

引入电流变化率的电源分布网络最差噪声分析算法*

赵振宇, 孙浩, 邓全, 蒋剑锋

(国防科技大学计算机学院, 湖南长沙 410073)

摘要:随着时钟频率的增加以及电源电压的降低,电源完整性问题日益凸显。将电流变化率加入到最差噪声算法的电流约束中,能够在任意电流变化率的情况下分析电源分布网络的最差噪声,从而获得更加真实的最差噪声。另外,利用改进的 Knuth-Yao 四边形不等式法对基于动态规划的最差噪声算法进行加速,加速后算法的时间复杂度从 $O(n^2m)$ 降为 $O(mn \log n)$ 。

关键词:动态规划;最差噪声;变化率;电源分布网络;时域分析

中图分类号:TN47 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2016)02-082-05

A time-domain worst-case noise algorithm for power delivery network with non-zero current transition times

ZHAO Zhenyu, SUN Hao, DENG Quan, JIANG Jianfeng

(College of Computer, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: With the increasing of clock frequency and the decreasing of supply voltage, power integrity becomes a critical issue. The effect of the transition time of load currents was taken into account, and a more realistic worst-case noise prediction was obtained. In addition, a dynamic programming algorithm is introduced for the time-domain impulse response of the power distribution system, and a modified Knuth-Yao quadrangle inequality speedup method is developed which reduces the time complexity of the algorithm from $O(n^2m)$ to $O(mn \log n)$.

Key words: dynamic programming; worst-case noise; transition time; power delivery network; time-domain analysis

最差噪声估计的目标是在不清楚芯片准确负载电流的情况下,为封装以及印刷电路板(Printed Circuit Board, PCB)设计者提供验证电源分布网络的可靠方法^[1-2]。这是因为,在芯片设计完成之前,很难得到芯片上负载电流的详细信息。即使在芯片设计完成之后,也很难确定所有的输入情况能获得所有可能的输出电流。此外,为了保证系统的鲁棒性,模拟时必须遍历所有的输入电流,这样的代价是昂贵的。

为了描述不确定负载电流, Kouroussis 和 Najm^[3]提出了“电流约束”这个概念。这个概念是合理的,因为在芯片设计完成之前,芯片设计者即使不能够完整地掌握负载电流的信息,但还是对负载电流有一定程度的了解。这些了解可能基于前面的设计者,也可能基于设计初期的系统级模拟^[4-5]。封装以及 PCB 设计者就可以利用这些信息对电源分布网络进行初期的验证^[6]。然而,之前的一些工作仅考虑了电流幅值这个约束,却没有考虑电流的变化率,这会导致所估计的

最差噪声过分悲观。因此,本文所构建的电流约束将考虑电流的最小变化率。

1 问题定式化

最差噪声算法的目的是在电流约束下确定芯片的最差噪声^[7-8]。如上一小节所述,负载电流的一个约束条件就是电流幅值,约束条件可以通过下面的式(1)表示:

$$0 \leq i(t) \leq b, \forall t \geq 0 \quad (1)$$

其中, b 代表瞬态电流 $i(t)$ 的上边界。在此约束条件下,电流变化率 t_r 代表电流从 0 变化到 b 所需要的时间或者从 b 变化到 0 所需要的时间。此外,再增加一个电流约束条件,变化率的下边界 t_b , 即 $t_r \geq t_b$ 。最小变化率的约束条件可以通过最大电流斜率的形式来表示:

$$-\frac{b}{t_b} \leq \frac{di(t)}{dt} \leq \frac{b}{t_b}, \forall t \geq 0$$

其中 b/t_b 为电流的最大斜率。

将电源传输系统噪声表示为 $v(t)$ 。为了简

* 收稿日期:2015-03-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61272139)

作者简介:赵振宇(1973—),男,辽宁朝阳人,研究员,博士, E-mail:zyzhao@nudt.edu.cn

化分析过程,假设电压源 V_{dd} 为零。这样,噪声 $v(t)$ 可以表示为输入电流和系统单位脉冲响应的卷积为:

$$v(t) = \int_0^t z(\tau) i(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

其中 $z(\tau)$ 代表系统单位脉冲响应。由于卷积过程会对 $v(t)$ 产生累加效果,我们将积分时间 t 设置为脉冲响应衰减到可以忽略的时候。通过将式(2)中 $i(t - \tau)$ 替换为一般函数 $f(\tau)$,将积分变量由 τ 变换为 t ,可以将最差噪声定式化为:

$$\begin{aligned} \max v(T) &= \int_0^T z(t) f(t) dt \\ \text{s. t. } &0 \leq f(t) \leq b, \forall t \geq 0 \\ &-C \leq \frac{df(t)}{dt} \leq C, \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $C = b/t_b$ 表示 $f(t)$ 斜率的上边界。一旦确定了 $f(t)$,相应的最差负载电流可以通过 $i(t) = f(T - t)$ 得到。

值得注意的是,式(3)通过电流方向计算得到的是最大压降。电源传输系统的电感效应会引起 Ldi/dt 噪声,包括压降和偏差。对于最大偏差,仅需要在同样约束条件下,将式(3)中原函数进行最小化。因此,本文后面的内容主要是针对最大压降进行分析。

2 最差噪声分析算法

首先,将卷积时间 $[0, T]$ 分为 m 个时间段 $[t_0 = 0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m = T]$,以保证系统单位脉冲响应在每一个时间段不发生正负变化,如图1所示。同时,在电流约束范围 $[0, b]$ 选择 $n + 1$ 个采样点 $u_0 = 0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n = b, n$ 的取值由计算精度要求决定。

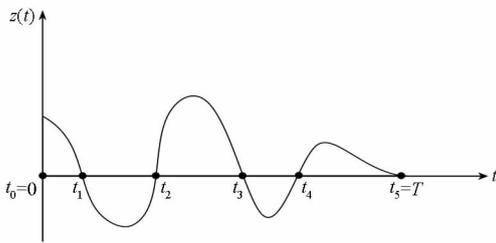


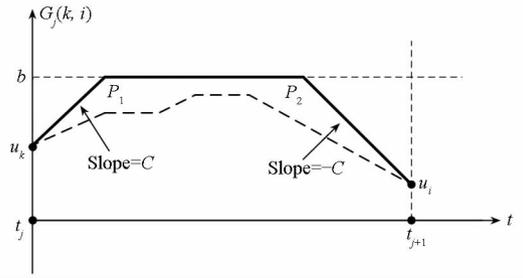
图1 卷积时间分段方法

Fig. 1 Division of convoluting time

选择一个时间段 $[t_j, t_{j+1}]$,将 $G_j(k, i, t)$ 定义为从 t_j 时刻的 u_k 到 t_{j+1} 时刻的 u_i 所产生的最差 $f(t)$ 。将 $V_j(k, i)$ 定义为对应的最差噪声。我们就可以得到:

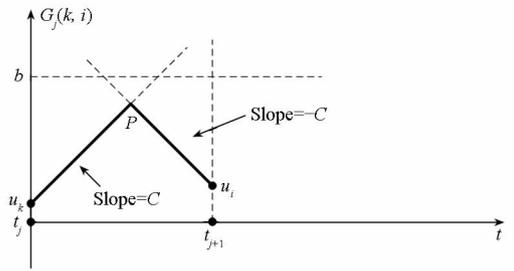
$$V_j(k, i) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) (G_j(k, i, t)) dt \quad (4)$$

利用贪婪算法很容易地计算 $G_j(k, i, t)$ 。如图2(a)和图2(b)所示,如果 $z(t)$ 在 $[t_j, t_{j+1}]$ 时间段为正,则从 u_k 画一条斜率为 C 的直线,另外画一条到 u_i 结束的直线,斜率为 $-C$ 。如果两条直线在低于电流上边界 b 的地方相交,则 $G_j(k, i, t)$ 为 $u_k \rightarrow P \rightarrow u_i$,如图2(b)所示。如果直线交点高于上边界 b ,则将边界与两条直线的交点分别用 P_1 和 P_2 表示, $G_j(k, i, t)$ 为 $u_k \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow u_i$,如图2(a)所示。



(a) 交点超过边界

(a) Intersection over border



(b) 交点未超过边界

(b) Intersection under border

图2 贪婪算法

Fig. 2 Greedy algorithm

如果 $z(t)$ 在 $[t_j, t_{j+1}]$ 时间段为负, $G_j(k, i, t)$ 可以表示为类似形式。以图2(a)所示情况为例来证明贪婪算法。假设 $G'_j(k, i, t)$ 为未经贪婪算法处理的 $f(t)$,如图2(a)中虚线所示,可得在 $[t_j, t_{j+1}]$ 上 $G'_j(k, i, t) \leq G_j(k, i, t)$ 。由于 $z(t)$ 在 $[t_j, t_{j+1}]$ 为正,可得:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) (G'_j(k, i, t)) dt \leq V_j(k, i) \quad (5)$$

这就表示 $G_j(k, i)$ 是在上述约束下的最差 $f(t)$ 。

将 $OPT(j, i)$ ($j \in [0, m], i \in [0, n]$) 定义为电流停留在 t_j 时刻电流值为 u_i 时的最差噪声。 OPT 的一些基本特性如下:

$$OPT(0, i) = 0, \forall i \in [0, n]$$

$OPT(j + 1, i) = \max_{0 \leq k \leq n} (OPT(j, k) + V_j(k, i))$ 这就提供了计算 OPT 所有值的动态规划算法,而最差噪声 $\max v(T)$ 则可以表示为 $\{OPT(m, i) : i \in [0, n]\}$ 。

动态规划算法只关注时间点 $0, t_1, \dots, t_{m-1}, T$, 这大大降低了计算的时间复杂度。对于最差 $f(t)$, 假设 $f_m(t)$ 为最差 $f(t)$, 可得 $df_m(t)/dt$ 等于 $0, C$ 或者 $-C$ 。

3 算法加速

如果利用迭代方法计算 OPT 的所有值, 时间复杂度为 $O(n^2m)^{[9-10]}$ 。本小节, 将通过一些方法对动态规划算法进行提速, 经过算法加速, 时间复杂度降低为 $O(mn \log n)$ 。

3.1 优化问题的性质分析

假设 $z(t)$ 在 $[t_j, t_{j+1}]$ 时间段为负, 将 $W_j(k, i)$ 定义为 $G_j(k, i, t)$ 的绝对值, 而 $F_j(k, i)$ 为对应于 k 的 $OPT(j+1, i)$ 候选值, 即 $F_j(k, i) = OPT(j, k) - W_j(k, i)$ 。关于 W 和 F 有以下几条有用的性质:

引理 1: 对任何 $0 \leq k_1 < k_2 \leq n$ 和 $0 \leq i_1 < i_2 \leq n$:

$$W_j(k_2, i_2) - W_j(k_1, i_2) \leq W_j(k_2, i_1) - W_j(k_1, i_1)$$

证明: 图 3 中, $W_j(k_2, i_2)$ 为 $u_{k_2} \rightarrow Q_1 \rightarrow u_{i_2}$ 下方区域电流与 $|z(t)|$ 的卷积, 而 $W_j(k_1, i_2)$ 则为 $u_{k_1} \rightarrow P_1 \rightarrow u_{i_2}$ 下方区域电流与 $|z(t)|$ 的卷积。因此, $W_j(k_2, i_2) - W_j(k_1, i_2)$ 为梯形区域 $u_{k_2} \rightarrow Q_1 \rightarrow P_1 \rightarrow u_{k_1}$ 电流与 $|z(t)|$ 的卷积。类似地, $W_j(k_2, i_1) - W_j(k_1, i_1)$ 为梯形区域 $u_{k_2} \rightarrow Q_2 \rightarrow P_2 \rightarrow u_{k_1}$ 电流与 $|z(t)|$ 的卷积。因此, 引理 1 得证。

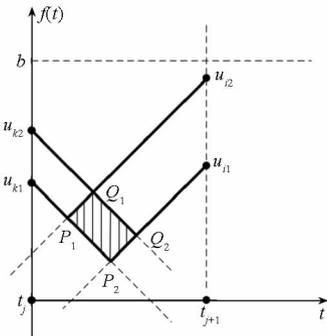


图 3 函数 W 的四边形不等式

Fig. 3 Quadrangle inequality for the function W

值得注意的是, 引理 1 就是 W 的四边形不等式^[11]。然而, 该不等式并不成立, 也就是说无法推导出 OPT 的四边形不等式。因此, 选择基于下面一条引理的 Knuth-Yao 加速方法来降低算法的时间复杂度。

引理 2: 假设 $k_1 < k_2, i_1 \in [0, n]$ 以及 $F_j(k_1, i_1) \leq F_j(k_2, i_1)$, 对于任何 $i_2 > i_1$, 可以得到 $F_j(k_1, i_2) \leq F_j(k_2, i_2)$ 。

证明:

$$\begin{aligned} & F_j(k_1, i_2) \\ &= OPT(j, k_1) - W_j(k_1, i_2) \\ &= (OPT(j, k_1) - W_j(k_1, i_1)) + (W_j(k_1, i_1) - W_j(k_1, i_2)) \\ &= F_j(k_1, i_1) + (W_j(k_1, i_1) - W_j(k_1, i_2)) \\ &\leq F_j(k_2, i_1) + (W_j(k_1, i_1) - W_j(k_1, i_2)) \\ &\leq F_j(k_2, i_1) + (W_j(k_2, i_1) - W_j(k_2, i_2)) \\ &= OPT(j, k_2) - W_j(k_2, i_2) \\ &= F_j(k_2, i_2) \end{aligned}$$

根据引理 2, 假设 $k_1 < k_2$, 满足任何 $i \geq i_0, F_j(k_1, i) \leq F_j(k_2, i)$ 条件的最小 i_0 可以通过二分法检索在 $O(\log n)$ 时间内找到。将这个过程的定义为:

$$i_0 = \text{GetTransPos}(j, k_1, k_2)$$

3.2 加速算法伪代码描述

将 S 定义为 $OPT(j+1, i)$ 的候选值 k 从小到大排列的队列。将 Q 定义为数据越小优先级越高的优先队列, 队列可进行 GetMin , DeleteMin 和 Add 三种操作。 GetMin 和 DeleteMin 分别能够获取和删除优先队列中的最小元素, 而 $\text{Add}(e)$ 操作则可以将元素 e 插入到队列中。上述三种操作均可在时间复杂度 $O(\log n)$ 内完成。队列中每一个元素都包括三个分量: 第一个分量是优先队列的关键码(key), 它表明了 i_0 的位置。后面两个分量 k_1 和 k_2 对应于 i_0 。加速动态规划算法可以通过伪代码“算法 1”表示, 该算法的时间复杂度为 $O(n \log n)$ 。

算法正确性的证明如下。首先, 需要证明队列 S 在每一次迭代计算过程中, 经过第 13 步后都包括了所有计算 $OPT(j+1, i)$ 的候选值 k 。初始状态下, S 包括了从 0 到 n 的所有值, 如第 1 步所示。对于 S 中每一对相邻的 k_1 和 k_2 , 优先队列都会存储一个拥有三个分量的数据点, 这三个分量分别为 i_0, k_1 和 k_2 。 i_0 所表征的含义是从 i_0 开始, k_2 是比 k_1 更好的候选值。第 4 步, 从优先队列 Q 中获取拥有最小 i_0 的点 $[i_0, k_1, k_2]$ 。在 i 等于 i_0 之前, 即 $i < i_0$, 由于 i_0 是最小值, 所有相邻的候选值 $k_a < k_b$, 都有 $F_j(k_a, i) > F_j(k_b, i)$, 即 S 队列的第一项, 也就是最小项为 $OPT(j+1, i)$ 的最佳候选值。若 $i = i_0$, 则表示从 i_0 开始 k_2 是比 k_1 更好的候选值, 因此, 第 8 步将 k_1 从 S 队列中删除是合理的操作。在完成删除操作后, 与 k_1 相邻位于 k_1 左侧的 k_3 与 k_2 相邻。为了保持优先队列 Q 的特性, 第 10 步增加了 k_3 与 k_2 的数据点, 并在第 11 步重新获取了拥有最小 i_0 值的数据点。若重新获取的 i'_0 与 i 依然能相等, 则继续删除操作

以及新增数据点操作,直到出现 $i < i_0$ 的情况,此时队列 S 中的最小项即为最佳候选值。值得注意的是,新增数据点的 i_0 不可能小于 i ,这是因为,如果 k_1 被删除了, k_1 与 k_3 的信息不再有用,算法第7步会将这种情况过滤。经过上述步骤,在完成第13步以后,队列 S 保留有后续迭代过程中所有可能的候选值。

算法1 加速优化

Alg. 1 GetOPT

Input: $OPT(j, i)$ for all $i \in [0, n]$
Output: $OPT(j+1, i)$ for all $i \in [0, n]$

- 1 $S = \{0, 1, \dots, n\}$;
- 2 $Q = \{ [GetTransPos(j, k_1, k_2), k_1, k_2] \}$
 k_1, k_2 are adjacent in S ;
- 3 **for** $i = 0, \dots, n$ **do**
- 4 $[i_0, k_1, k_2] = Q. GetMin()$;
- 5 **while** $i_0 = i$ **do**
- 6 $Q. DeleteMin()$;
- 7 **if** k_1, k_2 are adjacent in S **then**
- 8 Delete k_1 in S ;
- 9 Find k_3 next to k_2 on the left in S
- 10 $Q. Add \{ [GetTransPos(j, k_3, k_2), k_3, k_2] \}$;
- 11 **end**
- 12 $[i_0, k_1, k_2] = Q. GetMin()$;
- 13 **end**
- 14 $q =$ The first element in S
- 15 $OPT(j+1, i) = OPT(j, q) - W_j(q, i)$
- 16 **end**

3.3 时间复杂度

S 队列可以通过双向链接表实现,同时还需要一个指针给出每一个 k 在 S 中的位置。这样,算法中第8步和第9步可在瞬间完成。更进一步,算法1中每一个候选值 k 仅能被删除 n 次,因此,第6步到第12步整个过程中最多运行 n 次。 $GetMin$, $DeleteMin$ 和 Add 三种操作的时间复杂度为 $O(\log n)$, $GetTransPos()$ 的时间复杂度也为 $O(\log n)$ 。因此算法1的时间复杂度为 $O(n \log n)$ 。

对于 OPT , 仅需对每一个 i 初始化 $OPT(0, i) = 0$, 调用 $GetOPT$ 算法 m 次, 因此, OPT 的时间复杂度为 $O(mn \log n)$ 。

3.4 算法加速效果

分别利用加速前算法和加速算法进行最差噪声估计,并对两种算法的运行时间进行对比,以检验算法的加速效果。算法通过 C++ 语言实现,

并运行于配置为 2 GB 内存, CORE i5 的计算机。单位脉冲响应分为 12 段, 即 $m = 12$ 。加速前算法与加速算法运行时间与电流采样点个数 n 的关系如图 4 所示。由图可知, 加速算法的运行时间要远远小于加速前算法的运行时间, 尤其当 n 足够大的时候。

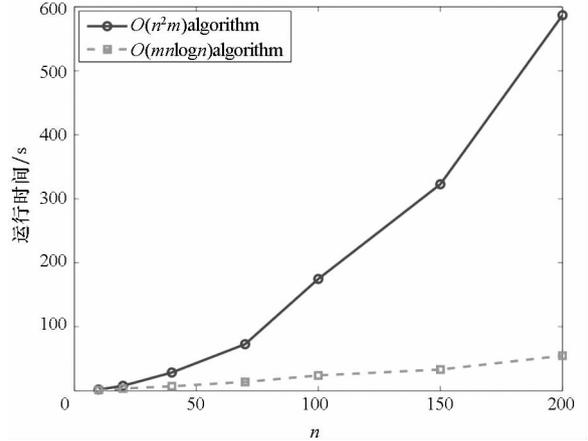


图4 算法加速前后运行时间对比

Fig. 4 Run time comparison between the of $O(n^2m)$ algorithm and the $O(mn \log n)$ algorithm

4 结论

对最差噪声算法进行优化,引入电流变化率,反映了更真实的最差噪声,避免只考虑电流幅度所估计的较为悲观的最差噪声。同时利用 Kunth Yao 四边形不等式法对动态规划算法进行加速,有效地降低了运算的复杂度,从 $O(n^2m)$ 降为 $O(mn \log n)$ 。在大规模集成电路设计中仿真时间收益明显,为后续电源的网络问题打下基础。

参考文献 (References)

- [1] Hu X, Zhao W B, Du P, et al. On the bound of time-domain power supply noise based on frequency-domain target impedance [C]//Proceedings of the 11th International Workshop on System Level Interconnect Prediction, ACM, 2009: 69 - 76.
- [2] Wang Y Z, Hu X, Cheng C K, et al. A realistic early-stage power grid verification algorithm based on hierarchical constraints[J]. IEEE Transactions on Computer-aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2012, 31(1): 109 - 120.
- [3] Kouroussis D, Najm F N. A static pattern-independent technique for power grid voltage integrity verification [C]//Proceedings of the 40th Annual Design Automation Conference, ACM, 2003: 99 - 104.
- [4] Abdul Ghani N H, Najm F N. Fast vectorless power grid verification using an approximate inverse technique [C]//Proceedings of the 46th Annual Design Automation Conference, ACM, 2009: 184 - 189.

- [5] Ferzli I A, Najm F N, Kruse L. A geometric approach for early power grid verification using current constraints [C]//Proceedings of the IEEE/ACM International Conference on Computer-aided design, 2007; 40–47.
- [6] Xiong X, Wang J. Verifying RLC power grids with transient current constraints[J]. IEEE Transactions on Computer-aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2013, 32(7): 1059–1071.
- [7] Zhu H, Wang Y, Liu F, et al. Efficient transient analysis of power delivery network with clock/power gating by sparse approximation [J]. IEEE Transactions on Computer-aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2015, 34(3): 409–421.
- [8] Ferzli I A, Chiprout E, Najm F N. Verification and codesign of the package and die power delivery system using wavelets[J]. IEEE Transactions on Computer-aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2010, 29(1): 92–102.
- [9] Zhao W, Cai Y, Yang J L. A multilevel 64-matrix-based approximate matrix inversion algorithm for vectorless power grid verification [C]//Proceedings of the 18th Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASP-DAC), IEEE, 2013; 163–168.
- [10] Zhao W, Cai Y, Yang J L. Fast vectorless power grid verification using maximum voltage drop location estimation [C]//Proceedings of the 19th Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASP-DAC), IEEE, 2014; 861–866.
- [11] Yao F F. Efficient dynamic programming using quadrangle inequalities [C]//Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM, 1980; 429–435.

(上接第 47 页)

- [8] Qin J, Bao W, Zhou W X, et al. Flow and heat transfer characteristics in fuel cooling channels of a recooling cycle [J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2010, 35(19): 10589–10598.
- [9] Bao W, Qin J, Zhou W X, et al. Effect of cooling channel geometry on re-cooled cycle performance for hydrogen fueled scramjet [J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2010, 35(13): 7002–7011.
- [10] Bao W, Qin J, Zhou W X, et al. Performance limit analysis of re-cooled cycle for regenerative cooling systems [J]. Energy Conversion and Management, 2009, 50(8): 1908–1914.
- [11] Zheng X F, Liu C X, Yan Y Y, et al. A review of thermoelectrics research—recent developments and potentials for sustainable and renewable energy applications [J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2014, 32(5): 486–503.
- [12] Yu C, Chau K T. Thermoelectric automotive waste heat energy recovery using maximum power point tracking [J]. Energy Conversion and Management, 2009, 50(6): 1506–1512.
- [13] Gou X L, Xiao H, Yang S W. Modeling, experimental study and optimization on low-temperature waste heat thermoelectric generator system [J]. Applied Energy, 2010, 87(10): 3131–3136.
- [14] Miller E W, Hendricks T J, Wang H, et al. Integrated dual-cycle energy recovery using thermoelectric conversion and an organic rankine bottoming cycle [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy, 2011, 225(1): 33–43.
- [15] Shu G Q, Zhao J, Tian H, et al. Parametric and exergetic analysis of waste heat recovery system based on thermoelectric generator and organic rankine cycle utilizing R123 [J]. Energy, 2012, 45(1): 806–816.
- [16] Riffat S B, Ma X L. Thermoelectrics; a review of present and potential applications [J]. Applied Thermal Engineering, 2003, 23(8): 913–935.
- [17] 鲍文, 秦江, 唐井峰, 等. 吸气式高超声速推进热力循环分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
BAO Wen, QIN Jiang, TANG Jingfeng, et al. Analysis of thermodynamics cycle for hypersonic airbreathing propulsion [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)