各分块的凸起和 凹陷形貌不尽相同,然而,从统计学的角度看,他 们表现出来的力学行为是相同的。因此剪切层的 不同部位具有相同的切、法向刚度。

用数值方法对微滑移理论模型求解的第一步 是对阻尼器离散。根据求解问题,在 Menq 模型 底部预设一定数量触点来替代剪切层,将模型均 匀离散,离散数量与触点数相同,如图 3(b)所示。 由于均匀离散,各触点的力学特征相同,所以触点 切向刚度 K<sub>u</sub> 相等。条(环)状阻尼器法向尺寸远 小于接触平面尺寸,法向力引起的弯曲效应较小, 可将法向力作用直接施加在触点上。若阻尼器为 开口环或条状阻尼器,则连接第 n 块与第 1 块的 弹簧将不存在,对于整体环,则弹簧存在。图中 f<sub>n,x</sub>(t)(x=1,2,…,n)表示法向载荷,该载荷可时 变。k 为离散单元间的刚度。



(a) Menq 微滑移模型(a) Micro-slip model of Menq







Fig. 3 Menq's micro-slip model and its discretization

### 2.2 求解流程

与宏滑移模型相似,求解微滑移模型也需要 在求解周期内离散。

如图 3(b)所示,假设在第1号离散体上作用 位移载荷,则该位移载荷也可被离散为有限多个 值,用  $u_i$ 和  $du_j$ 表示 j 时刻的位移以及 j + 1 时刻 与j时刻的位移变化量。用  $F_{i,j}$ 表示触点 i 在j 时 刻的受力,  $dF_{i,j}$ 表示第j + 1 时刻与j 时刻触点 i 受 力变化量。类似地,用  $w_{i,j}$ 和  $dw_{i,j}$ 表示触点位移 量及其变化量,用  $x_{i,j}$ 和  $dx_{i,j}$ 表示离散段的位移量

$$\{\boldsymbol{f}\} = [\boldsymbol{k}(t)] \{ d\boldsymbol{x} \}$$
(3)

dx 为一向量,表示离散位移增量,长度等于离散 体个数。k(t)为离散体刚度矩阵,呈带状,是时变 量:黏附于离散体的触点(如第q个触点)处于黏 滞时,刚度矩阵对应的k(q,q)值为k(q,q) = $2k + k_u, k_u$ 为剪切刚度,如图 3(b)所示。若处于 滑移或分离状态时,对应节点的刚度值为k(q,q)= 2k。需要注意的是,由于激励形式为位移激励, 因此在任何时间点上任何离散块体都处于受力平 衡状态,即每个离散块体所受合力为0,故f为0 向量,注意式(3)中的f是各离散体所受合力,不 是摩擦触点的受力。求解结果有可能出现阻尼器 的刚体位移,这取决于位移载荷的大小和法向力 值。图4给出求解流程,图中i表示干摩擦触点,j表示离散时间点。



图 4 微滑移模型计算流程 Fig. 4 Flowchart of solving micro-slip model

## 3 算例

#### 3.1 算例1均布载荷的整体环状阻尼器

图 5 所示的整体环状阻尼器,与图 3(a)相 比,除了结构与载荷变化外,做了两个调整:一是 激励形式变为位移形式,带来的好处是可以求解 刚体位移,既可求解出整体滑移也可求解出局部 滑移。在阻尼器实际工作中,也属位移激励的情 形,摩擦力伴随接触运动产生。二是解除了防止 阻尼器产生刚体位移的弹簧β,对原模型的假设 限制进一步减少。





如图 5 所示,阻尼环横截面为矩形,弹性模量  $E = 2.07 \times 105$  MPa,宽 b = 30 mm,阻尼环内径 r = 140 mm,外径 R = 150 mm, $\mu = 0.5$ ,切向刚度  $k_d$  按 Mindlin<sup>[11]</sup>理论计算。激励取 x(t) = 0.31 sin( $2\pi t$ ), 方向沿环的切向,法向力 q(t) = 137 N,t 为离散时间 点,将结构均匀离散,得到图 6 所示的滞回环。

如图 6 所示,离散数取 n = 1 时,阻尼器模型为 宏滑移模型,由于未考虑阻尼器本身的弹性变形,其 滞回环的斜率最大。其求解结果与跟踪求解<sup>[9]</sup>方法 一致,当 n 逐步增大时,求解结果越逼近微滑移模型 理论解,当离散数 n = 15 时,数值模型的滞回曲线与 理论解重合,已经足够接近理论解<sup>[3]</sup>了。在激励历 程中,微滑移触点逐次滑移,最终达到整体滑移,形 成刚体运动。



图6 微滑移模型滞回环



#### 3.2 算例2 非均布载荷

如图 7 所示,阻尼器横截面为矩形,杨氏模量与 宽度,即干摩擦系数同算例 1,高 h = 3mm,激励 x(t)=0. 32sin(2 $\pi t$ ),长 L = 80mm;载荷呈抛物线状,最大 值分布于两端,均为34.5N,最小值为5N。



图 7 非均布载荷模型 Fig. 7 Model with non-uniform load

求解阻尼器离散为15段,得到如图8所示的滞回环。从滞回环可以看出,该模型在激励下并未发生刚体滑动,只是产生了局部滑移。





图 9 为各摩擦触点在一个运动周期内的滑移量 等值线图,可以看出 8 号触点的滑移量最大,成为滑 移核心,结合图 7,可以发现这是由于法向载荷较小 造成的;等值线图不是关于点 8 对称而是偏向于编 号小的触点,这是由于计算中考虑了阻尼器的变形 以及切向载荷的位置共同造成的。1~4 号触点及 11~15 号触点—直处于黏滞状态,所以模型呈部分



Fig. 9 Contour map of slip

滑移状态,与图8的结论是一致的。

该计算流程还可以求解法向力时变条件下的微 滑移接触运动及干摩擦力,也可计算有分离运动的 实例。限于篇幅,这里不再给出算例。

# 4 MHBM 法计算计及微滑移的结构动响应

具有干摩擦约束的结构呈现出强边界非线 性,传统的数值积分方法由于计算耗时太长而不 能满足结构设计过程所要进行的频响分析。因而 人们发展出了摄动法,谐波平衡法,加辽金法等。 经研究<sup>[12]</sup>,应用 MHBM 法结合 Fourier 变换及其 逆变换法求解含干摩擦的动响应问题,具有足够 的准确度和求解速度。本文用该方法结合快速 Fourier 变换及快速逆 Fourier 变换法,计算计及微 滑移的结构动态响应。

#### 4.1 多谐波平衡法

图 10 为一装有微滑移阻尼器的振动模型,该 模型可用来表示航空发动机涡轮叶盘 B – D 型减 振器。M, C, K 分别表示质量、阻尼和刚度。 f<sub>ex</sub>(t)为激振力,q为阻尼器法向载荷。其控制方 程为

 $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f_{ex} + f_{nl}[x, \dot{x}, t]$  (4) 式中 $f_{nl}[x, \dot{x}, t]$ 为由阻尼器产生的非线性力。谐 波平衡假设认为,在周期性载荷作用下,系统的响 应也是周期的,因此可用傅里叶序列表示





$$x(t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{nh} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega t}\right]$$
(5)

式中X<sub>k</sub>为傅里叶系数,复数形式。激励力可写为

$$f_{ex}(t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{nh} F_{ex,k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega t}\right]$$
(6)

由于干摩擦力是与位移历程相关的,其傅里 叶系数 $F_{nt}$ 也是位移时间序列 $x(t_0, \dots, t_n)$ 的函数

$$f_{nl}[x](t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{nh} F_{nl,k}(x_0, \dots, x_{nh}) e^{jk\omega t}\right](7)$$
  
将式(5) ~ (7) 代入式(4),可得

 $\Lambda_{k}X_{k} - F_{ex,k} + F_{nl,k}(x_{0}, \dots, x_{nh}) = 0$  (8) 式中 $\Lambda_{k} = -(k\omega)^{2}M + jk\omega C + K$ ,为动刚度矩阵。 求解时,首先对位移序列傅里叶系数进行傅 里叶逆变换,得出时域位移值,用该位移序列求解 干摩擦力,之后对干摩擦力进行傅里叶变换,得到 干摩擦力在频域内的谐波系数值。最后对位移序 列的傅里叶系数值迭代,直到满足式(8)为止。 式(8)为一非线性方程,需用迭代方法求解, Newton 法及其衍生格式是求解该方程的基础。 本文采用 Broyden 法求解。

#### 4.2 计算结果

选取表3所列的计算参数,分别应用微滑移 模型和宏滑移模型计算结构动响应。

表 3	计算参数表
<b>表</b> 5	计异参致表

Tab. 1 Parameters	used	in	the	calculation	
-------------------	------	----	-----	-------------	--

参数	数值
质量 M/kg	1.07
刚度 K/(N/m)	10 000
阻尼 C/(N・s/m)	0.562
激励力幅值/N	100

微滑移模型计算的频幅响应如图 11 所示,图中 $F_n$ 为法向载荷,即图 10 中的q,计算微滑移模型离散为 15 段,切向刚度求解用 Mindlin<sup>[11]</sup>理论。



图 11 微滑移模型结构频响图 Fig. 11 Frequency response of structure with micro-slip model

求出宏滑移模型频响后,即可对比两者减振 性能的差异。如图 12 所示,法向力较小时,微滑 移模型与宏滑移模型的效果相差无几,微滑移模 型对振动的抑制效果稍差于宏滑移模型,这主要 是微滑移模型考虑了阻尼器的弹性形变而显示出 切向刚性不足,不能给结构提供足够的干摩擦力 约束振动幅值。随着法向载荷的增加,则显示出 大的差异:采用宏滑移模型时,阻尼器很快处于黏 滞状态,这时可等效为一弹簧,因此随着法向力的 进一步增加,结构振动幅值基本不再增加;而微滑 移模型考虑了结构的局部滑移,阻尼器仍未完全 黏滞,因此可以提供不同幅值的干摩擦约束力,从 图6也可以观察出这一点。直到法向载荷增加至 1007N,微滑移模型所有触点才完全黏滞,达到与 宏滑移模型相同的振动幅值。由于在较大法向载 荷下仍有触点可以滑动,因此微滑移模型在较大 法向载荷时,仍具有较明显的减振效果。





Griffin<sup>[13]</sup>的用宏滑移迟滞模型为航空发动机 叶片 B – D 型阻尼器建模,计算了叶片的频响及 动应力,并搭建实验台验证计算结果的可靠性。 计算及实验结果如图 13 所示<sup>[13]</sup>。图 13 为两种 不同刚度的阻尼器在不同法向力下叶片的动应 力。文献[13]未给出叶片及阻尼器的几何及力 学参数,因此无法用本文发展的微滑移模型计算 其动响应。但观察其计算结果与实验结果可发 现:法向力值较低时,实验结果和计算结果相符 合;但随着法向力的增加,实验值与计算值出现偏 离,尤其是在阻尼器刚度较小的条件下,并且法向 力较大时,动应力的计算值总是大于实验值。

切向刚度较大时,阻尼器更像是一个刚体,因 而可用宏滑移模型描述,其计算结果与实验值相 差不大;当切向刚度较小时,阻尼器在整体滑动之 前更容易产生局部滑移,这时如果还用宏滑移模 型来描述阻尼器,则会在法向力较大时无法计及 局部滑移而使得计算值偏大。对比图 12,当法向 力增大时,使用宏滑移模型计算的结构频响值会 很快上升,而使用微滑移模型的频响值上升缓慢。 可见用微滑移模型,动应力计算结果会缓慢上升,因而更加接近于实验值。这也说明使用微滑移模型可为结构提供更加精确的边界条件,使结算结果更符合实际;微滑移模型能够在更宽的法向力范围为结构提供振动幅值衰减,从而使动应力计算值降低。



图 13 Griffin 计算结果与实验结果对比 Fig. 13 Contrast between calculation result and test result of Griffin

## 5 结论

1)依据 Yang 发展的单触点分离—接触—滑 移判据,求解了不同法向力及不同牵引切向运动 时,干摩擦触点的运动状态及干摩擦力。

2)将 Yang 判据应用于条状或环状微滑移模型,形成了求解微滑移触点运动状态及受力的数 值方法,通过与理论模型对比,检测了算法的准确 性。该方法克服了理论模型对于方向载荷分布及 激励条件的诸多假设,拓宽了微滑移模型的应用 范围,可为结构减振计算提供更加真实的边界条 件,同时该求解方法无须迭代,从而避免了有限元 软件求解含摩擦接触的收敛问题。

3)用 MHBM 法分别求解了宏滑移及微滑移 阻尼器约束的结构动响应。结果表明,在法向力 较小条件下,两者相差不大,随着法向力的增加, 两者减振效果出现明显差别,微滑移模型对法向 力的适应能力更强,可在较宽法向载荷范围内达 到结构减振的目的。

### 参考文献(References)

- [1] 晏砺堂,朱梓根,李其汉,等.高速旋转机械振动[M].北京:国防工业出版社,1994.
   YAN Litang, ZHU Zigen, LI Qihan, et al. Mechanical vibration with high rotational speed[M]. Beijing: National Defense Industry Press,1994. (in Chinese)
- [2] 单颖春,郝燕平,朱梓根,等.干摩擦阻尼块在叶片减振方

面的应用与发展[J]. 航空动力学报, 2001, 16(3): 218-223.

SHAN Yingchun, HAO Yanping, ZHU Zigen, et al. Application and development of platform friction damper for depressing resonant vibration of blades [J]. Journal of Aerospace Power,2001,16(3):218-223. (in Chinese)

- [3] Menq C H, Bielak J, Griffin J H. The influence of microslip on vibratory response, part I: a new microslip model [J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 107(2): 279-293.
- [4] Menq C H, Bielak J, Griffin J H. The influence of microslip on vibratory response, part II: a comparison with experimental results[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 107(2): 295 - 307.
- [5] 徐自力,常东锋,上官博.微滑移离散模型及在干摩擦阻 尼叶片振动分析中的应用[J].机械科学与技术,2007, 26(10):1304-1307.

XU Zili, CHANG Dongfeng, SHANGGUAN Bo. One-bar microslip discrete model and its application to vibration analysis of blade with dry friction damper [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2007, 26(10):1304 – 1307. (in Chinese)

- [6] Csaba G. Forced response analysis in time and frequency domains of a tuned bladed disk with friction dampers [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 214(3):395-412.
- [7] 马晓秋,王亲猛,张锦,等.带干摩擦阻尼结构叶/盘系统 动力学分析[J].航空动力学报,2002,17(1):110-114.
   MA Xiaoqiu, WANG Qinmeng, ZHANG Jin, et al. Dynamic

analysis of bladed disc systems with vibrational dampers[J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(1): 110 - 114. (in Chinese)

- [8] Yang B D, Chu M L, Menq C H. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 210(4):461-481.
- [9] Sanliturk K Y, Ewins D J. Modeling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996,193(2): 511-523
- [10] 单颖春,朱梓根,刘献栋. 凸肩结构对叶片的干摩擦减振 研究-规律分析[J]. 航空动力学报,2006,21(1):174-180.
  SHAN Yingchun, ZHU Zigen, LIU Xiandong. Investigation of the vibration control by frictional constraints between blade shrouds-rule analysis[J]. Journal of Aerospace Power,2006,
- [11] Mindlin R D. Compliance of elastic bodies in contact [J].
- Journal of Applied Mechanics, 1949, 16: 259 268.
  [12] Wang J H, Chen W K. Investigation of vibration of a blade with friction damper by HBM[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1993, 115(2): 295 299.
- [13] Griffin J H. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils [J]. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering for Power, 1980, 102: 329-333.