

高轨双星辐射源跟踪的高斯和-容积 Kalman 滤波算法*

李曦¹, 杨乐^{1,2}, 郭福成², 刘洋², 张敏²

(1. 江南大学物联网工程学院, 江苏无锡 214122; 2. 国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要:针对辐射源运动方程和观测方程的强非线性, 提出基于高斯和框架与5阶容积 Kalman 滤波(5CKF)的跟踪算法 GS-5CKF。该方法将起始时刻的时差观测所确定的位于地球表面的时差线按经度等间隔划分, 初始化多个并行的5CKF, 线性组合各滤波器的输出获得辐射源运动状态的估计。针对5CKF, 提出新的非线性测度并引入滤波器分裂与合并, 从而提高了跟踪精度, 同时保持 GS-5CKF 算法复杂度基本不变。仿真表明, 相对仅使用单个5CKF 和基于高斯和框架但使用3阶容积 Kalman 滤波器的 GS-3CKF 等方法, 提出的算法具有更高的估计精度。

关键词:高斯和; 5阶容积 Kalman 滤波; 辐射源跟踪; 非线性滤波; 分裂与合并

中图分类号: TN971 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2016)02-099-08

Gaussian-sum based cubature Kalman filtering algorithm for source geolocation using dual geostationary satellites

LI Xi¹, YANG Le^{1,2}, GUO Fucheng², LIU Yang², ZHANG Min²

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;

2. School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To tackle the inherent high nonlinearity of motion equation and observation equation of radiation source, a GS (Gaussian-sum) based 5CKF (5th-order cubature Kalman filter) tracking algorithm, referred to as GS-5CKF, was proposed. It consists of multiple parallel 5CKFs, which were initialized through partitioning the candidate source positions determined by the time difference of arrival measurement at the beginning of the tracking process with respect to the source latitude. The linear combination of filter outputs was conducted to estimate the motion state of radiation source. A new nonlinearity measure was advocated, on the basis of which a filtering splitting and merging procedure was developed to further enhance the performance of GS-5CKF while keeping its computational complexity fixed. Simulation results show that: compared with the tracking algorithms using the single 5CKF and the GS-3CKF, the newly proposed GS-5CKF technique exhibits higher source geolocation accuracy.

Key words: Gaussian sum; 5th-order cubature Kalman filtering; source tracking; nonlinear filtering; splitting and merging

定位地球表面的运动辐射源具有重要的民用和军用价值。使用静止轨道(GEostationary Orbit, GEO)卫星实现辐射源的被动跟踪具有隐蔽性好、覆盖区域广、对同一片区域可连续监视等优点^[1]。本文考虑使用两颗位于赤道上空的 GEO 卫星跟踪巡航状态的地面辐射源, 辐射源载频已知且固定。高轨双星从辐射源信号中估计信号的到达时差(Time Difference Of Arrival, TDOA)、到达频差(Frequency Difference Of Arrival, FDOA)以及信号到达高轨卫星的多普勒频移(Doppler shift), 以跟踪辐射源的运动。上述问题是多种重要应用的抽象, 如连续监视星下一一定经纬度范围

内(如北纬 0°~40°, 东经 100°~140°)的无人机等飞行器。

已有的双站辐射源跟踪文献主要考虑了接收站与辐射源处于同一平面且相距数十千米的情形^[2-3], 这时, 仅使用信号的 TDOA 和 FDOA 观测量即可实现辐射源跟踪^[2-3]。相比已有文献, 本文研究的高轨双星辐射源跟踪是一个三维空间中的估计问题。另外, 由于 GEO 卫星与辐射源距离较大(可达数万千米), 需引入辐射源信号到达卫星的多普勒频移等观测量, 以提高运动参数(如辐射源位置和速度)的可观测性(observability)^[4]。

值得指出的是: 本文考虑的辐射源是非合作

* 收稿日期: 2015-04-16

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(61304264, 61305017); 江苏省自然科学基金资助项目(BK20140166)

作者简介: 李曦(1990—), 男, 江苏南京人, 博士研究生, E-mail: lx_njgc@163.com;

杨乐(通信作者), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, E-mail: le.yang.le@gmail.com

性的,其信号发射时间未知,故无法从其信号到达时间(Time Of Arrival, TOA)直接获得辐射源与卫星的距离信息。这使得在卫星导航系统中得到广泛应用的基于 TOA 的瞬时定位方法不再适用。

高轨双星辐射源跟踪问题是非线性的,其非线性主要来源于两个方面。首先,辐射源沿地球表面运动,其运动方程在大地(geodetic)坐标系和地心地固(Earth-Centered, Earth-Fixed, ECEF)坐标系下均是非线性的;其次,时差、频差以及辐射源信号到达卫星的多普勒频移等观测量与辐射源运动参数的函数关系也是非线性的。因此,需使用非线性滤波技术实现辐射源运动参数的在线(online)估计。

实际中广泛使用的非线性滤波器有扩展 Kalman 滤波器(Extended Kalman Filter, EKF)^[5]、无迹 Kalman 滤波器(Unscented Kalman Filter, UKF)^[6]、3 阶容积 Kalman 滤波器(3rd-order Cubature Kalman Filter, 3CKF)^[7]和 Gauss Hermitian Kalman 滤波器^[8]等。它们使用高斯分布逼近状态矢量的后验概率密度。因高轨双星辐射源跟踪问题非线性较强,仅使用单个非线性滤波器难以获得较好的跟踪精度,滤波算法也容易发散。

近年提出的粒子滤波器(Particle Filter, PF)^[9]是一种基于蒙特卡洛(Monte Carlo, MC)方法的非线性滤波器。PF 能够处理非高斯、非线性滤波问题,且能够逼近任意后验概率密度函数。但 PF 计算量较大,且随着状态矢量维数的增加,所需粒子数量也急剧增多。

本文以新近提出的 5 阶容积 Kalman 滤波器(5th-order Cubature Kalman Filter, 5CKF)^[10]为基础,提出了一种基于高斯和(Gaussian Sum, GS)框架以及 5CKF 的高轨双星辐射源跟踪算法 GS-5CKF。GS-5CKF 包含多个并行的 5CKF;在每个采样时刻,融合所有 5CKF 的输出获得辐射源运动参数的估计。

GS-5CKF 算法是文献[11]中针对仅测角跟踪(Bearing-Only Tracking, BOT)提出的基于 GS 框架和 3CKF 的 GS-3CKF 算法的扩展。与 GS-3CKF 不同的是:首先,GS-5CKF 使用 5CKF 替代了 GS-3CKF 中的 3CKF。这是因为高轨双星辐射源跟踪问题有较强的非线性,而 5CKF 在处理非线性滤波问题时具有更好的性能^[10]。另外,针对 5CKF,本文提出新的非线性测度(nonlinearity measure),度量每个 5CKF 状态更新运算的非线性程度。若某个 5CKF 的非线性测度

高于预设的阈值,则将该滤波器分裂(splitting),以降低状态更新运算的非线性程度,进一步提高估计精度。为保持 GS-5CKF 算法所包含的滤波器数量和复杂度基本不变,本文使用滤波器合并(merging)^[12]以消除滤波器分裂带来的滤波器数量的增加。

GS-5CKF 算法的初始化利用了由起始时刻的辐射源信号时差观测量所确定的在地球表面的时差线。将时差线按经度等间隔划分,使 GS-5CKF 所包含的多个 5CKF 的辐射源初始位置估计在时差线上较均匀地分布。

1 问题描述

考虑图 1 所示的辐射源跟踪场景。

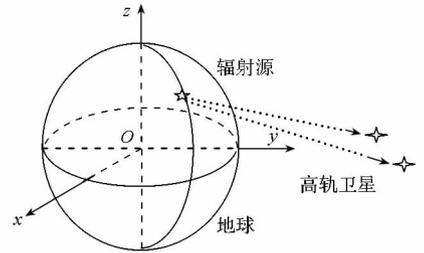


图 1 高轨双星辐射源跟踪场景

Fig. 1 Source geolocation using dual GEO satellites

为简化讨论,假定地球为一个半径等于赤道半径的正球体^[1]。上述近似在北纬 $0^\circ \sim 40^\circ$ 范围内引入了不超过 10 km 的密合误差,仿真表明上述近似误差对估计精度的影响不显著(见本文第 3 节)。辐射源沿地球表面做等高程巡航,其运动方程可写作:

$$\begin{bmatrix} B_k \\ L_k \\ V_{N,k} \\ V_{E,k} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_k \begin{bmatrix} B_{k-1} \\ L_{k-1} \\ V_{N,k-1} \\ V_{E,k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{N,k} \\ m_{E,k} \end{bmatrix} \quad (1)$$

状态转移矩阵 \mathbf{F}_k 定义为:

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{T}{R+H} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{T}{(R+H)\cos B_{k-1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中: T 是观测间隔; $R = 6378.137$ km 是赤道半径; H 是辐射源高程,假设已知; B_k 和 L_k 分别表示 kT 时刻($k = 0, 1, 2, \dots$)辐射源纬度和经度,单位为 rad; $V_{N,k}$ 和 $V_{E,k}$ 是 kT 时刻辐射源沿正北和正东方向的速度。

可以看出,状态转移矩阵 \mathbf{F}_k 与 $(k-1)T$ 时刻

辐射源的纬度 B_{k-1} 有关,故辐射源运动方程是非线性的。式(1)中, $m_{N,k}$ 和 $m_{E,k}$ 是过程噪声,反映了辐射源运动速度的随机变化;假设 $m_{N,k}$ 和 $m_{E,k}$ 是独立的零均值高斯白噪声。

令 $\mathbf{x}_k = [B_k, L_k, V_{N,k}, V_{E,k}]^T$ 为待估计的运动辐射源的状态矢量。需要指出的是,对辐射源高程变化的描述可通过在式(1)中增加高程和高程变化率两个状态变量实现。为简化讨论,本文仅考虑辐射源做等高程巡航的情形。

利用两颗 GEO 卫星实现运动辐射源跟踪。在 kT 时刻,卫星在 ECEF 坐标系下的位置和速度分别记作 $\mathbf{s}_{1,k}$, $\mathbf{s}_{2,k}$, $\dot{\mathbf{s}}_{1,k}$ 和 $\dot{\mathbf{s}}_{2,k}$ 。为表述清楚起见,下文称 $\mathbf{s}_{1,k}$ 为主星, $\mathbf{s}_{2,k}$ 为辅星。

高轨双星系统测量辐射源信号的 TDOA, FDOA 以及信号到达主星 $\mathbf{s}_{1,k}$ 的多普勒频移。在 kT 时刻,上述观测分别记作:

$$\Delta r_k = \|\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{2,k}\| - \|\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{1,k}\| + n_{\Delta r,k} \quad (2)$$

$$\Delta f_k = \frac{(\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{2,k})^T}{\lambda \|\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{2,k}\|} (\mathbf{v}_k - \dot{\mathbf{s}}_{2,k}) - \frac{(\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{1,k})^T}{\lambda \|\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{1,k}\|} (\mathbf{v}_k - \dot{\mathbf{s}}_{1,k}) + n_{\Delta f,k} \quad (3)$$

$$fd_k = -\frac{(\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{1,k})^T}{\lambda \|\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_{1,k}\|} (\mathbf{v}_k - \dot{\mathbf{s}}_{1,k}) + n_{fd,k} \quad (4)$$

其中, $n_{\Delta r,k}$, $n_{\Delta f,k}$ 和 $n_{fd,k}$ 是测量噪声,假设它们是独立的零均值高斯白噪声。时差观测在数值上等于辐射源信号到达两颗卫星的到达时间的差。由于上述相减运算的引入,大气延迟等因素对于时差观测的影响不显著。 $\lambda = c/f_o$ 是辐射源信号的波长 ($c = 299\,792\,458$ m/s 是光速, f_o 为辐射源信号的载频,假设 f_o 固定且已知)。 \mathbf{u}_k 和 \mathbf{v}_k 是 kT 时刻辐射源在 ECEF 坐标系下的位置和速度矢量,它们由辐射源的状态矢量 \mathbf{x}_k 经如式(5)、式(6)所示变换得出。

$$\mathbf{u}_k = (R + H) \begin{bmatrix} \cos B_k \cos L_k \\ \cos B_k \sin L_k \\ \sin B_k \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_k = (R + H) \begin{bmatrix} -\sin B_k \cos L_k \\ -\sin B_k \sin L_k \\ \cos B_k \end{bmatrix} \dot{B}_k + (R + H) \begin{bmatrix} -\cos B_k \sin L_k \\ \cos B_k \cos L_k \\ 0 \end{bmatrix} \dot{L}_k \quad (6)$$

其中, \dot{B}_k 和 \dot{L}_k 表示 kT 时刻辐射源纬度和经度的变化率,即 $\dot{B}_k = V_{N,k}/(R + H)$, $\dot{L}_k = V_{E,k}/[(R + H) \cdot \cos B_k]$ 。

从式(2)~(4)可以看出,在每个采样时刻,高轨双星可获得关于辐射源状态矢量 \mathbf{x}_k 的三个观测,考虑到 \mathbf{x}_k 含四个未知量,因此系统无法从当前时刻的观测矢量 $\mathbf{z}_k = [\Delta r_k, \Delta f_k, fd_k]^T$ 中直接估计 \mathbf{x}_k 。

将辐射源运动模型式(1)和时差、频差以及主星多普勒频移的观测方程式(2)~(4)联立为如式(7)所示的离散时间状态空间(state-space)模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{m}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{m}_k = [0, 0, m_{N,k}, m_{E,k}]^T$ 是过程噪声矢量, $\mathbf{n}_k = [n_{\Delta r,k}, n_{\Delta f,k}, n_{fd,k}]^T$ 是观测噪声矢量,它们是相互独立的零均值高斯白噪声, \mathbf{m}_k 和 \mathbf{n}_k 的协方差矩阵分别记作 \mathbf{Q}_k 和 \mathbf{R}_k 。

2 辐射源跟踪算法

高轨双星辐射源跟踪算法 GS-5CKF 包含多个并行的 5 阶容积 Kalman 滤波器(5CKF)。在每个采样时刻,GS-5CKF 更新各 5CKF 的权重,并计算 5CKF 输出的线性组合获得对运动辐射源状态矢量 \mathbf{x}_k 的估计。

2.1 GS-5CKF 算法

假设 GS-5CKF 包含 N_F 个并行的 5CKF。在 $(k-1)T$ 时刻,第 n 个 5CKF 对辐射源运动状态 \mathbf{x}_{k-1} 的估计及其协方差矩阵分别写作 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^n$ 和 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}^n$,该滤波器的权重为 w_{k-1}^n 。将 $(k-1)T$ 时刻的第 n 个 5CKF 简写作如下的三元组(triplet): $\{w_{k-1}^n, \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^n, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^n\}$, $n = 1, 2, \dots, N_F$ 。

在 kT 时刻,GS-5CKF 的每个 5CKF 首先进行状态预测(prediction):

$$\begin{aligned} & \{w_{k-1}^n, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^n, \mathbf{P}_{k|k-1}^n\} \\ & = 5CKF - Prediction \{w_{k-1}^n, \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^n, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^n\} \end{aligned}$$

式中, $\{w_{k-1}^n, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^n, \mathbf{P}_{k|k-1}^n\}$ 是状态预测运算后的第 n 个 5CKF, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^n$ 是该 5CKF 对辐射源当前状态 \mathbf{x}_k 的预测值, $\mathbf{P}_{k|k-1}^n$ 是 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^n$ 的协方差矩阵。5CKF - Prediction $\{\cdot\}$ 是 5CKF 的状态预测运算,其流程将在 2.2 节给出。

5CKF 状态更新(update)之前,需判断靠近 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^n$ 的局部状态空间的非线性度是否超过了阈值 γ ,以决定是否进行滤波器分裂来降低状态更新运算的非线性度,提高估计精度。

在文献[13]中提出的非线性测度的基础上,定义新的针对 5CKF 的非线性度 $\bar{\eta}^n$ 。5CKF 含 $L = n_x^2 + 3n_x + 3$ 个 Sigma 点(Sigma points) [10],其中

存在 $(L-1)/2$ 对关于 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n$ 对称的 Sigma 点 (见 2.2 节表 1)。这里, $n_x=4$ 是状态矢量 \mathbf{x}_k 的维数。将关于 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n$ 对称的一对 Sigma 点分别写作 $\alpha_{i,k|k-1}^n$ 和 $\alpha_{i+1,k|k-1}^n$ ($i=1,2,\dots,(L-1)/2$); 它们连线方向的绝对 (absolute) 非线性度定义为:

$$\eta_i^n = \frac{1}{2} \|\beta_{i,k|k-1}^n + \beta_{i+1,k|k-1}^n - 2h(\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n)\|^2 \quad (8)$$

式中, $h(\cdot)$ 是状态空间模型式 (7) 中的观测函数, 它包含时差、频差和辐射源信号到达主星的多普勒频移的观测方程; $\beta_{i,k|k-1}^n$ 和 $\beta_{i+1,k|k-1}^n$ 计算方法为:

$$\beta_{j,k|k-1}^n = h(\alpha_{j,k|k-1}^n), \quad j=i \text{ or } i+1 \quad (9)$$

为缩小非线性度的动态范围, 引入 $\alpha_{i,k|k-1}^n$ 和 $\alpha_{i+1,k|k-1}^n$ 连线方向相对 (relative) 非线性度^[14]:

$$\bar{\eta}_i^n = \eta_i^n / \eta_{i,t}^n \quad (10)$$

其中,

$$\eta_{i,t}^n = \|\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i^n\|^2 + \|\beta_{i,k|k-1}^n - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i^n\|^2 + \|\beta_{i+1,k|k-1}^n - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i^n\|^2 \quad (11)$$

式中, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i^n$ 表示非线性映射 $h(\cdot)$ 后, $\alpha_{i,k|k-1}^n$, $\alpha_{i+1,k|k-1}^n$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n$ 的中心, 即:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_i^n = \frac{1}{3} (\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n) + \beta_{i,k|k-1}^n + \beta_{i+1,k|k-1}^n)$$

第 n 个 5CKF 的平均相对非线性度是:

$$\bar{\eta}^n = \frac{1}{(L-1)/2} \sum_{i=1}^{(L-1)/2} \bar{\eta}_i^n \quad (12)$$

从上式可以看出, $\bar{\eta}^n$ 是单个 5CKF 所有关于 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n$ 对称的容积点对连线方向的相对非线性度 $\bar{\eta}_i^n$ 的算术平均。 $\bar{\eta}_i^n$ 的大小取决于观测函数 $h(\cdot)$ 的非线性程度、容积点 $\alpha_{i,k|k-1}^n$ 和 $\alpha_{i+1,k|k-1}^n$ 的连线方向以及 $\alpha_{i,k|k-1}^n$ 和 $\alpha_{i+1,k|k-1}^n$ 之间的欧式距离等因素。若 $h(\cdot)$ 是线性函数, 则 η_i^n , $\bar{\eta}_i^n$ 和 $\bar{\eta}^n$ 均为 0。对于高轨双星辐射源跟踪问题, 由于观测方程和坐标变换是非线性的 (见式 (2) ~ (6)), 故 η_i^n , $\bar{\eta}_i^n$ 和 $\bar{\eta}^n$ 均大于 0。

若 $\bar{\eta}^n$ 小于阈值 γ , 则该 5CKF 不分裂, $N_G^n = 1$ 。否则, 第 n 个 5CKF $\{w_{k-1}^n, \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n, \mathbf{P}_{klk-1}^n\}$ 将被分裂成 $N_G^n = 2$ 个子滤波器: $\{w_{k-1}^n w_{k-1}^{n,1}, \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,1}, \mathbf{P}_{klk-1}^{n,1}\}$ 和 $\{w_{k-1}^n w_{k-1}^{n,2}, \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,2}, \mathbf{P}_{klk-1}^{n,2}\}$ ^[11], 以降低该滤波器更新运算的非线性度、提高估计精度。其中^[11,13]:

$$\begin{cases} w_{k-1}^{n,1} = w_{k-1}^{n,2} = 0.5 \\ \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,1} = \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n + v \sqrt{\lambda^n} \mathbf{u}^n \\ \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,2} = \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n - v \sqrt{\lambda^n} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{P}_{klk-1}^{n,1} = \mathbf{P}_{klk-1}^{n,2} = \mathbf{P}_{klk-1}^n - v^2 \lambda^n \mathbf{u}^n (\mathbf{u}^n)^T \end{cases} \quad (13)$$

式中: $v = 0.5$ 是偏离因子^[13], 决定了 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,1}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,2}$ 的欧式距离; \mathbf{u}^n 是协方差矩阵 \mathbf{P}_{klk-1}^n 最大特征值 λ^n 对应的特征向量。 N_G^n 个子滤波器分别进行状态更新:

$$\{w_k^{n,g}, \hat{\mathbf{x}}_{klk}^{n,g}, \mathbf{P}_{klk}^{n,g}\} = 5CKF - Update \{w_{k-1}^n w_{k-1}^{n,g}, \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,g}, \mathbf{P}_{klk-1}^{n,g}\}$$

式中: $g = 1, \dots, N_G^n$; $\hat{\mathbf{x}}_{klk}^{n,g}$ 和 $\mathbf{P}_{klk}^{n,g}$ 是第 g 个子滤波器对辐射源运动状态矢量 \mathbf{x}_k 的估计及其协方差矩阵; 权重 $w_k^{n,g}$ 由式 (14) 计算^[11]:

$$w_k^{n,g} \propto p(z_k | \mathbf{x}_k, n, g) w_{k-1}^n w_{k-1}^{n,g} \quad (14)$$

5CKF - Update $\{\cdot\}$ 代表 5CKF 的状态更新运算, 其流程将在 2.2 节给出。

GS - 5CKF 计算所有 5CKF 输出 $\hat{\mathbf{x}}_{klk}^{n,g}$ 的线性组合获得 \mathbf{x}_k 的估计:

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk} = \sum_{n=1}^{N_F} \sum_{g=1}^{N_G^n} w_k^{n,g} \hat{\mathbf{x}}_{klk}^{n,g} \quad (15)$$

在更新处理之后, GS - 5CKF 进行滤波器合并操作, 将滤波器总数维持在 N_F 个, 以保持 GS - 5CKF 的计算复杂度不变。假设执行分裂操作后共生成 N_T ($N_T \geq N_F$) 个 5CKF; 将其权重 $w_k^{n,g}$ 按降序排列并将权重最低的 $N_T - N_F + 1$ 个滤波器合并为一个^[11-12]。至此, GS - 5CKF 完成了 kT 时刻的全部运算。

2.2 5 阶容积分 Kalman 滤波算法

本节给出 5CKF 的预测 5CKF - Prediction $\{\cdot\}$ 与更新 5CKF - Update $\{\cdot\}$ 过程。5CKF 是基于 5 阶 Spherical Simplex-Radial (SSR) 规则的非线性滤波器^[10], 它包含 $L = n_x^2 + 3n_x + 3$ 个 Sigma 点 (见表 1)。

表 1 5CKF 的 Sigma 点及权重

Tab.1 Sigma points and weights of 5CKF		
Sigma 点 ξ_i	权重 ω_i	数量
$\mathbf{0}$	$\frac{2}{n_x + 2}$	1
$\pm \sqrt{n_x + 2} \mathbf{a}_i$	$\frac{(7 - n_x) n_x^2}{2(n_x + 1)^2 (n_x + 2)^2}$	$2(n_x + 1)$
$\pm \sqrt{n_x + 2} \mathbf{b}_i$	$\frac{2(n_x - 1)^2}{(n_x + 1)^2 (n_x + 2)^2}$	$n_x(n_x + 1)$

表中, ξ_i 和 ω_i 分别表示 5 阶 SSR 规则的第 i 个 Sigma 点及其权重, $i = 1, \dots, L$ 。 \mathbf{a}_i 与 \mathbf{b}_i 的定义见文献 [10] 中的式 (16) 和式 (17)。另外, 表 1 表明: $\pm \sqrt{n_x + 2} \mathbf{a}_i$ 和 $\pm \sqrt{n_x + 2} \mathbf{b}_i$ 都是关于 $\mathbf{0}$ 对称

的 Sigma 点对,故共有 $n_x^2/2 + 3n_x/2 + 1 = (L-1)/2$ 个关于 $\mathbf{0}$ 对称的 Sigma 点对。

5 阶容积 Kalman 滤波器的状态预测 5CKF - Prediction $\{w_{k-1}^n, \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^n, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^n\}$ 顺序执行如下运算并输出状态预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n$ 及其协方差矩阵 \mathbf{P}_{klk-1}^n :

$$\bar{\alpha}_{i,k-1|k-1}^n = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}^n} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^n \quad (16)$$

$$\bar{\beta}_{i,k-1|k-1}^n = \mathbf{g}(\bar{\alpha}_{i,k-1|k-1}^n) \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n = \sum_{i=1}^L \omega_i \bar{\beta}_{i,k-1|k-1}^n \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{klk-1}^n = \sum_{i=1}^L \omega_i \bar{\beta}_{i,k-1|k-1}^n (\bar{\beta}_{i,k-1|k-1}^n)^T - \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n (\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^n)^T + \mathbf{Q}_k \quad (19)$$

其中, $\sqrt{\mathbf{P}}$ 表示正定矩阵 \mathbf{P} 的 Cholesky 分解, $\mathbf{g}(\cdot)$ 是状态空间模型式(7)中的状态转移函数, \mathbf{Q}_k 是过程噪声 \mathbf{m}_k 的协方差矩阵。

5 阶容积 Kalman 滤波器的状态更新 5CKF - Update $\{w_{k-1}^n, w_{k-1}^n, \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,g}, \mathbf{P}_{klk-1}^{n,g}\}$ 顺序执行如下运算并输出更新后的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{klk}^{n,g}$ 及其协方差矩阵 $\mathbf{P}_{klk}^{n,g}$:

$$\alpha_{i,klk-1}^{n,g} = \sqrt{\mathbf{P}_{klk-1}^{n,g}} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,g} \quad (20)$$

$$\beta_{i,klk-1}^{n,g} = \mathbf{h}(\alpha_{i,klk-1}^{n,g}) \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{klk-1}^{n,g} = \sum_{i=1}^L \omega_i \beta_{i,klk-1}^{n,g} \quad (22)$$

$$\mathbf{G}_k^{n,g} = \mathbf{P}_{xz,klk-1}^{n,g} (\mathbf{P}_{zz,klk-1}^{n,g})^{-1} \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk}^{n,g} = \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,g} + \mathbf{G}_k^{n,g} (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{klk-1}^{n,g}) \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_{klk}^{n,g} = \mathbf{P}_{klk-1}^{n,g} - \mathbf{G}_k^{n,g} \mathbf{P}_{zz,klk-1}^{n,g} (\mathbf{G}_k^{n,g})^T \quad (25)$$

其中, $\mathbf{G}_k^{n,g}$ 为 Kalman 增益 (Kalman gain),

$$\mathbf{P}_{xz,klk-1}^{n,g} = \sum_{i=1}^L \omega_i \alpha_{i,klk-1}^{n,g} (\beta_{i,klk-1}^{n,g})^T - \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^{n,g} (\hat{\mathbf{z}}_{klk-1}^{n,g})^T$$

$$\mathbf{P}_{zz,klk-1}^{n,g} = \sum_{i=1}^L \omega_i \beta_{i,klk-1}^{n,g} (\beta_{i,klk-1}^{n,g})^T - \hat{\mathbf{z}}_{klk-1}^{n,g} (\hat{\mathbf{z}}_{klk-1}^{n,g})^T + \mathbf{R}_k$$

式中, \mathbf{R}_k 是观测噪声 \mathbf{n}_k 的协方差矩阵。对比文献[7]以及式(16)~(25)可以看出:5阶容积 Kalman 滤波器与3阶容积 Kalman 滤波器的状态预测和更新过程相似,主要的区别在于 Sigma 点的位置及其权重选择。

2.3 GS-5CKF 算法的初始化

非线性滤波算法的初始化对其估计性能有明显的影响,较大的初始化误差可导致滤波算法收敛慢、估计精度降低,甚至可能导致算法发散^[15]。本文基于文献[2-3,15]提出的利用起始时刻的辐射源信号时差观测量初始化二维高斯和滤波算法的框架,发展出一种能初始化三维的跟踪算法 GS-5CKF 的方法。上述方法的关键在于计算由

起始时刻的时差观测量确定的双曲面与地球表面的交线(即时差线)。

不失一般性,假设起始时刻是 0 时刻,该时刻的时差观测量是 Δr_0 。若没有观测误差, Δr_0 可以确定一个双曲面,它是由 Δr_0 给定的、焦点在 0 时刻主星和辅星位置(即 $\mathbf{s}_{1,0}$ 和 $\mathbf{s}_{2,0}$)的双曲线绕连接 $\mathbf{s}_{1,0}$ 和 $\mathbf{s}_{2,0}$ 的对称轴旋转而成;在 0 时刻,辐射源必然位于上述双曲面与距地球表面 H 的正球面相交形成的时差线上。这里, H 是辐射源已知高程。

时差线的准确计算较为复杂。本文提出一种简便的近似计算方法。考虑到实际应用中,辐射源与双星的距离远大于双星间距,因此,由 Δr_0 确定的双曲面可由一个正圆锥面近似,其顶点在 $\mathbf{s}_{1,0}$ 和 $\mathbf{s}_{2,0}$ 的中点,半顶角 ϕ_0 为:

$$\phi_0 = \arccos\left(\frac{|\Delta r_0|}{\|\mathbf{s}_{2,0} - \mathbf{s}_{1,0}\|}\right) \quad (26)$$

该正圆锥面是首先将由 Δr_0 确定的、焦点在 $\mathbf{s}_{1,0}$ 和 $\mathbf{s}_{2,0}$ 位置的双曲线用其渐近线代替^[16-17],再绕连接 $\mathbf{s}_{1,0}$ 和 $\mathbf{s}_{2,0}$ 的对称轴旋转而成。由双曲面与距地球表面 H 的正球面相交而成的时差线可以由上述正圆锥面与距地球表面 H 的正球面相交所得的近似时差线逼近。

初始化 GS-5CKF 所包含的 N_F 个 5CKF 的过程如下:首先计算时差观测量 $\Delta r_0 + 3\sigma_r$ 和 $\Delta r_0 - 3\sigma_r$ 对应的两条近似时差线(σ_r 是时差观测误差的标准差)。接下来,按照经度等间隔地将两条近似时差线划分为 N_F 个不重合的线段。令 $\mathbf{y}_1^{1,n}$ 和 $\mathbf{y}_2^{1,n}$ 为时差 $\Delta r_0 + 3\sigma_r$ 确定的近似时差线上第 n 个线段的端点; $\mathbf{y}_1^{2,n}$ 和 $\mathbf{y}_2^{2,n}$ 为时差 $\Delta r_0 - 3\sigma_r$ 确定的近似时差线第 n 个线段的端点($n = 1, 2, \dots, N_F$)。这四个点确定 GS-5CKF 中第 n 个 5CKF 的辐射源初始位置估计的误差椭圆,该椭圆长半轴的两个端点是:

$$\mathbf{y}_{c1}^n = (\mathbf{y}_1^{1,n} + \mathbf{y}_1^{2,n})/2$$

$$\mathbf{y}_{c2}^n = (\mathbf{y}_2^{1,n} + \mathbf{y}_2^{2,n})/2$$

其半长 D_c^n 和方向矢量 $\mathbf{e}(a_c^n)$ 为:

$$D_c^n = \|\Delta \mathbf{y}_c^n\|/2, \quad \Delta \mathbf{y}_c^n = \mathbf{y}_{c1}^n - \mathbf{y}_{c2}^n$$

$$\mathbf{e}(a_c^n) = \Delta \mathbf{y}_c^n / \|\Delta \mathbf{y}_c^n\|$$

第 n 个误差椭圆短半轴的半长 D_s^n 为:

$$D_s^n = \mathbf{e}^T(a_c^n + \pi/2) \frac{\mathbf{y}_1^{1,n} + \mathbf{y}_2^{1,n} - \mathbf{y}_1^{2,n} - \mathbf{y}_2^{2,n}}{4}$$

第 n 个 5CKF 在起始时刻的状态矢量估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}^n$ 及其协方差矩阵 $\mathbf{P}_{0|0}^n$ 为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0}^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{y}_{c1}^n + \mathbf{y}_{c2}^n)/2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{P}_{010}^n = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{010}^n & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \check{\mathbf{P}}_{010}^n \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中,

$$\hat{\mathbf{P}}_{010}^n = \mathbf{T}(a_c^n) \begin{bmatrix} (D_c^n)^2 & 0 \\ 0 & (D_s^n)^2 \end{bmatrix} \mathbf{T}(a_c^n)^T$$

$$\mathbf{T}(a_c^n) = [\mathbf{e}(a_c^n) \quad \mathbf{e}(a_c^n + \pi/2)]$$

$$\check{\mathbf{P}}_{010}^n = \begin{bmatrix} V_{\max}^2 & 0 \\ 0 & V_{\max}^2 \end{bmatrix}$$

这里, $\mathbf{T}(a_c^n)$ 为旋转矩阵; V_{\max} 是辐射源最大运动速度, 由先验知识确定。

从式(27)和式(28)可以看出, 在起始时刻, 每个 5CKF 的辐射源运动速度估计值均设为 0; 辐射源位置估计值是不同位置误差椭圆的中心, 它分布在由起始时刻的时差观测量确定的近似时差线上。

3 仿真实验

考虑如下仿真场景: 采样间隔 $T = 45$ s, 跟踪总时长为 45 min。辐射源信号的载频为 $f_0 = 14$ GHz。辐射源信号到达高轨双星系统的时差、频差以及到达主星的多普勒频移的观测误差的标准差分别等于 $0.1 \mu\text{s}$, 0.01 Hz 和 50 Hz。辐射源高程等于 18 km, 其巡航速度为 150 m/s, 航向正东。在跟踪起始时刻, 辐射源位于北纬 25° , 东经 119.7° 。

在跟踪起始时刻, 高轨双星系统主辅星间距为 3726 km; 主星位于南纬 0.0195° , 东经 110.4° , 高程为 35796 km, 其在 ECEF 坐标下的速度矢量 $\mathbf{s}_{1,0} = [0.996, 1.275, 2.029]^T$ m/s; 辅星位于南纬 0.0184° , 东经 105.3° , 高程为 39033 km, 在 ECEF 坐标系下的速度矢量 $\mathbf{s}_{2,0} = [-0.628, 0.388, 1.245]^T$ m/s。在辐射源跟踪期间, 主辅星的平均运动速度分别为 2.59 m/s 和 1.45 m/s。

仿真实验使用 GS-5CKF 和 GS-3CKF^[11] 两种算法实现对运动辐射源的跟踪。为确保比较的公平性, 本文使用 2.3 节提出的初始化方法同时初始化 GS-5CKF 和 GS-3CKF。另外, 两种算法分别包含 30 个 5CKF 和 30 个 3CKF; 且均假设辐射源高程为 10 km, 与真实辐射源高程存在 8 km 的误差。仿真实验表明, 仅使用 30 个容积 Kalman 滤波器, GS-5CKF 和 GS-3CKF 就能获得较好的辐射源跟踪精度; 高程误差对定位估计精度的影响也不显著。

根据文献[11], 本文设定 GS-5CKF 和

GS-3CKF 的辐射源运动速度的随机噪声的标准差为 10^{-3} m/s。值得指出的是, 该标准差的选择会影响滤波算法的噪声抑制和跟踪能力。为进一步提升 GS-5CKF 算法的实用性, 在未来的工作中可考虑引入运动速度随机噪声方差在线估计^[18] 或交互多模型 (Interactive Multiple Model, IMM) 等技术。非线性度的阈值 γ 设定为 0.2 。另外, 仿真假定如下的先验信息是已知的: 辐射源位于北半球, 其位置的纬度范围是 0° 到 40° ; 其最大速度为 $V_{\max} = 250$ m/s。

图 2 给出了在某一次蒙特卡洛仿真中, 使用 2.3 节提出的初始化方法获得的 30 个辐射源位置估计 (图中用三角形表示) 及其误差椭圆。从图中可以看出, 因近似时差线按照辐射源位置经度等间隔分割, 获得的 30 个辐射源位置估计较均匀地分布在由跟踪起始时刻的时差观测量确定的近似时差线上, 且不同的误差椭圆的面积也相似。

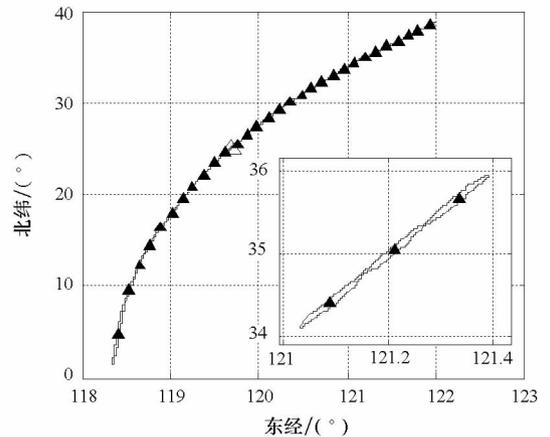


图 2 由跟踪起始时刻的时差观测量近似确定的辐射源位置估计及其误差椭圆

Fig. 2 Source location estimates and the associated error ellipses derived from the TD OA measurement obtained at the beginning of the source tracking process

图 3 和图 4 给出了在 1000 次蒙特卡洛仿真中 GS-5CKF 和 GS-3CKF 算法对辐射源位置与速度估计的均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE)。另外, 两个图中还包含了辐射源位置和速度估计的克莱默-劳下界 (Cramer-Rao Lower Bound, CRLB) 以及 GS-5CKF 的第 14 个 5CKF 单独运行时 (不进行滤波器分裂和合并操作) 对辐射源的位置和速度的估计 RMSE。在起始时刻, 第 14 个 5CKF 的辐射源位置估计误差为 247 km。

从图 3 和图 4 可以看出, 由于高轨双星辐射源跟踪问题较强的非线性, 在辐射源位置初始化存在一定误差的情况下, 仅使用单个 5CKF 并不

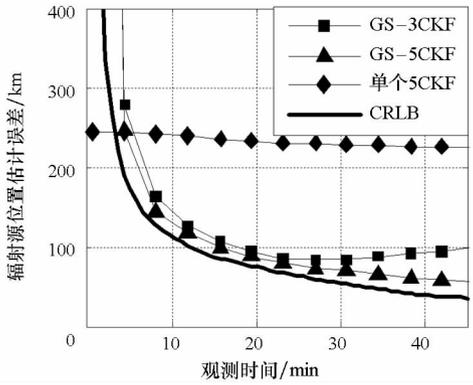


图3 位置估计 RMSE

Fig. 3 Position estimation RMSE

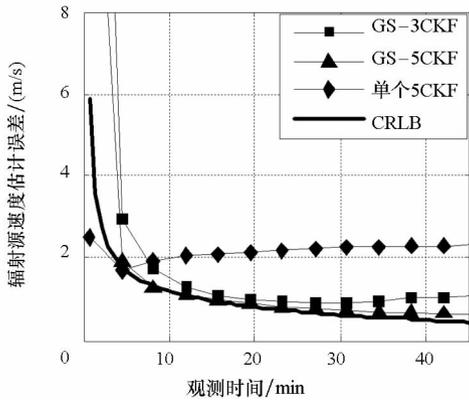


图4 速度估计 RMSE

Fig. 4 Velocity estimation RMSE

能获得较好的辐射源位置和速度估计精度;随着跟踪时间的增加,单个5CKF的估计RMSE曲线并未出现明显的下降。

另外,从图3和图4中可知,相对于单个5CKF,GS-5CKF和GS-3CKF算法的估计RMSE随着观测量的积累迅速下降,两种方法的收敛速度接近。由于5CKF的使用,GS-5CKF比GS-3CKF有着更高的估计精度,其性能更接近CRLB。以图3为例,在第40 min,GS-5CKF的辐射源位置估计RMSE比GS-3CKF的要低近30 km。

图5给出了在上述1000次蒙特卡洛仿真中,GS-5CKF算法各5CKF的相对非线性度的平均值随时间变化,以反映滤波器分裂和合并操作对算法估计性能的影响。从图中可知,在跟踪起始阶段,各5CKF的位置估计协方差矩阵与时差线基本重合(如图2所示),各5CKF的相对非线性度均较低。随着滤波的进行,各5CKF的相对非线性度显著上升,滤波器分裂和合并操作频繁发生,降低了5CKF的状态更新运算的非线性程度,有效地提升了GS-5CKF算法的估计精度(对比

图3和图4)。在本仿真中,第20 min后,参与分裂与合并的滤波器数量减少,这是因为多数5CKF的状态矢量协方差矩阵已较小。

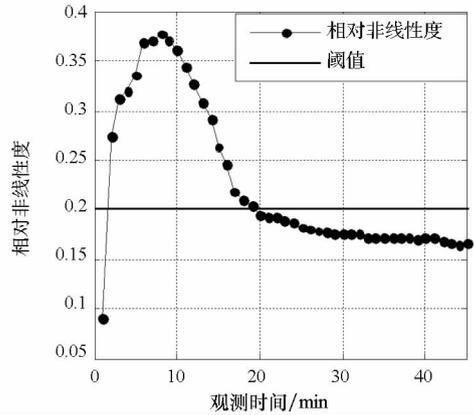


图5 相对非线性度的平均值随时间的变化

Fig. 5 Temporal evolution of the averaged relative nonlinearity measure

4 结论

针对非线性的高轨双星辐射源跟踪问题,提出基于高斯和框架与5阶容积Kalman滤波器的GS-5CKF滤波算法。针对5CKF,提出了新的非线性测度,并引入了滤波器分裂和合并操作,以提升GS-5CKF算法的性能并保持算法的计算复杂度不变。GS-5CKF算法的初始化通过计算由跟踪起始时刻的辐射源信号时差观测量近似确定的正圆锥面与地球表面相交而成的时差线实现。仿真表明,对于高轨双星辐射源跟踪问题,在初始化误差较大时,单个非线性滤波器(如单个5CKF)难以获得较好的跟踪性能,而GS-5CKF的估计精度随着观测量的累积迅速提高。相对于文献中已有的基于高斯和框架与3阶容积Kalman滤波器的GS-3CKF算法,GS-5CKF有着更高的估计精度,其估计性能更接近CRLB。

参考文献 (References)

- [1] Ho K C, Chan Y T. Geolocation of a known altitude object from TDOA and FDOA measurements [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(3): 770-783.
- [2] Musicki D, Kaune R, Koch W. Mobileemitter geolocation and tracking using TDOA and FDOA measurements [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(3): 1863-1874.
- [3] Musicki D, Koch W. Geolocation using TDOA and FDOA measurements [C]//Proceedings of 11th International Conference on Information Fusion (FUSION), 2008: 1-8.
- [4] Deng B, Xiong J Y, Xia C X. The observability analysis of aerial moving target location based on dual-satellite geolocation

- system [C] //Proceedings of International Conference on Computer Science and Information Processing (CISP), 2012; 12 - 15.
- [5] Jazwinski A H. Stochastic processing and filtering theory [M]. New York: Academic Press, 1970.
- [6] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J] //Proceedings of the IEEE, 2004, 92 (3): 401 - 422.
- [7] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54 (6): 1254 - 1269.
- [8] Sarkka S. Bayesian filtering and smoothing [M]. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [9] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filter for on-line non-linear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50 (2): 174 - 188.
- [10] Wang S, Feng J, Tse C K. Spherical simplex-radial cubature Kalman filter [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21 (1): 43 - 46.
- [11] Leong P H, Arulampalam S, Lamahewa T A, et al. A Gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49 (2): 1161 - 1176.
- [12] Crouse D F, Willett P, Pattipati K, et al. A look at Gaussian mixture reduction algorithms [C] //Proceedings of 14th International Conference on Information Fusion (FUSION), 2011; 1 - 8.
- [13] Faubel F, Klakow D. Further improvement of the adaptive level of detail transform: splitting in direction of the nonlinearity [C] //Proceedings of 18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2010; 850 - 854.
- [14] Faubel F, Klakow D. An adaptive level of detail approach to nonlinear estimation [C] //Proceedings of International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010; 3958 - 3961.
- [15] Daun M, Kaune R. Gaussian mixture initialization in passive tracking applications [C] //Proceedings of 13th International Conference on Information Fusion (FUSION), 2010; 1 - 8.
- [16] Drake S R, Dogancay K. Geolocation by time difference of arrival using hyperbolic asymptotes [C] //Proceedings of International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2004, 2: 361 - 364.
- [17] Dogancay K. Emitter localization using clustering-based bearing association [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41 (2): 525 - 536.
- [18] Lee D J. Nonlinear Bayesian filtering with applications to estimation and navigation [D] Thesis: Texas A & M University, 2005.