

## WENO 格式权重分析与改进\*

柴得林,李雨润,孙中国,席光

(西安交通大学 能源与动力工程学院, 陕西 西安 710049)

**摘要:**为了优化 WENO 格式计算性能,在对 Jiang 和 Shu 的经典 WENO 格式(记为 WENO-JS)加权方法分析的基础上,通过引入间接光滑指数,构造出一种新的 WENO 格式——WENO-E 格式,取得减小间断区耗散的效果。理论分析表明,该格式与 WENO-JS 格式计算效率基本相同,可达到相同阶的计算精度;但在相同网格下,较之 WENO-JS 格式,该格式对光滑区域的求解有更小的截断误差,对间断的捕捉有更高的分辨率。与 WENO-JS 格式相比,采用 WENO-E 格式进行线性迁移方程、非线性 Burgers 方程、欧拉方程等相关问题的数值实验,均能取得更好的数值结果。

**关键词:**加权本质无震荡格式;光滑因子;高精度;高分辨率

**中图分类号:**V211.1; O241 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2016)04-039-07

## Analysis and improvement of weights in WENO schemes

CHAI Delin, LI Yurun, SUN Zhongguo, XI Guang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** In order to improve the computational performance of the WENO scheme, a new WENO scheme, namely WENO-E scheme was constructed, which reduces dissipation close to discontinuities. Based on the analysis of the algorithm for weighted factors in the classical WENO scheme (namely WENO-JS) proposed by Jiang and Shu, the new scheme was constructed by introducing indirect smooth indicator. Theoretical analysis shows that the WENO-E scheme can reach the same convergence order of WENO-JS with the same computational efficiency; while it can obtain smaller truncation errors at smooth parts of the solution and higher resolution close to the discontinuities with the same grids than the WENO-JS. Subsequently, compared with the classical WENO scheme, when numerical experiments with the linear transport equation, the nonlinear Burgers equation and the one dimensional Euler system of equations are conducted, the WENO-E scheme achieves better numerical solutions.

**Key words:** weighted essentially non-oscillatory schemes; smoothness indicator; high precision; high resolution

合理、高效、精确地模拟非定常、含间断、多尺度复杂流场是计算流体动力学研究领域的一大难题。高精度格式对网格规模要求低,对复杂流动分辨率高,计算精度高,适合计算包含各类间断和多种复杂流动光滑结构以及二者相互作用的流场。而加权本质无震荡格式(Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes, WENO)正是研究热点之一。作为一种性能优越的激波捕捉格式,经过二十余年的发展,WENO 格式以及各种基于 WENO 格式思想的改进格式已经被广泛应用于计算流体的各个领域,得到了学者们的认可和关注。

WENO 格式是由 Liu, Osher<sup>[1]</sup>等在本质无震荡格式(Essentially Non-Oscillatory schemes, ENO)构造思想基础上于 1994 年提出的。而后, Jiang 和 Shu 于 1996 年对 WENO 格式作了进一步的改

进,给出了构造任意阶有限差分 WENO 格式的一般公式(WENO-JS),并可以有效地推广到多维空间问题<sup>[2]</sup>。但是,WENO 格式在极值点处精度会降低,例如 5 阶精度 WENO 格式在一阶极值点处会降为 3 阶。因而,对 WENO 格式的分析改进研究仍备受关注,在这一方面也已经有了大量的研究成果。其中,代表性的有 WENO-M, WENO-Z 格式等。在对 WENO-Z 格式的构造中,Borges 等指出适当增大 WENO 格式在间断附近含间断模板函数对应的非线性权重,可以减小耗散,增加该格式在极值点处的精度,提高其对间断的分辨率<sup>[3]</sup>。

在 Jiang 和 Shu 的经典 WENO 格式基础上,本文在构造非线性权时引入间接光滑指数,增大间断模板函数对应的非线性权重,提出一种新的 WENO 格式,记为 WENO-E,并进行了相关数值验证。

\* 收稿日期:2016-01-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51236006)

作者简介:柴得林(1991—),男,山西临汾人,博士研究生,E-mail:cunzhang.chai@stu.xjtu.edu.cn;

席光(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:xiguang@mail.xjtu.edu.cn

## 1 WENO 格式分析

ENO 格式通过选取多个备选模板,分别构造拟合函数,然后采用一个最光滑的插值模板对网格界面处数值通量进行逼近,具体的 ENO 格式处理方法参见文献[4-5]。

而 WENO 格式的基本思想是对每一个备选模板函数的网格界面数值通量逼近值取一定的权重,作加权平均,即得所求通量。

### 1.1 WENO 格式基本原理

考虑一维双曲守恒律方程:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

进行如下均匀网格划分:

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N+1/2} = b$$

给定单元  $\{x_i\}$ , 单元尺度、单元、单元中心分别为  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ,  $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$ 。

方程(1)半离散型守恒差分形式为:

$$u_t = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}) \quad (2)$$

$$\hat{f}_{i+1/2} = \hat{f}_{i+1/2}^+ + \hat{f}_{i+1/2}^-$$

在求解逼近数值通量  $\hat{f}_{i+1/2}^\pm$  过程中,选取多个备选模板,记为  $k$  个,可以构造出  $k$  个逼近值  $\hat{f}_m^\pm(x_{i+1/2})$ ,选取一定的权重  $\omega_m^\pm$  对其进行加权平均,可得逼近值为  $\hat{f}_{i+1/2}^\pm = \sum_{m=0}^{k-1} \omega_m^\pm \hat{f}_m^\pm(x_{i+1/2})$ 。为方便记,以下分析省去上标  $\pm$ 。

### 1.2 经典 WENO(WENO-JS) 格式加权方法

经典 WENO 格式引入表征插值模板对应的插值函数光滑程度的参数——光滑因子<sup>[2]</sup>:

$$\beta_m = \sum_{l=1}^k \Delta x^{2l-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{d^l}{dx^l} \hat{f}_m(x) \right)^2 dx \quad (3)$$

则非线性权  $\omega_m$  构造如下:

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{\tilde{\omega}_m}{\sum_{l=0}^{k-1} \tilde{\omega}_l} \\ \tilde{\omega}_m = \frac{d_m}{(\varepsilon + \beta_m)^2} \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $d_m$  为光滑情况下由高阶与低阶插值函数确定的线性权,亦称之为理想权重;  $\varepsilon$  为一极小量;防止分母为 0,一般取为  $10^{-8} \sim 10^{-6}$ 。

## 2 WENO 格式加权方法改进

经典 WENO 加权方法中取权重时考虑了  $\beta_m$  的二次方对相应模板函数权重的影响,在光滑处

使得非线性权  $\omega_m$  偏离理想权重  $d_m$  较大,计算截断误差偏大<sup>[6]</sup>;在间断附近使得间断模板的权重取值接近于 0,但这样产生了过大的耗散,降低了对间断和波动的捕捉性能<sup>[3,7]</sup>。因而本文采用一种新的思路对其进行了改进。下文讨论中将改进格式记为 WENO-E。

### 2.1 WENO-E 格式的加权处理

在对 WENO-Z 格式的构造中,Borges 等指出适当增大 WENO 格式在间断附近含有间断模板函数对应的非线性权重,可以减小耗散,增加该格式在极值点等处的精度。本文以此为出发点,在经典 WENO 格式计算求得光滑因子后,引入间接光滑指数  $\bar{\beta}_m$ :

$$\bar{\beta}_m = \sum_{l=0, l \neq m}^{k-1} \beta_l \quad (5)$$

式中,  $\bar{\beta}_m$  表征其他模板光滑因子的总和,可以理解为其其他模板光滑度对  $m$  模板的间接影响,构造综合光滑因子  $\beta_m^E$  及新的非线性权  $\omega_m^E$  如下:

$$\begin{cases} \beta_m^E = \frac{\varepsilon + \bar{\beta}_m}{\varepsilon + \beta_m} \\ \omega_m^E = \frac{\tilde{\omega}_m^E}{\sum_{l=0}^{k-1} \tilde{\omega}_l^E} \\ \tilde{\omega}_m^E = d_m \beta_m^E \end{cases} \quad (6)$$

这样使得新的非线性权中更多地考虑了各个模板函数光滑度的相互影响。其他计算与经典 WENO 格式相同。

值得指出的是,式(6)中  $\varepsilon$  仍为一极小量,与式(4)中意义相同。在下文相关数值计算中,如无特别说明,均取  $\varepsilon = 10^{-6}$ 。相关计算表明其取值对格式计算结果影响很小。

### 2.2 权重分析

通过上文加权方法的阐述,现对 5 阶的改进前后两种 WENO 格式中非线性权进行分析。考虑一般情况,以下分析取  $\varepsilon = 0$ ,省去其影响。

在光滑区,具体考察第一个插值模板的非线性权,有:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{d_0}{d_0 + d_1 \left( \frac{\beta_0}{\beta_1} \right)^2 + d_2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^2} \quad (7) \\ \omega_0^E &= d_0 \left[ d_0 + d_1 \left( \frac{\beta_0}{\beta_1 + \beta_2} \right) \left( \frac{\beta_0 + \beta_2}{\beta_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. d_2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_1 + \beta_2} \right) \left( \frac{\beta_0 + \beta_1}{\beta_2} \right) \right] \\ &= \frac{d_0}{d_0 + d_1 \left( \frac{\beta_0}{\beta_1} \right) \left( \frac{\beta_0 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right)} + d_2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_2} \right) \left( \frac{\beta_0 + \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

而  $d_0 = \frac{d_0}{d_0 + d_1 + d_2}$ , 可以看到式(8)、式(9)分母中  $d_m$  的系数越趋近于1, 非线性权  $\omega_0$  越趋近于理想权重  $d_0$ 。而文献[6]指出在光滑区非线性权  $\omega_m$  越趋近于理想权重  $d_m$ , 误差越小。

$$\begin{cases} 1 < \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)\left(\frac{\beta_0 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}\right) < \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2, \frac{\beta_0}{\beta_1} > 1 \\ 1 = \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)\left(\frac{\beta_0 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}\right) = \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2, \frac{\beta_0}{\beta_1} = 1 \\ 1 > \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)\left(\frac{\beta_0 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}\right) > \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2, \frac{\beta_0}{\beta_1} < 1 \end{cases} \quad (9)$$

同理, 可以对各  $\omega_m$  进行分析。所以, 在光滑区  $\omega_m^E$  较  $\omega_m$  更接近于理想权重  $d_m$ , 计算更为准确。

接下来讨论间断处二者的权重比较。假设5阶WENO格式中第一个模板包含间断, 第二、三个模板光滑, 即  $\beta_0$  远大于  $\beta_1, \beta_2$ , 则:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^E}{\omega_1^E} &= \frac{\tilde{\omega}_0^E}{\tilde{\omega}_1^E} = \frac{d_0}{d_1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right) \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_0 + \beta_2}\right) \geq \\ & \frac{d_0}{d_1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^2 = \frac{\omega_0}{\omega_1} \end{aligned} \quad (10)$$

同理, 可以对  $\omega_0^E/\omega_2^E$  进行分析, 由式(10)可得间断模板的对应权重有所增大。

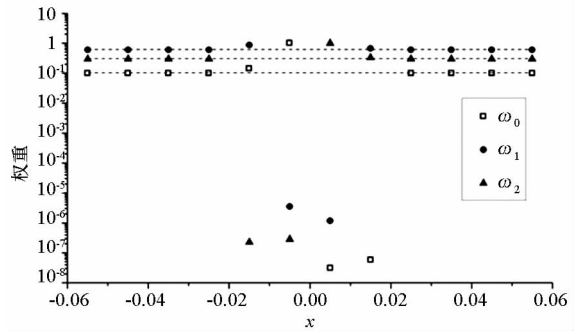
考虑如下间断问题, 数值上进行验证:

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0 \quad (11) \\ u(x, 0) &= \begin{cases} -\sin(\pi x) - 1/2x^3, & -1 < x < 0 \\ -\sin(\pi x) - 1/2x^3 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

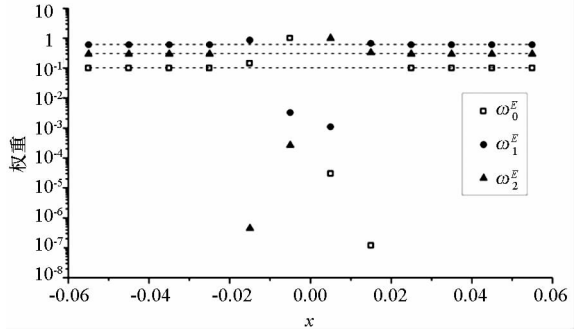
对该问题, 边界条件取周期性边界条件, 网格数取200, 第一次计算所得权重分布(局部区域)如图1所示。

图1表示非线性权在间断附近的分布情况, 纵坐标取以10为底数的对数坐标, 其中虚线代表各权重对应的理想权重, 可以看出, 在远离间断处两种格式的非线性权均与理想权重符合得很好。而在间断附近两者分布差异较大, 较之WENO-JS格式, WENO-E格式对含有间断的模板函数的权重分配都有所增大, 尤其是在间断左右两个单元处, 相应权重从  $10^{-8} \sim 10^{-6}$  增加至  $10^{-5} \sim 10^{-3}$ , 而这可以减小耗散, 增加格式在极值点等处的精度。

图2给出网格数为200,  $t=8$  时, 式(11)表示的问题在间断附近的计算结果, 图中虚线代表解析解, 实线代表WENO-JS的解。可以看出, 在对间断的捕捉上, WENO-E的计算结果更为陡峭, 结果优于WENO-JS。



(a) WENO-JS 权重  
(a) Weights of the WENO-JS



(b) WENO-E 权重  
(b) Weights of the WENO-E

图1 含间断问题间断附近权重分布  
Fig.1 Distribution of the weights  $\omega_k$  close to the discontinuity

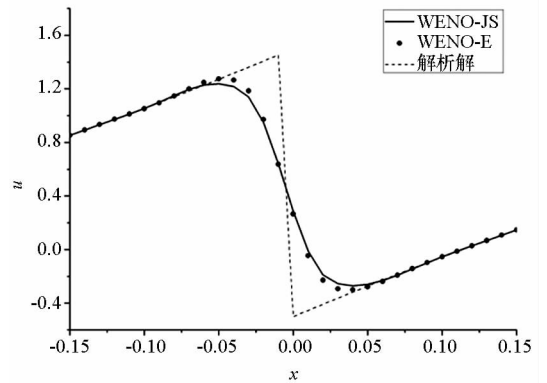


图2 线性迁移方程含有阶跃的初始间断条件数值计算结果

Fig.2 Numerical solution of the advection equation with the discontinuous initial condition containing a step

### 2.3 收敛精度分析

不考虑极值点时, 5阶WENO-JS格式中通过泰勒级数展开可得  $\beta_m = \hat{f}' \Delta x^2 [1 + o(\Delta x^2)]$ , 这保证  $\omega_m = d_m [1 + o(\Delta x^2)]$ , 使得WENO-JS具有5阶精度<sup>[5,8]</sup>。对于WENO-E则有:

$$\beta_m^E = \frac{\sum_{l=0, l \neq m}^2 \beta_l}{\beta_m} = \frac{2\hat{f}'\Delta x^2 [1 + o(\Delta x^2)]}{\hat{f}'\Delta x^2 [1 + o(\Delta x^2)]} \quad (12)$$

$$= 2[1 + o(\Delta x^2)]$$

$$\omega_m^E = \frac{d_m \beta_m^E}{\sum_{l=0}^2 d_l \beta_l^E} = \frac{d_m \cdot 2[1 + o(\Delta x^2)]}{\sum_{l=0}^2 d_l \cdot 2[1 + o(\Delta x^2)]}$$

$$= d_m \cdot [1 + o(\Delta x^2)] \quad (13)$$

由以上分析可得 WENO-E 格式也具有 5 阶精度。

### 3 数值实验

#### 3.1 线性迁移方程

对线性迁移方程  $u_t + u_x = 0$ , 分别取光滑与间断初始条件进行数值模拟, 时间离散采用 3 阶 Runge-Kutta 格式离散, 边界条件取周期性边界条件。

##### 3.1.1 光滑问题

对线性迁移方程  $u_t + u_x = 0$  取初始条件为  $u(x, 0) = \sin(\pi x) (-1 \leq x \leq 1)$  进行计算, 校验 WENO-E 格式的收敛精度。计算结果误差见表 1。由表 1 误差分析可以看出两种格式整体均可以达到 5 阶精度。值得注意的是, 在相同网格下, WENO-E 格式的计算误差低于 WENO-JS, 这是因为在光滑区  $\omega_m^E$  较  $\omega_m$  更接近于理想权重  $d_m$ 。

表 1 初始条件为  $u(x, 0) = \sin(\pi x) (-1 \leq x \leq 1)$  时线性迁移方程计算误差

Tab. 1 Errors of the linear wave equation with the initial condition  $u(x, 0) = \sin(\pi x) (-1 \leq x \leq 1)$

	网格	$L_1$ 误差	$L_1$ 精度阶	$L_\infty$ 误差	$L_\infty$ 精度阶
WENO-JS	10	1.593 7E-02	—	2.959 7E-02	—
	20	7.390 6E-04	4.43	1.455 6E-03	4.35
	40	2.220 1E-05	5.06	4.588 1E-05	4.99
	80	6.893 2E-07	5.01	1.455 5E-06	4.98
	160	2.155 0E-08	5.00	4.159 0E-08	5.13
WENO-E	10	1.300 9E-02	—	2.392 1E-02	—
	20	5.673 3E-04	4.52	1.116 2E-03	4.42
	40	1.728 7E-05	5.04	3.546 0E-05	4.98
	80	5.416 4E-07	5.00	1.132 0E-06	4.97
	160	1.695 0E-08	5.00	3.268 0E-08	5.11

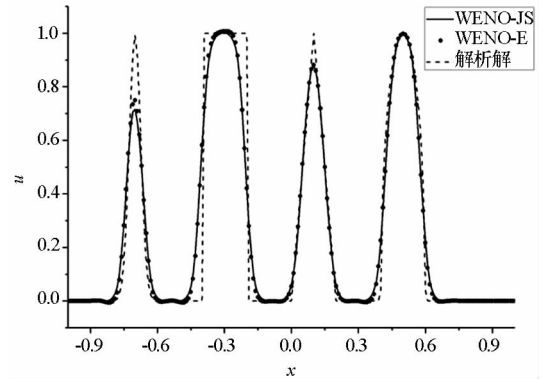
##### 3.1.2 间断问题

根据文献[2], 对  $u_t + u_x = 0$  取初始条件为如下间断问题(从左至右依次为高斯分布曲线、矩形波、三角形波、半椭圆):

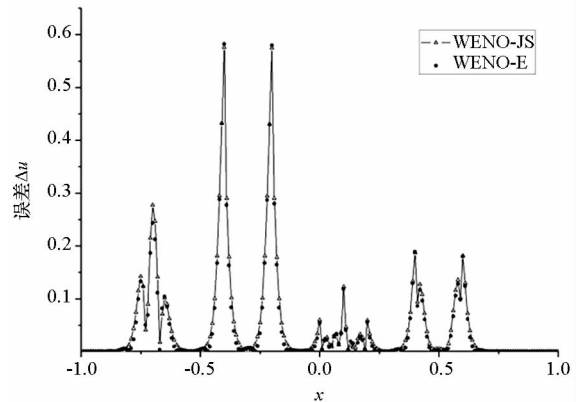
$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} G(x, \beta, z - \delta) + \\ 4G(x, \beta, z) + \\ G(x, \beta, z + \delta) \end{bmatrix} & x \in [-0.8, -0.6] \\ 1 & x \in [-0.4, -0.2] \\ 1 - |10(x - 0.1)| & x \in [0, 0.2] \\ \frac{1}{6} \begin{bmatrix} F(x, \alpha, a - \delta) + \\ 4F(x, \alpha, a) + \\ F(x, \alpha, a + \delta) \end{bmatrix} & x \in [0.4, 0.6] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2}$ ,  $F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max[1 - \alpha^2(x-a)^2, 0]}$ ,  $z = -0.7$ ,  $\delta = 0.005$ ,  $\beta = \frac{\lg 2}{36\delta^2}$ ,  $a = 0.5$ ,  $\alpha = 10$ 。

取网格数为 200, 在  $t = 8$  时, WENO-JS 格式与 WENO-E 格式计算结果如图 3(a) 所示, 图 3(a) 中虚线代表解析解, 实线代表 WENO-JS 的解。



(a) 计算结果  
(a) Numerical solution



(b) 误差  
(b) Error

图 3 线性迁移方程取含有多种波形的初始间断条件计算结果与误差

Fig. 3 Numerical solution and absolute pointwise error of the advection equation with the discontinuous initial condition consisting of various waves

从图出可以看出两种格式定性上都可以较好地捕捉间断的形状。从局部放大图图 4 中可得在间断附近 WENO-E 的计算结果更为陡峭,尤其是在对高斯曲线的捕捉上,但是在矩形波的捕捉上 WENO-E 格式会引入轻微的震荡。从误差分布图 3(b)上可以看出这一震荡影响很小,基本可以忽略不计;而在间断附近的大多数网格节点处 WENO-E 的误差小于 WENO-JS。

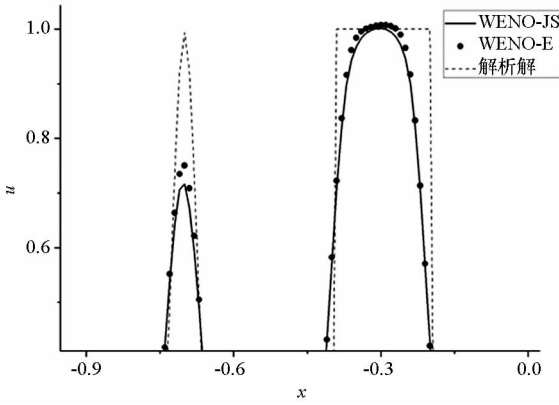


图4 图3(a)局部放大图

Fig. 4 Locally enlarged plot of Fig. 3(a)

### 3.2 一维非线性 Burgers 方程

一维非线性 Burgers 方程为:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \quad (15)$$

对方程 (15) 取初始条件  $u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$ , 取周期为 2 的边界条件, 时间离散采用 3 阶 Runge-Kutta 格式离散, 进行数值计算。

#### 3.2.1 光滑问题

时间为  $t = 0.5/\pi$  时, 计算结果仍是光滑的。表 2 给出了不同网格下两种格式的误差分析。由表 2 可以看出两种格式整体均可以达到 5 阶精度。但是, 在相同网格下, WENO-E 格式的计算误差低于 WENO-JS。

表 2 初始条件为  $u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$  时非线性 Burgers 方程计算误差

Tab. 2 Errors of the nonlinear Burgers equation with the initial condition  $u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$

网格	$L_1$ 误差	$L_1$ 精度阶	$L_\infty$ 误差	$L_\infty$ 精度阶
20	2.050 7E-03	—	1.215 9E-02	—
40	1.131 7E-04	4.18	1.040 1E-03	3.55
WENO-80	4.234 4E-06	4.74	4.728 6E-05	4.46
JS 160	1.287 0E-07	5.04	1.386 7E-06	5.09
320	3.326 5E-09	5.27	4.019 0E-08	5.11
640	9.026 5E-11	5.20	1.140 0E-09	5.14

表 2(续)

网格	$L_1$ 误差	$L_1$ 精度阶	$L_\infty$ 误差	$L_\infty$ 精度阶
20	1.680 4E-03	—	1.200 6E-02	—
40	9.492 1E-05	4.15	9.459 7E-04	3.67
WENO-80	3.696 7E-06	4.68	4.312 1E-05	4.46
-E 160	1.137 6E-07	5.02	1.271 3E-06	5.08
320	2.935 3E-09	5.28	3.713 0E-08	5.10
640	8.056 2E-11	5.19	1.060 0E-09	5.13

#### 3.2.2 间断问题

时间为  $t = 1.5/\pi$  时, 解会产生激波。图 5 给出网格数为 40 时 WENO-JS 格式与 WENO-E 格式的计算结果。

图 5 中虚线代表解析解, 实线代表 WENO-JS 的解。从图 5 中可以看出两种格式都可以较好地捕捉激波, 且都没有震荡。由局部放大图可以看出在激波附近 WENO-E 格式计算结果的点值在 WENO-JS 结果与解析解之间; 计算激波左右点值 (横坐标分别为 1.2, 1.25) 连线的斜率, WENO-E 和 WENO-JS 对应的斜率分别为 -24.3 和 -23.4, 可见 WENO-E 格式计算结果更为陡峭。

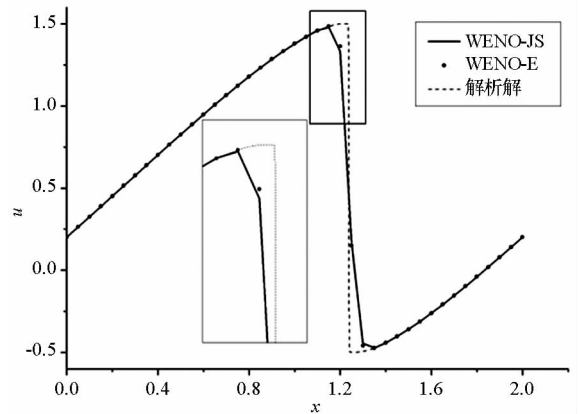


图 5 初始条件为  $u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$  时非线性 Burgers 方程计算结果

Fig. 5 Numerical solution of the nonlinear Burgers equation with the initial condition  $u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$

### 3.3 一维欧拉方程

本文对一维欧拉方程含间断的典型相关问题进行了计算, 考察 WENO-E 格式的计算性能。求解过程中使用 Lax-Friedrichs 通量分裂<sup>[5,9]</sup>, 时间离散仍采用 3 阶 Runge-Kutta 格式离散<sup>[5,10]</sup>。

欧拉方程控制方程组为:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} \\ F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

### 3.3.1 Sod 问题

初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0), & x \in [0, 1] \\ (0.125, 0.0, 0.1), & x \in (1, 2] \end{cases} \quad (17)$$

这一问题,即经典的黎曼激波管问题,表征被薄膜分开的两种状态不同的理想气体在薄膜破裂后的运动状态。取网格数为 50,分别采用两种 WENO 格式计算该问题,  $t = 0.4$  时刻所得速度分布如图 6 所示,图中虚线表示解析解,实线代表 WENO-JS 格式的解。由图 6 可得,两种格式都可以较好地捕捉间断,但从速度局部放大图中可以看到 WENO-E 格式对激波的捕捉更为陡峭,更为准确。

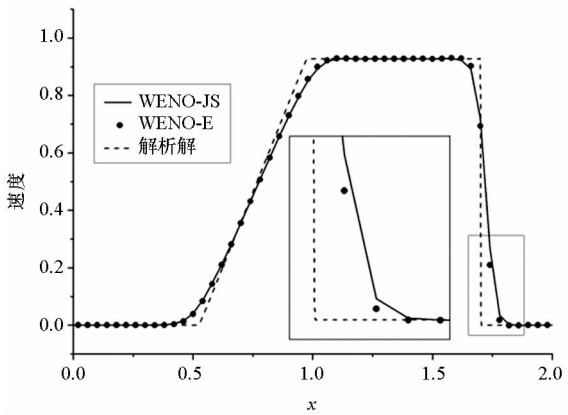


图 6 Sod 问题速度分布

Fig. 6 Distribution of the velocity of the Sod problem

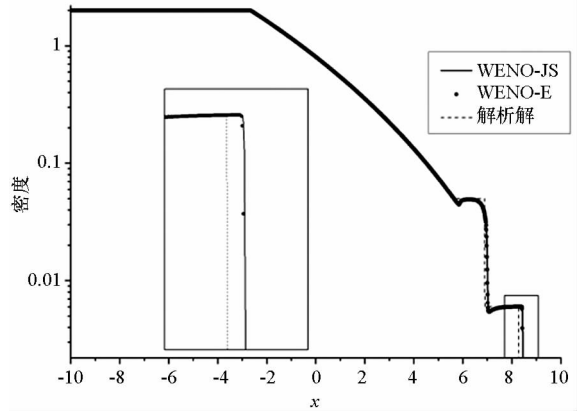
### 3.3.2 LeBlanc 激波管

初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (2.0, 0.0, 10^9), & x \in [-10, 0] \\ (0.001, 0.0, 1.0), & x \in (0, 10] \end{cases} \quad (18)$$

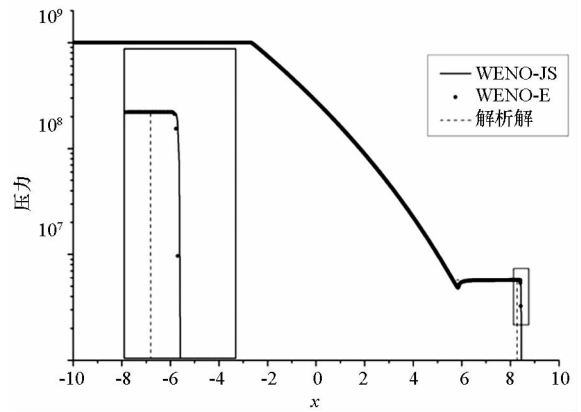
这是初始条件为式(18)的黎曼激波管问题。取网格数为 2400,分别采用两种 WENO 格式计算该问题,  $t = 0.001$  时刻所得密度与压力分布如图 7 所示,图中虚线表示解析解,实线代表 WENO-JS 格式的解。由图 7 可得,两种格式对激波位置的捕捉误差较大,但从局部放大图中可以看到

WENO-E 格式的计算结果点值在 WENO-JS 结果左侧,离解析激波位置稍近一些,对激波的捕捉有一定改善。此外,这一问题具有很强的间断性, WENO-E 格式可以取得较好的计算结果,足以证明 WENO-E 格式的稳定性。



(a) 密度

(a) Density



(b) 压力

(b) Pressure

图 7 LeBlanc 激波管问题数值结果

Fig. 7 Numerical solution of the LeBlanc shock tube problem

### 3.3.3 Shu-Osher 问题

初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.3333) & x \in [-5, -4] \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0.0, 1.0) & x \in (-4, .5] \end{cases} \quad (19)$$

该问题表征一维情况下马赫数为 3 的激波与正弦熵波的相互作用<sup>[5,11]</sup>。取网格数为 200,  $t = 1.8$  时刻所得计算结果密度分布如图 8 所示。图 8 中虚线表示基准解(基准解取网格数为 2000 时采用 WENO-JS 格式求得的数值结果)。由图 8 可得, WENO-E 格式相对于 WENO-JS 格式可分辨出

更多波动细节,对波峰波谷的捕捉更为精确,尤其是在激波后的高频波动分布区。而 WENO-JS 格式的计算结果则对波动细节抹平更为严重。

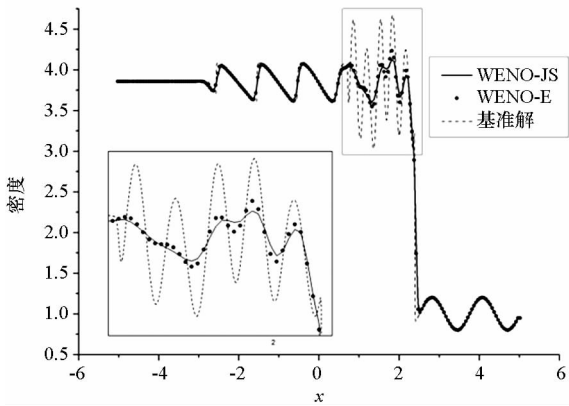


图8 Shu-Osher 问题密度分布

Fig. 8 Distribution of the density of the Shu-Osher problem

此外,还对两种格式的计算时间进行了比较。数值结果表明 WENO-E 格式计算所用时间与 WENO-JS 格式接近,计算效率基本相同。

## 4 结论

在 Jiang 和 Shu 的经典 WENO 格式的基础上,通过引入间接光滑指数,改变非线性权构造过程,构造出 WENO-E 格式。

理论分析和数值结果表明,该格式保持了与 WENO-JS 格式基本相同的计算效率,取得了与之同阶的计算精度;但在相同网格下,较 WENO-JS 格式,该格式对光滑区域的计算有更小的截断误差,计算更为准确,对间断的捕捉更为陡峭,分辨率更高。研究结果为 WENO 格式的改进提出一种新的思路,即引入间接光滑指数,考虑了各个模板函数光滑度的相互影响,对非线性权优化构造具有一定的指导意义。

## 参考文献 (References)

- [1] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200 - 212.
- [2] Shan G J, Wang C S. Efficient implementation of weighted ENO schemes [R]. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, 1995.
- [3] Borges R, Carmona M, Costa B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(6): 3191 - 3211.
- [4] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439 - 471.
- [5] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II [J]. Journal of Computational Physics, 1989, 83(1): 32 - 78.
- [6] Shen Y, Zha G. Improvement of the WENO scheme smoothness estimator[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010, 64(6): 653 - 675.
- [7] Arshed G M, Hoffmann K A. Minimizing errors from linear and nonlinear weights of WENO scheme for broadband applications with shock waves[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 246(8): 58 - 77.
- [8] Roe P L. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1981, 43(2): 357 - 372.
- [9] Henrick A K, Aslam T D, Powers J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes; achieving optimal order near critical points [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207(2): 542 - 567.
- [10] Castro M, Costa B, Don W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(5): 1766 - 1792.
- [11] 侯中喜, 易仕和, 李桦. 高精度高分辨率 WENO 格式分析与改进[J]. 国防科技大学学报, 2003, 25(1): 17 - 20. HOU Zhongxi, YI Shihe, LI Hua. Analysis and improvement of high precision, high resolution WENO schemes [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2003, 25(1): 17 - 20. (in Chinese)