

Gauss 伪谱法的再入可达域计算方法*

王涛¹, 张洪波¹, 李永远², 汤国建¹

(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 中国运载火箭技术研究院 研发中心, 北京 100076)

摘要:为了加快优化速度和提高优化质量,提出一种基于 Gauss 伪谱法的再入可达域计算方法。鉴于再入时一般采用固定的攻角剖面,将攻角作为状态变量,仅对倾侧角进行单变量寻优。优化过程中,再入纵程被视为终端约束,以获取不同纵程下的最大横程,将速度倾角视为过程约束,以消除弹道的跳跃现象。通过仿真,求解出了通用航空飞行器的再入可达域,结果与间接法的理论证明一致。

关键词:再入;可达域;Gauss 伪谱法;攻角剖面;横程

中图分类号:V448.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2016)03-075-06

Landing footprint generation of entry vehicle based on Gauss pseudospectral method

WANG Tao¹, ZHANG Hongbo¹, LI Yongyuan², TANG Guojian¹

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Research & Development Center, China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: To reduce calculation time and improve optimization result, a Gauss pseudospectral method was proposed. For the attack angle was regarded as a state variable and only bank angle was optimized, which was reasonable since attack angle profile was often pre-designed in engineering. Down-range of vehicle was regarded as event constraint to obtain the maximum cross-range, while the flight path angle was regarded as path constraint to eliminate skips on the trajectory. Through simulation, the footprint of CAV (common aero vehicle) is generated, which is in accordance with the theoretical analysis of the indirect optimization method.

Key words: entry; footprint; Gauss pseudospectral method; attack angle profile; cross-range

飞行器再入可达域是飞行器在满足约束条件下再入落点的集合^[1]。研究再入可达域对再入任务规划及应急迫降着陆点选择具有重要意义。计算可达域的关键是确定落点区域的边界,可将其描述为一个最优控制问题。根据优化方法的不同,前人的研究可以分为两类,即直接优化方法和间接优化方法。

Ngo^[2]以最大横程为优化指标,利用间接法求解倾侧角的表达式,由于计算复杂,仿真中采用近似的倾侧角表达式。Lu^[11]假设可达域的周围存在一系列虚拟目标点,通过使飞行器落点尽可能接近虚拟目标点,从而得到可达域的轮廓。算法基于拟平衡滑翔条件(Quasi-Equilibrium Glide Condition, QEGC),利用最优控制原理巧妙地将可达域计算问题转化为单个参数求解问题。Li^[3], Zhang^[4]等对此方法展开进一步研究,提出了更实

用的虚拟目标选取方法。然而,采用间接法计算可达域时一般基于 QEGC,实际飞行中不一定满足此条件。

Saraf^[5]基于航天飞机的制导模式提出了一种解析的可达域计算方法,通过规划阻力剖面,得到近似的可达域。Chang^[6]对该方法进行了改进,对末端倾侧角进行了修正,从而使可达域的计算更加精确。虽然该方法计算效率较高,但无法证明可达域的最优性。

文献[7-9]利用直接法求解可达域。其中 Fahroo^[7-8]利用拉格朗日伪谱法求解再入可达域,由于约束条件处理不当,得到的轨迹并不光滑,可跟踪性较差。文献[10]和文献[11]分别针对超低再入情况和沿赤道再入情况进行研究,采用伪谱法优化可达域,然而,这两种情况下地球自转的影响较小,不具有一般性。

* 收稿日期:2015-03-13

基金项目:航天科技创新基金资助项目(CASC201306)

作者简介:王涛(1989—),男,河南开封人,博士研究生,E-mail:wangtao_smile@126.com;

汤国建(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:tanguojian@nudt.edu.cn

近年来,伪谱法在轨迹优化领域得到了广泛的应用^[12]。Gauss 伪谱法作为伪谱法的一种,在处理约束方面有明显优势。

1 问题描述

1.1 一般再入问题

1.1.1 动力学方程

假设地球为旋转圆球,描述飞行器运动状态的变量包括地心距 r 、经度 λ 、地心纬度 ϕ 、速度大小 V 、当地速度倾角 θ 和航迹偏航角 ψ 。以时间 t 为自变量的高超声速滑翔飞行器运动方程为:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = V\sin\theta \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{V\cos\theta\sin\psi}{r\cos\phi} \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{V\cos\theta\cos\psi}{r} \\ \frac{dV}{dt} = -D - g\sin\theta + \tilde{C}_V \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{L\cos\sigma}{V} - \frac{g\cos\theta}{V} + \frac{V\cos\theta}{r} + C_\theta + \tilde{C}_\theta \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{L\sin\sigma}{V\cos\theta} + \frac{V\tan\phi\cos\theta\sin\psi}{r} + C_\sigma + \tilde{C}_\sigma \end{cases} \quad (1)$$

式中: σ 为倾侧角; g 为地球引力加速度;而 L, D 分别为升力和阻力加速度大小。则有:

$$\begin{cases} L = 0.5\rho V^2 S_r C_L / M \\ D = 0.5\rho V^2 S_r C_D / M \end{cases} \quad (2)$$

其中: ω_e 为地球旋转角速度; M 为飞行器质量; S_r 为参考面积; C_L, C_D 分别为升力系数和阻力系数; ρ 为大气密度。地球旋转对应的哥氏加速度项 C_θ, C_ψ 以及牵连加速度项 $\tilde{C}_\theta, \tilde{C}_\psi, \tilde{C}_V$ 可分别表示为:

$$\begin{cases} C_\psi = 2\omega_e(\sin\phi - \cos\psi\tan\theta\cos\phi) \\ \tilde{C}_\psi = \frac{\omega_e^2 r \cos\phi \sin\phi \sin\psi}{V\cos\theta} \\ C_\theta = 2\omega_e \sin\psi \cos\phi \\ \tilde{C}_\theta = \frac{\omega_e^2 r}{V} \cos\phi (\sin\phi \cos\psi \sin\theta + \cos\phi \cos\theta) \\ \tilde{C}_V = \omega_e^2 r (\cos^2\phi \sin\theta - \cos\phi \sin\phi \cos\psi \cos\theta) \end{cases} \quad (3)$$

1.1.2 约束条件

飞行器允许的最大驻点热流密度 \dot{Q}_{\max} 、最大动压 q_{\max} 和最大总过载 n_{\max} 分别为:

$$\begin{cases} \dot{Q} = k\rho^{0.5} V^{3.15} \leq \dot{Q}_{\max} \\ q = 0.5\rho V^2 \leq q_{\max} \\ n = \sqrt{L^2 + D^2} / g_0 \leq n_{\max} \end{cases} \quad (4)$$

其中: k 为常数,与飞行器相关; g_0 为海平面引力系数。

对于一般再入过程,控制量通常取攻角和倾侧角,其约束为:

$$\begin{cases} \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \\ \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}] \end{cases} \quad (5)$$

为了满足能量管理段(Terminal Area Energy Management, TAEM)的需要,应对再入终端进行一定的约束。考虑到本文着重研究再入可达域,对终端位置不作要求,终端只需满足:

$$E_f = \mu/r_f - V_f^2/2 = E_{\text{TEAM}} \quad (6)$$

式中, μ 为地球引力场数。

1.2 P 坐标系

如图 1 所示, O_E 和 I 分别为地心和飞行器质心位置。根据再入起点及方位角确定一个再入大圆弧平面,作为新的“赤道”平面,并定义一个地心坐标系 $O_E - X_p Y_p Z_p$: X_p 轴沿飞行起始点地心矢径方向; Y_p 轴在再入大圆弧平面内垂直于 X_p 轴指向目标方向; Z_p 轴与 X_p, Y_p 轴构成右手系,指向新的极点 P ,其经纬度为 (λ_p, ϕ_p) 。在 P 坐标系中,起始点的经度为零,经度和纬度描述了再入纵程和再入横程。利用这些特性,可极大地简化弹道规划算法。

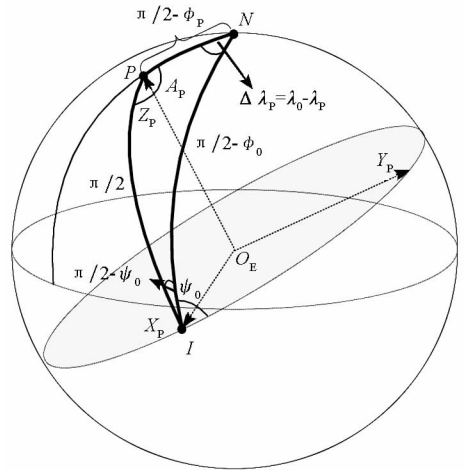


图 1 P 坐标系示意图

Fig. 1 P coordinate system

图 1 中, N 为北极点,飞行器滑翔起始点 I 的坐标为 (λ_0, ϕ_0) ,方位角为 ψ_0 。因此一般坐标系与 P 坐标系的转换关系为^[13]:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\phi_0 \cos\lambda_0 & \cos\phi_0 \sin\lambda_0 & \sin\phi_0 \\ -\sin\psi_0 \sin\lambda_0 - \cos\psi_0 \sin\phi_0 \cos\lambda_0 & \sin\psi_0 \cos\lambda_0 - \cos\psi_0 \sin\phi_0 \sin\lambda_0 & \cos\psi_0 \cos\phi_0 \\ \cos\psi_0 \sin\lambda_0 - \sin\psi_0 \sin\phi_0 \cos\lambda_0 & -\cos\psi_0 \cos\lambda_0 - \sin\psi_0 \sin\phi_0 \sin\lambda_0 & \sin\psi_0 \cos\phi_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

此外,在 P 坐标系中,哥氏加速度和牵连加速度也有相应的变化,具体见文献[13]。

1.3 可达域问题

1.3.1 优化指标

再入可达域问题可描述为求解不同纵程条件下的最大横程。在 P 坐标系内,落点的横程可用纬度表征:

$$J = \min \{ \cos(\phi_{pf}) \} \quad (8)$$

式中: ϕ_{pf} 为 P 坐标系中落点的纬度,如图2所示。

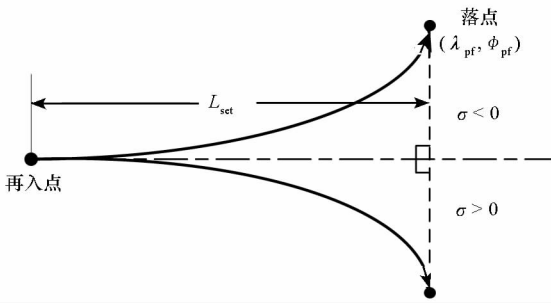


图2 固定纵程条件下的最大横程

Fig.2 Maximum cross-range trajectories with fixed down-range

图2中, L_{set} 为设定的纵程,可以把 L_{set} 视为终端约束,通过改变 L_{set} 的值来得到不同纵程条件下的最大横程弹道。 λ_{pf} 为落点在 P 坐标系中的经度。为了提高计算效率,计算零纬度以上的最大横程时,可以把 σ 的寻优范围缩小至 $[-90, 0]$; 针对零纬度以下的最大横程,可以把 σ 的寻优范围缩小至 $[0, 90]$ 。

1.3.2 攻角剖面的处理

已知标称攻角剖面为能量的线性分段函数。

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{max} & E \geq E_1 \\ \frac{\alpha_{max/LD} - \alpha_{max}}{E_2 - E_1} (E - E_1) + \alpha_{max} & E_2 \leq E < E_1 \\ \alpha_{max/LD} & E < E_2 \end{cases} \quad (9)$$

其中,最大飞行攻角 $\alpha_{max} = 20^\circ$,最大升阻比对应攻角 $\alpha_{max/LD} = 10^\circ$, E_1 和 E_2 为攻角曲线分段节点处的能量,可根据飞行器防热及航程需求来确定。攻角剖面的一阶微分为:

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} 0 & E \geq E_1 \text{ 或 } E < E_2 \\ \frac{\alpha_{max/LD} - \alpha_{max}}{E_2 - E_1} & E_2 \leq E < E_1 \end{cases} \quad (10)$$

优化过程中,把攻角当作状态变量来处理,这

样优化变量就只剩下倾侧角,从而大大提高了寻优的效率。式(10)与动力学方程组(1)构成一组新的状态方程,状态变量 α 的初始值为 α_{max} 。

1.3.3 速度倾角的处理

飞行器再入过程中,不希望出现跳跃现象。然而在使用 Gauss 伪谱法寻优时,再入轨迹往往出现多次跃起现象,为了消除这种现象,对速度倾角进行以下限制:

$$\theta \leq 0 \quad (11)$$

式(11)与方程组(4)构成了新的约束方程组。

2 Gauss 伪谱法

Gauss 伪谱法以 Legendre 多项式的根为离散点,将状态变量和控制变量同时离散化,从而将弹道优化的最优控制问题转换为非线性规划问题进行求解。采用 Gauss 伪谱法求得的非线性规划问题的解,是间接法一阶最优性的必要条件。

设最优控制问题的时间区间为 $[t_0, t_f]$,采用 Gauss 伪谱法则需将时间区间转换到 $[-1, 1]$, 因此对时间变量 t 作变换:

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (12)$$

Gauss 伪谱法的离散点为 N 阶 Legendre 多项式的根,Legendre 多项式为:

$$P(\tau) = \frac{1}{2^N N! d\tau^N} [(\tau^2 - 1)^N] \quad (13)$$

Legendre-Gauss 点分布在区间 $(-1, 1)$, 增加 $\tau_0 = -1$, 得到区间 $[-1, 1)$, 共 $N + 1$ 个插值点。以 Lagrange 插值多项式为基函数描述状态变量和控制变量:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) \mathbf{x}(\tau_i) \\ \mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^N L_i(\tau) \mathbf{u}(\tau_i) \end{cases} \quad (14)$$

其中,

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}$$

状态变量的一阶微分可通过对式(14)求导来近似,将动力学微分方程约束转换为代数约束。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\tau_n) &\approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_n) = \sum_{i=0}^N \dot{L}_i(\tau_n) \mathbf{x}(\tau_i) \\ &= \sum_{i=0}^N D_{ni}(\tau_n) \mathbf{x}(\tau_i) \end{aligned} \quad (15)$$

所以动力学方程满足:

$$\sum_{i=0}^N D_{ni}(\tau_n)\mathbf{x}(\tau_i) = \frac{t_f - t_0}{2} F[\mathbf{X}(\tau_n), \mathbf{U}(\tau_n), \tau_n; t_0, t_f] \quad (16)$$

式中, $n = 1, \dots, N$ 。

终端状态 \mathbf{X}_f 可通过拉格朗日积分得到:

$$\mathbf{X}(\tau_f) = \mathbf{X}(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum w_n F[\mathbf{X}(\tau_n), \mathbf{U}(\tau_n), \tau_n; t_0, t_f] \quad (17)$$

其中, $w_n = \int_{-1}^1 L_i(\bar{\tau}) d\bar{\tau}$ 为 Gauss 权重。

Gauss 伪谱法中的性能指标函数为:

$$J = \Phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{n=1}^N w_n G(\mathbf{X}_n, \mathbf{U}_n, \tau_n; t_0, t_f) \quad (18)$$

将连续系统离散化后, 最优控制问题转化为非线性规划问题, 利用序列二次规划算法进行寻优, 可得到需要的再入轨迹。

3 仿真分析

基于通用航空飞行器(Common Aero Vehicle, CAV)模型对可达域算法进行验证。飞行器的初始质量为 907 kg, 参考面积为 0.48 m²。飞行器的热流、过载、动压约束分别为: $\dot{Q}_{\max} = 1700 \text{ kW/m}^2$, $q_{\max} = 100 \text{ kPa}$, $n_{\max} = 3 g$ 。参照 CAV 的飞行条件, 再入初始状态见表 1, 终端的速度和高度分别为 1000 m/s 和 30 km。仿真中, Gauss 伪谱法的初始弹道采用常值倾侧角弹道。

表 1 再入初始条件

Tab. 1 Initial states of the entry vehicle

h_0/km	$\lambda_0/(\text{°})$	$\phi_0/(\text{°})$	$V_0/(\text{m/s})$	$\theta_0/(\text{°})$	$\psi_0/(\text{°})$
80	0	-10	6500	-1	45

3.1 求解最大横程

在固定攻角剖面的条件下, 以最大横程为优化指标, 不对再入纵程进行约束, 采用 Gauss 伪谱法进行寻优, 得到最大横程的弹道, 如图 3、图 4 所示。优化过程中, 由于对倾侧角进行了限制, $\sigma \in [-90, 0]$, 所以只得到单侧向最大横程的弹道。从图 4 中可以看出, 攻角作为状态变量, 严格符合式(9)。由于倾侧角是唯一的优化变量, 仅需要十几秒就找到了良好的优化结果。

3.2 求解可达域

在固定攻角剖面的情况下, 计算飞行器再入

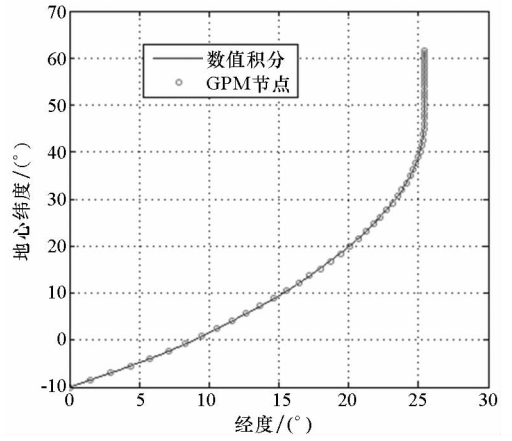


图 3 最大横程弹道的地面轨迹

Fig. 3 Ground trajectory of the maximum cross-range

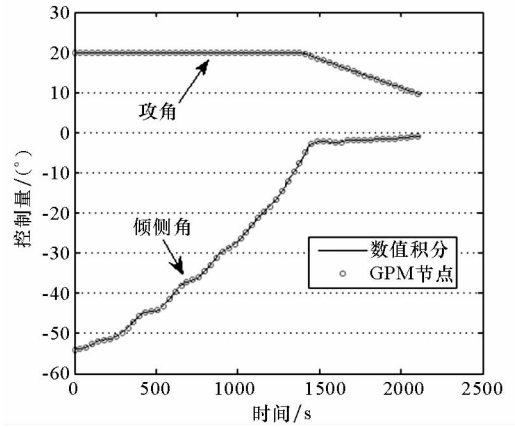


图 4 最大横程弹道的控制量

Fig. 4 Control variables of the maximum cross-range

可达域, 如图 5~8 所示。图 5 给出了不同纵程条件下的最大横程弹道簇, 弹道簇的落点所围成的区域便是再入可达域, 由于优化过程中没有考虑 QEGC, 各弹道均存在跳跃现象。图 6 给出了弹道簇的地面轨迹, 虚线为可达域的边界, 由于地球自转的影响, 可达域呈现非对称的形状。图 7 给出了弹道簇的最优倾侧角变化规律: 随着时间的变

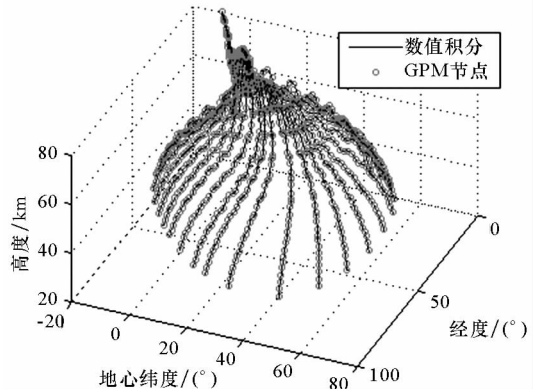


图 5 可达域弹道簇

Fig. 5 Trajectory cluster

化,倾侧角最终趋向于零,这与文献[1]的结果一致,文献[1]中已给出了证明。图8给出了弹道簇的热流变化,所有弹道的热流都被限制在允许的范围,图7中指出了热流约束对倾侧角的影响。

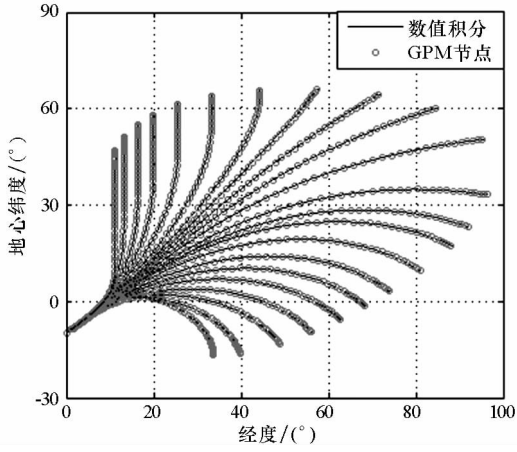


图6 可达域弹道簇的地面轨迹
Fig.6 Ground trajectory cluster

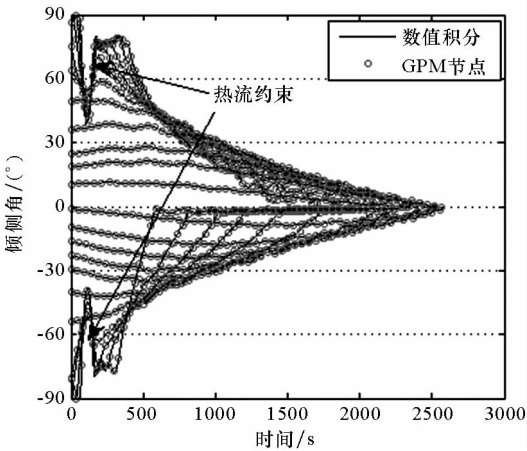


图7 可达域弹道簇的倾侧角
Fig.7 Bank angle of trajectory cluster

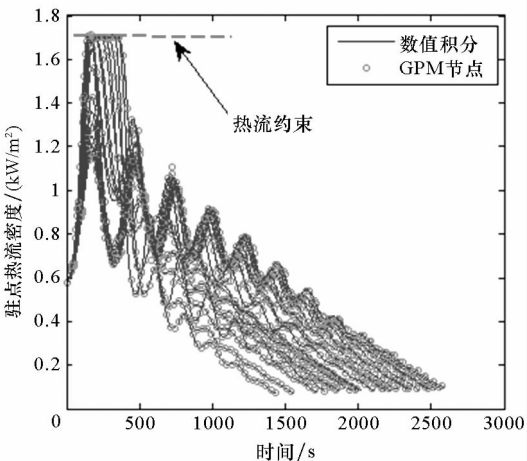


图8 可达域弹道簇的热流
Fig.8 Heat flux of trajectory cluster

3.3 防止弹道跳跃的可达域

限制再入速度倾角小于零,重新计算可达域,得到图9~12。图9给出了弹道簇(without $\theta < 0$)和弹道簇(with $\theta < 0$)的高度变化曲线,通过比较可知,对速度倾角约束之后,成功消除了跳跃现象

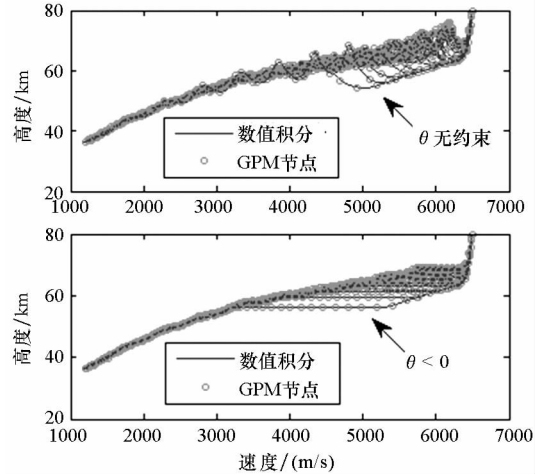


图9 可达域弹道簇的高度变化(without $\theta < 0$)
Fig.9 Altitude variation of trajectory cluster (without $\theta < 0$)

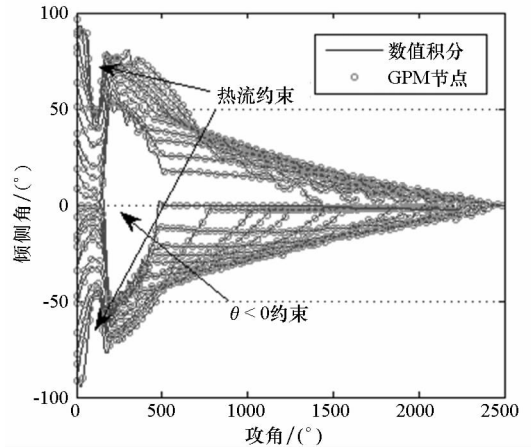


图10 可达域弹道簇的倾侧角(with $\theta < 0$)
Fig.10 Bank angle curve cluster (with $\theta < 0$)

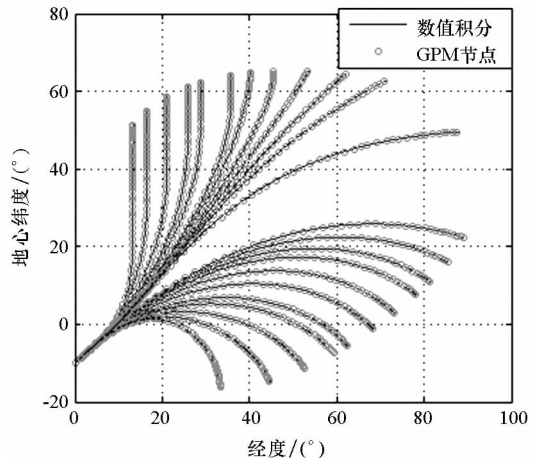


图11 可达域弹道簇的地面轨迹(with $\theta < 0$)
Fig.11 Ground trajectory cluster (with $\theta < 0$)

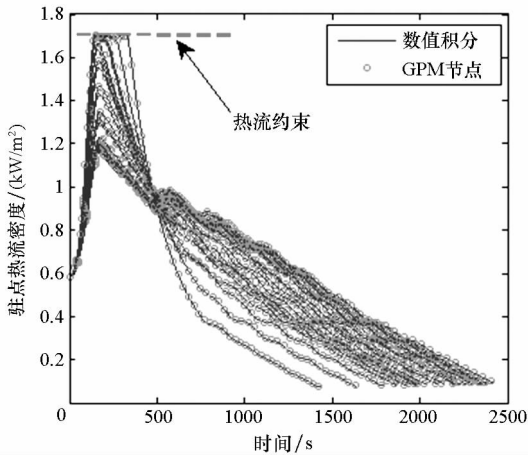


图 12 可达域弹道簇的热流 (with $\theta < 0$)

Fig. 12 Heat flux of trajectory cluster (with $\theta < 0$)

象。图 10 给出了弹道簇 (with $\theta < 0$) 的倾侧角, 当飞行器进入平衡滑翔段后, 为了防止跳跃, 倾侧角需适当增大, 从而导致图中的空白区域。图 11 给出了弹道簇的地轨迹, 与图 6 相比, 弹道的最大纵程明显缩短。图 12 给出了热流的变化, 热流被限制在允许的范围內。

图 13 给出了两种情况下的可达域。通过比较可知, 在对速度倾角进行限制后, 可达域明显缩小。

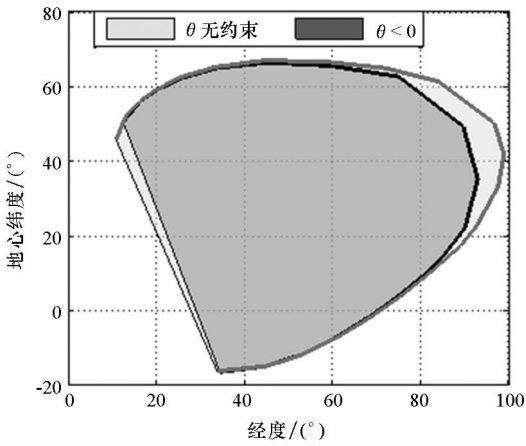


图 13 可达域的比较

Fig. 13 Comparison of entry footprints

4 结论

采用 Gauss 伪谱法求解固定攻角剖面的再入可达域。求解过程中, 攻角被视为状态变量, 再入纵程被视为终端约束, 速度倾角被视为过程约束。经过这些处理之后, 以再入横程为优化指标, 对倾侧角进行单变量寻优, 得到了固定攻角剖面下的可达域。仿真结果与文献[1]中间接方法的结论一致, 即弹道的倾侧角趋向于零。与文献[1]中

所提方法相比, 不需要大量的推导计算, 除了 Gauss 伪谱法的离散误差外, 没有对动力学模型进行任何近似。

参考文献 (References)

- [1] Lu P, Xue S B. Rapid generation of accurate entry landing footprints[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(3): 756-765.
- [2] Ngo A D, Doman B D. Footprint determination for reusable launch vehicles experiencing control effector failures [C]// Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, California, 2002.
- [3] Li H F, Zhang R, Li Z Y, et al. Footprint problem with angle of attack optimization for high lifting reentry vehicle[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2012, 25(2): 243-251.
- [4] Zhang R, Li Z Y, Shi L N. A general footprint generation approach for lifting reentry vehicle [C]// Proceedings of 28th International Congress of the Aeronautical Sciences, 2012.
- [5] Saraf A, Leavitt J A, Mease K D. Landing footprint computation for entry vehicles [C]// Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Rhode Island, 2004.
- [6] 常松涛, 杨业, 王永骥, 等. 计算再入飞行器可达区域的快速算法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2012, 40(7): 1-5.
CHANG Songtao, YANG Ye, WANG Yongji, et al. A rapid algorithm for generating landing footprint for entry vehicles [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science, 2012, 40(7): 1-5. (in Chinese)
- [7] Fahroo F, Doman B D, Ngo A D. Footprint generation for reusable launch vehicles using a direct pseudospectral method [C]// Proceedings of the American Control Conference, 2003: 2163-2168.
- [8] Fahroo F, Doman B D. A direct method for approach and landing trajectory reshaping with failure effect estimation [C]// Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, 2004.
- [9] Bollino K, Ross I M, Doman D B. Six degrees of freedom trajectory optimization for reusable launch vehicle footprint determination [C]// Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Springfield, 2007.
- [10] 解永锋, 唐硕. 亚轨道飞行器再入可达域快速计算方法[J]. 飞行力学, 2011, 29(4): 72-75.
XIE Yongfeng, TANG Shuo. Rapid calculation of entry footprint of suborbital launch vehicle [J]. Flight Dynamics, 2011, 29(4): 72-75. (in Chinese)
- [11] 李柯, 聂万胜, 冯必鸣. 助推-滑翔飞行器可达区域影响因素研究[J]. 现代防御技术. 2013, 41(3): 42-47.
LI Ke, NIE Wansheng, FENG Biming. Affecting factor of footprint for boost-glide vehicle [J]. Modern Defence Technology, 2013, 41(3): 42-47. (in Chinese)
- [12] Huntington G T, Rao A V. Optimal configuration of spacecraft formation via a Gauss pseudospectral method [C]// Proceedings of AAS Spaceflight Mechanics Meeting, 2005.
- [13] XIE Yu, Liu L H, Liu J, et al. Rapid generation of entry trajectories with waypoint and no-fly zone constraints [J]. Acta Astronautica, 2012, 77(4): 167-181.