

剪切来流条件下的涡生振荡机理*

张辉, 刘梦珂, 范宝春, 陈志华

(南京理工大学瞬态物理国家重点实验室, 江苏南京 210094)

摘要: 将指数极坐标系建立在运动的圆柱上, 推导了运动坐标中剪切来流条件下, 涡生振荡的涡量-流函数守恒方程、其初始和边界条件、圆柱表面的水动力表达式、圆柱振荡方程。对圆柱从静止开始振荡到发展为稳定振荡状态进行了计算和讨论, 描述了脱体涡街的发展过程、升阻力相图的连续变形和漂移、圆柱振荡和平衡位置的变化过程。研究了涡生振荡稳态随剪切度 K 的变化。结果表明: 剪切来流给流场加入了背景涡, 使圆柱的上涡增强、下涡减弱, 流场的对称性被破坏。随着剪切度 K 的增大, 涡街的倾斜程度增大, 压力曲线的漂移量增大, 由此导致升力的绝对值增大, 圆柱的振幅增大且平衡位置向圆柱下侧的漂移也增大。

关键词: 涡生振荡; 剪切流; 流固耦合; 水动力; 升力

中图分类号: O361 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2016)06-070-07

Vortex-induced vibration with shear flow

ZHANG Hui, LIU Mengke, FAN Baochun, CHEN Zhihua

(National Key Laboratory of Transient Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The initial and boundary condition, the hydrodynamic force on the cylinder surface and the cylinder response equations with shear flow were derived based on the stream function-vorticity equations in the exponential-polar coordinates attached on the moving cylinder. The whole evolutions of cylinder starting from rest and then undergoing development and vibration steady were calculated and discussed. The development process of separation vortexes, the deformation and shift of drag-lift phase diagram and the variation of cylinder vibration and equilibrium position were described. Moreover, the steady condition of vortex-induced vibration with the shear rate K was investigated. The results show that the symmetrical flow field will be broken due to the background vorticity generated by the shear flow which also causes the increase of upper vortex strength and the decrease of lower vortex strength. The vortex street inclines toward the lower side and the inclination of vortex streets increase with the increasing shear rate K . So does the shift of pressure curves which leads to the increase of absolute value of lift, the amplitude and the shift of cylinder.

Key words: vortex-induced vibration; shear flow; fluid-structure interaction; hydrodynamic force; lift

流固耦合问题在航空航天工程、建筑工程及海洋工程等领域大量存在, 如高层建筑、近海工程结构以及海底管线等, 它会加剧一些复杂的固体振动, 在不理想的条件下甚至可能导致结构损伤和破坏, 因此对于流固耦合的研究有重要的实用价值和学术意义。最典型的问题是对于一个装置在转动底座的圆柱体, 周期脱落的尾涡会导致升阻力的周期性变化, 进而使圆柱体产生振动。然后振动的圆柱体会改变流场, 流场反过来会改变流场中的力, 加剧圆柱体的振动, 称为涡生振荡 (Vortex-Induced Vibration, VIV)。

在早期的研究中, 研究人员大都关注于涡生振荡带来的自锁现象。相关的实验研究表明, 当

尾涡脱落的频率与固体的固有频率一致时, 会发生自锁现象。圆柱体仅在自锁时产生剧烈的振动, 其振幅与圆柱升力和运动之间的相位差有着密切的关系^[1-6]。后来, 研究人员发现, 在不同的条件下, 涡产生的类型也不同^[7-8], 可分为 2S, 2P, P+S 等, 其涡的产生和物体振动是不同步的。Franzini^[9]、Lam^[10]和 Korkischko^[11]等研究了多个圆柱体之间的相互作用, 他们发现圆柱体之间的间距和排列对振动系统的响应有显著的影响。另外, 张辉等^[12]曾对均匀来流条件下的涡生振荡及其电磁力控制进行了数值研究。但在以往的数值研究中大都基于正弦振荡的假设, 且很多相关参数也是基于假设条件下的, 因此对于剪切来流条

* 收稿日期: 2015-07-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11202102); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20123219120050); 江苏省高校研究生实践创新计划资助项目(SJLX15_0185)

作者简介: 张辉(1981—), 男, 江苏徐州人, 教授, 博士, 硕士生导师, E-mail: zhanghui1902@126.com

件下的涡生振荡的过渡过程和流固耦合机理无法深入研究。

1 守恒方程

设绕过圆柱的来流速度沿法向是线性变化的,如图1所示, $U = U_\infty + Gy$ 。其中坐标 y 垂直于来流方向,圆柱中心处 $y = 0$, G 表示来流速度的梯度。来流剪切度 K 定义为 $K = 2Ga/U_\infty$ ^[13]。现仅讨论剪切度 $K \geq 0$ 的情况,即圆柱上侧的速度大于或等于圆柱下侧的速度。

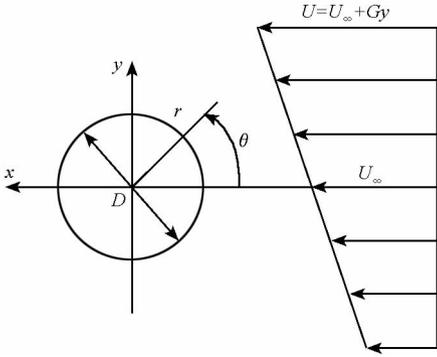


图1 剪切来流中的振动圆柱

Fig. 1 Shear flow over circular cylinder

为了讨论该问题,将指数极坐标系建立在振动圆柱上。一方面使计算区域足够大,圆柱的振动不会受到流动阻塞的影响;另一方面,圆柱附近区域的网格足够密集,可以得到流场的精细结构。另外,将坐标系建立在运动圆柱上,避免了处理流体流入流出时带来的计算误差。对于不可压缩的二维流动,在指数极坐标 (ξ, η) 下, $(r = e^{2\pi\xi}, \theta = 2\pi\eta)$, 无量纲形式涡量流函数方程为:

$$H \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(U_r \Omega)}{\partial \xi} + \frac{\partial(U_\theta \Omega)}{\partial \eta} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -H\Omega \quad (2)$$

其中:流函数 ψ 定义为 $\partial\psi/\partial\eta = U_r = H^{1/2} u_r$, $-\partial\psi/\partial\xi = U_\theta = H^{1/2} u_\theta$, u_r 和 u_θ 分别表示沿 r 和 θ 方向的速度分量; 涡量 $\Omega = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} - \frac{\partial U_r}{\partial \eta} \right)$, $H = 4\pi^2 e^{4\pi\xi}$;

雷诺数 $Re = \frac{2u_\infty^* a^*}{\nu^*}$, u_∞^* 表示来流速度, ν^* 表示运动黏度, a^* 表示圆柱半径; 无量纲时间 $t = \frac{t^* u_\infty^*}{a^*}$;

无量纲距离 $r = \frac{r^*}{a^*}$; 上标“*”表示有量纲量。

若圆柱仅沿横向(垂直于流向)振动,则初始

条件和边界条件^[12,14]为:

$$t = 0 \text{ 时, } \begin{cases} \psi = 0 \\ \Omega = -\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \quad \xi = 0 \\ \psi = -2\text{sh}(2\pi\xi) \{ \sin(2\pi\eta) + K[\text{ch}(2\pi\xi)\cos(4\pi\eta) - \text{sh}(2\pi\xi)] \} \\ \Omega = K \end{cases} \quad \xi > 0 \quad (3)$$

$$t > 0 \text{ 时, } \begin{cases} \psi = 0 \\ \Omega = -\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \quad \xi = 0 \\ \psi = -2\text{sh}(2\pi\xi) \left\{ \frac{\sin(2\pi\eta - \theta_0)}{\cos\theta_0} + K[\text{ch}(2\pi\xi)\cos(4\pi\eta) - \text{sh}(2\pi\xi)] \right\} \\ \Omega = K \end{cases} \quad \xi = \xi_\infty \quad (4)$$

其中,来流相关角^[12] $\theta_0 = \tan^{-1} \left[\frac{dl(t)}{dt} \right]$, $\frac{dl(t)}{dt}$ 是圆柱的运动速度,无量纲圆柱的位移 $l = l^*/a^*$ 。

2 圆柱表面水动力

2.1 剪应力与压力

圆柱受到流体的力 $F^{\theta*}$, 由剪应力和压力两部分组成。

$$C_F^\theta = \frac{F^{\theta*}}{\frac{1}{2}\rho^* u_\infty^{*2}} = \sqrt{(C_\tau^\theta)^2 + (C_p^\theta)^2} \quad (5)$$

其中, C_τ^θ 和 C_p^θ 分别代表剪应力和压力。

剪应力为:

$$C_\tau^\theta = \frac{\tau_{r\theta}^*}{\frac{1}{2}\rho^* u_\infty^{*2}} = C_{\tau_F}^\theta + C_{\tau_V}^\theta \quad (6)$$

其中,

$$C_{\tau_F}^\theta = \frac{4}{Re} \Omega \quad (7)$$

$$C_{\tau_V}^\theta = \frac{4}{Re} \cdot \frac{dl(t)}{dt} \cos(2\pi\eta) \quad (8)$$

显然,电磁力通过改变流场和圆柱的运动状态来改变圆柱表面的剪应力,但并未直接出现在剪应力方程中。

压力分布系数 C_p^θ 为:

$$C_p^\theta = \frac{F_p^{\theta*}}{\frac{1}{2}\rho^* u_\infty^{*2}} = \frac{P_\theta^* - P_\infty^*}{\frac{1}{2}\rho^* u_\infty^{*2}} = P_\theta - P_\infty \quad (9)$$

$$P_\theta - P_0 = \frac{4}{Re} \int_0^\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} d\eta - 4 \frac{d^2 l(t)}{dt^2} \sin(2\pi\eta) \quad (10)$$

$$P_\infty - P_0 = -4\pi \int_0^\infty \frac{\partial u_r}{\partial t} e^{2\pi\xi} d\xi - 1 - 2 \int_0^\infty u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \eta} d\xi + 4\pi \int_0^\infty u_\theta^2 d\xi - \frac{4}{Re} \int_0^\infty \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} d\xi \quad (11)$$

因此,

$$C_p^\theta = P_\theta - P_\infty = C_{pF}^\theta + C_{pV}^\theta \quad (12)$$

其中,

$$C_{pF}^\theta = \frac{4}{Re} \int_0^\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} d\eta + C_p^0 \quad (13)$$

$$C_p^0 = 1 + 4\pi \int_0^\infty \frac{\partial u_r}{\partial t} e^{2\pi\xi} d\xi + 2 \int_0^\infty u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \eta} d\xi - 4\pi \int_0^\infty u_\theta^2 d\xi + \frac{4}{Re} \int_0^\infty \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} d\xi \quad (14)$$

$$C_{pV}^\theta = -4 \frac{d^2 l(t)}{dt^2} \sin(2\pi\eta) \quad (15)$$

此时, 压力 C_p^θ 由涡生力 C_{pF}^θ 和惯性力 C_{pV}^θ 组成。

2.2 阻力和升力

水动力亦可沿流向和法向分解, 分别称为阻力和升力。

$$C_d^\theta = C_p^\theta \cos(2\pi\eta) + C_\tau^\theta \sin(2\pi\eta) \quad (16)$$

$$C_l^\theta = C_p^\theta \sin(2\pi\eta) + C_\tau^\theta \cos(2\pi\eta) \quad (17)$$

将力的分布函数沿圆柱表面进行积分, 可得到总力。

$$C = \frac{F^*}{\rho^* u_\infty^{*2} a^*} \quad (18)$$

因此, 总阻力 C_d 可写为:

$$C_d = \int_0^{2\pi} C_d^\theta d\theta = C_{dF} = \frac{2}{Re} \int_0^1 \left(2\pi\Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right) \sin(2\pi\eta) d\eta \quad (19)$$

总升力 C_l 为:

$$C_l = \int_0^{2\pi} C_l^\theta d\theta = C_{lF} + C_{lV} \quad (20)$$

其中,

$$C_{lF} = \frac{2}{Re} \int_0^1 \left(2\pi\Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right) \cos(2\pi\eta) d\eta \quad (21)$$

$$C_{lV} = -4\pi \frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{4\pi}{Re} \cdot \frac{dl}{dt} \quad (22)$$

因此,

$$C_l = C_{lF} - 4\pi \frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{4\pi}{Re} \cdot \frac{dl}{dt} \quad (23)$$

显然, 作用于圆柱的升力由三部分组成。式(23)右侧第一项 C_{lF} 为涡生力, 与圆柱表面的涡量和涡通量有关; 第二项为惯性力, 与圆柱的加速度有关; 第三项为黏性阻尼力, 与雷诺数和圆柱的运动速度有关。第二项和第三项与流场的变化无关。

2.3 圆柱运动方程

仅考虑沿 y 方向的振动, 则无量纲的圆柱运动方程为:

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} + \xi \frac{dl}{dt} + m_{vir} \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 \omega^2 l = F \quad (24)$$

其中,

$$F = \frac{C_l}{\pi} = \frac{C_{lF}}{\pi} - 4 \frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{4}{Re} \cdot \frac{dl}{dt} \quad (25)$$

数值计算中具体的流固耦合过程如图 2 所示。以剪切来流条件下的圆柱绕流作为初始条件, 在式(23)中得到圆柱所受的升力。当 $t > t_1 = 446$ 时, 通过式(24)得到圆柱体的位移和速度。随后结合式(1)、式(2)以及更新后的边界条件可以得到新的流场进而得到新的升力。如此逐步求解, 即可得到流固耦合全过程中的流场、水动力和圆柱体的运动结果。

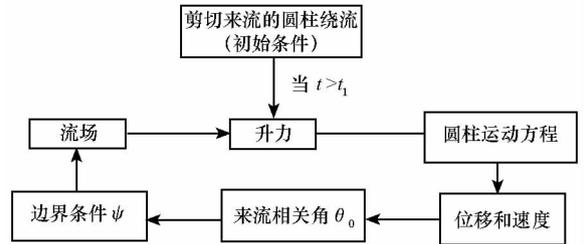


图 2 数值计算中的流固耦合过程

Fig. 2 Process on numerical procedure of fluid-structure interacting

数值计算时, 动量方程(1)采用交替方向隐式(Alternative Direction Implicit, ADI)格式, 流函数方程(2)采用快速傅里叶变换(Fast Fourier Transformation, FFT)格式, 圆柱运动方程(24)采用 Runge-Kutta 法^[12]。上述格式具有时间一阶精度和空间二阶精度。计算空间步长 $\Delta\xi = 0.004$, $\Delta\eta = 0.002$, 时间 $\Delta t = 0.005$ 。

3 结果与讨论

3.1 剪切来流条件下涡生振荡的发展过程

由上述思路可求得剪切来流条件下涡生振荡由静止到稳定振荡的全过程。为了方便讨论其振动机理, 用 A, B, C, D 分别代表一个周期 T 内的 $0T/4, 1T/4, 2T/4, 3T/4$ 时刻。而脚标“1”~“5”代表过渡过程中不同的周期。以 $Re = 150$, 剪切

度 $K=0.2$ 为例, $t_1 = 446$ 时刻,解除圆柱 y 方向的约束,圆柱在升力作用下振荡,从固定发展至稳定振荡。在该过程中,圆柱位移的变化如图 3 所示。图中圆柱在周期变化升力的作用下,振幅逐渐增大,且圆柱的平衡位置离开 $l/a = 0$ 点,向下侧漂移,这是由于剪切来流导致的平均升力指向圆柱的下侧。当 $t \geq 640$,圆柱达到稳定振荡状态。

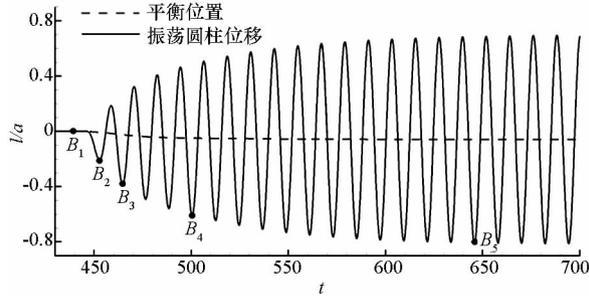


图 3 剪切来流作用下振荡圆柱的位移变化 ($K=0.2$)

Fig. 3 Displacement of cylinder vibration with shear flow ($K=0.2$)

振动过程中 ($K=0.2$) 的流场涡量变化如图 4 所示,其中灰色为正涡,黑色为负涡,“+”为圆柱从固定开始释放的初始 0 位。图 4 中的时刻 B_i 与图 3 相对应,圆柱都处在下侧最大位移处。横向约束解除后,圆柱振荡,由于能量从流体转移到圆柱,圆柱的振幅增大,对应的流场如图 4 所示。当总能量达到平衡时,圆柱的振荡也达到稳定,此时流场对应 B_5 。

流场的变化导致升阻力的变化。振荡过程中 ($K=0.2$), 涡生升阻力相图 $C_{dF} \sim C_{lF}$ 如图 5 所示。 $A_1 B_1 C_1 D_1 A_1$ 对应固定圆柱的升阻力相图,由于圆柱振荡对圆柱上下两侧剪切层的作用,使相图逐渐发生 180° 的反转。随着圆柱振荡的加剧,圆柱的能量增大,点 A 与 C 分离,打破了曲线的镜像对称,直至振荡达到稳定,点 A 与 C 不再重合,对应相图 $A_5 B_5 C_5 D_5 A_5$ 。

3.2 涡生振荡终态随剪切度 K 的变化

来流的剪切度 K 不同,稳定振荡时的流场和圆柱受力也不同。图 6 为不同的剪切度 K 下,圆柱在横向形成涡生振荡时,几个典型时刻的涡量分布图,其中灰色为正涡,黑色为负涡,“+”为圆柱从固定开始释放的初始 0 位。

剪切来流给流场加入了背景涡,由于圆柱的上涡与背景涡方向相同而下涡与背景涡方向相反,因此圆柱的上涡增强而下涡减弱,流场的对称性被破坏,且 K 越大时流场的背景涡越强。涡街向下侧倾斜,倾斜程度随着 K 的增大而增大。尾流中两排涡的涡距增大,剪切度 K 愈大,涡距愈大。圆柱振荡的

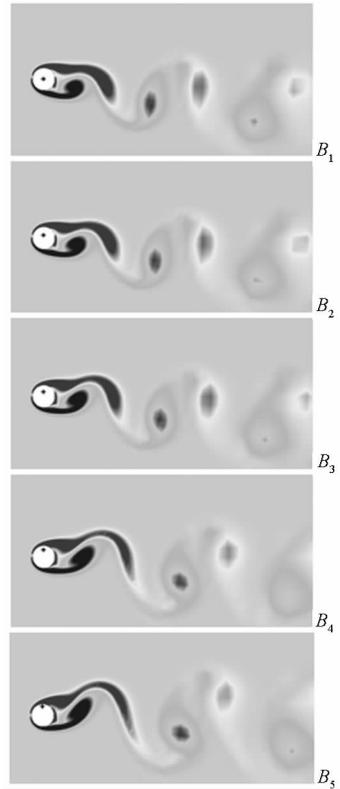


图 4 振动过程中尾涡形态的瞬时变化 ($K=0.2$)

Fig. 4 Instantaneous vortex patterns in wake during the vibration process ($K=0.2$)

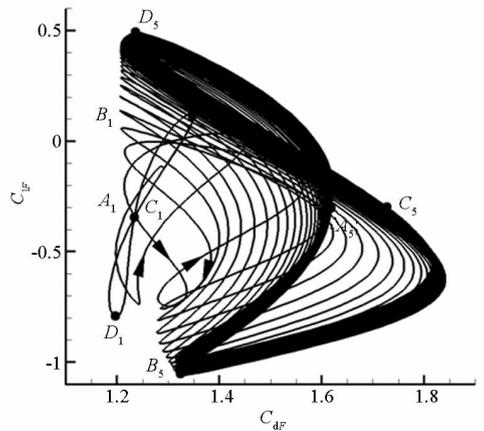


图 5 涡生振荡发展过程中升阻力相图的变化 ($K=0.2$)

Fig. 5 Phase diagram of drag and lift in the VIV development ($K=0.2$)

平衡位置也因来流剪切,而向下侧漂移。

流场的变化导致圆柱受力的变化,而压力相比摩擦力在合力中更占主导地位^[15]。对应图 6 四个时刻的压力 C_{pF}^0 分布随剪切度 K 的变化如图 7 所示。来流的剪切导致前滞止点向圆柱上侧漂移,使得压力分布也沿着顺时针漂移。由图 7 可以看出,压力的漂移导致圆柱上壁面的压力以增大为主而下壁面的压力以减小为主,因此产生向下的升力,且剪切度增大时,漂移量也增大,因此升力的绝对值随着剪切度的增大而增大。

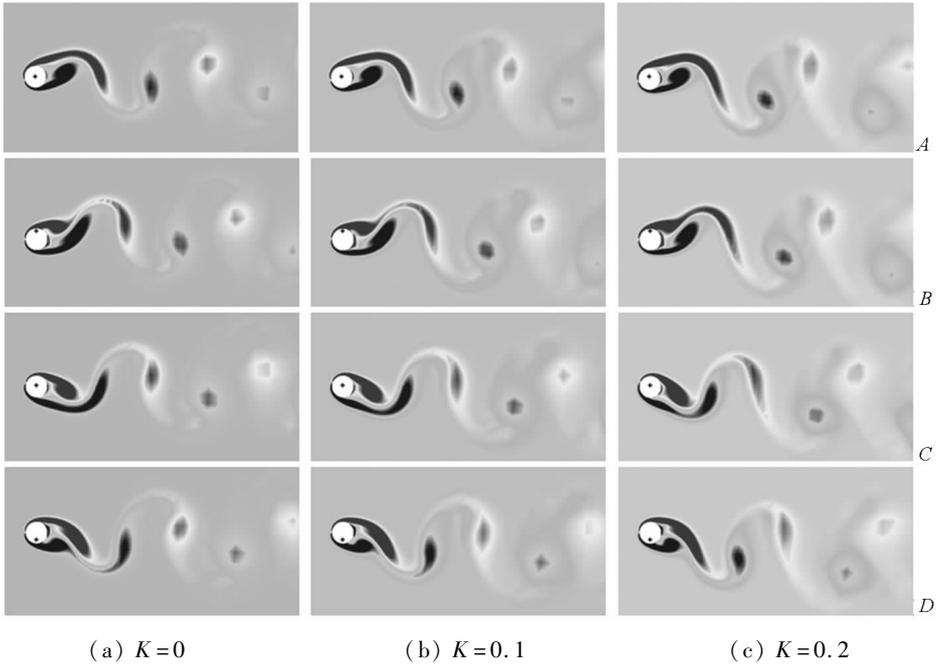
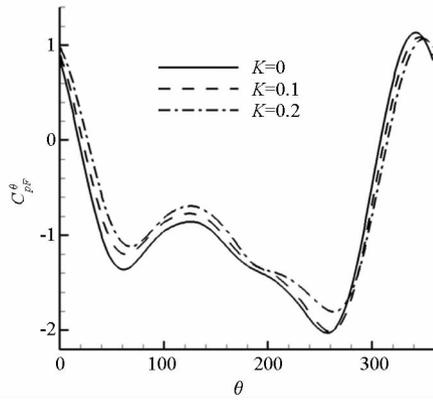
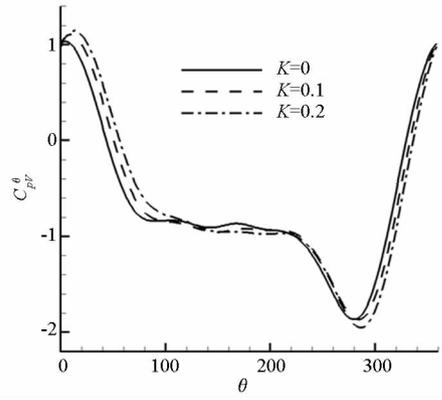


图 6 不同剪切度 K 的涡生振荡流场周期变化

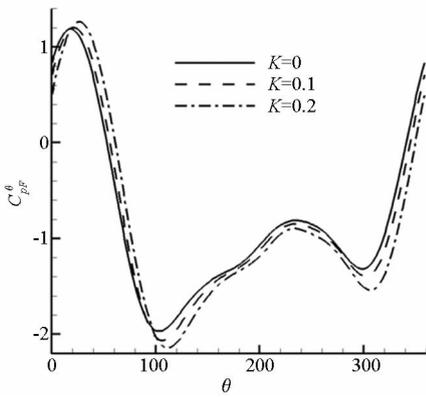
Fig. 6 Periodical variation of flow field with different shear rate K



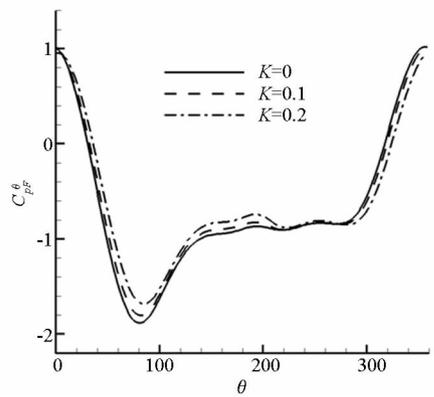
(a) A 时刻
(a) Moment A



(b) B 时刻
(b) Moment B



(c) C 时刻
(c) Moment C



(d) D 时刻
(d) Moment D

图 7 压力 C_{pF}^{θ} 分布随剪切度 K 的变化

Fig. 7 Distributions of pressure coefficient C_{pF}^{θ} with different shear rate K

对应于图6的四个时刻,振荡圆柱因加速而诱导的压力 C_{pv}^θ 分布如图8所示。由于来流的剪切作用,圆柱的平衡位置向下侧漂移,导致在A和C时刻,加速度 $\frac{d^2 l(t)}{dt^2}$ 不为0,故 C_{pv}^θ 也不为0,随着剪切度 K 的增大而增大。B时刻,加速度绝对值 $\frac{d^2 l(t)}{dt^2}$ 最大, C_{pv}^θ 的绝对值取极值,且随着剪切度 K 的增大而增大。而在D时刻的 C_{pv}^θ 值随剪切度 K 的变化不大。另外,由于加速度的方向垂直于来流方向,因此升力随着惯性力的增大而增大,而阻力与惯性力无关。

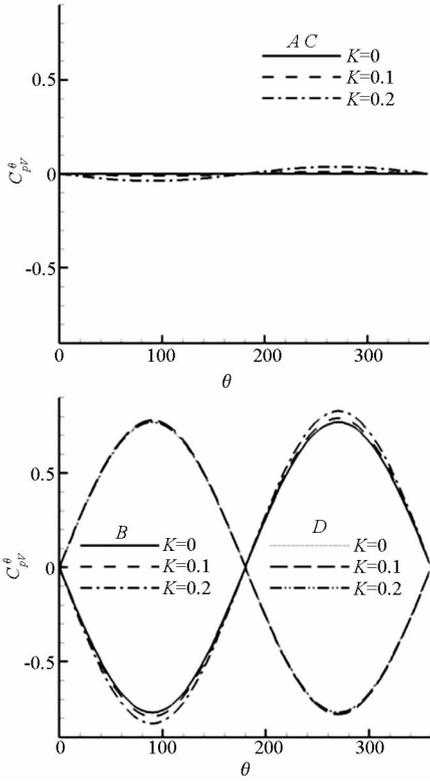


图8 压力 C_{pv}^θ 分布随剪切度 K 的变化

Fig. 8 Distributions of pressure coefficient C_{pv}^θ with different shear rate K

涡生升阻力 $C_{df} \sim C_{lf}$ 相图随剪切度 K 的变化如图9所示。由图9可以看出,由于剪切导致曲线向下侧漂移,即升力均值不为0,指向圆柱下侧,且升力均值的绝对值随着剪切度的增大而增大。另外,随着剪切度的增大,升力和阻力的振幅也增大,并导致A,C点的分离。

稳定振荡时,圆柱的振幅和平衡位置随剪切度 K 的变化如图10所示,其中图10(a)为振幅随 K 的变化,图10(b)为平衡位置随 K 的变化。由图10可以看出,随着剪切度的增大,振幅增大且平衡位置向圆柱下侧的漂移也增大。

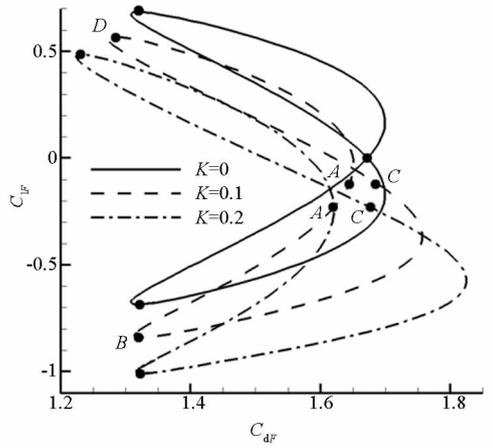
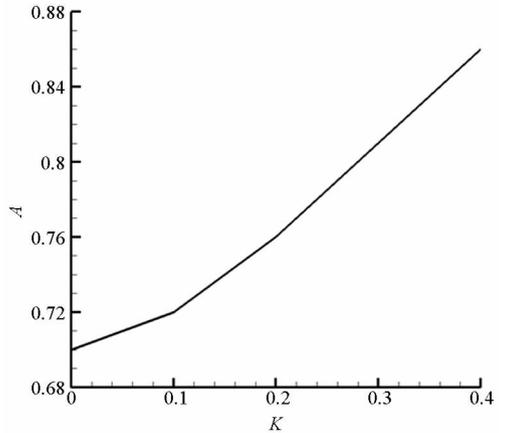
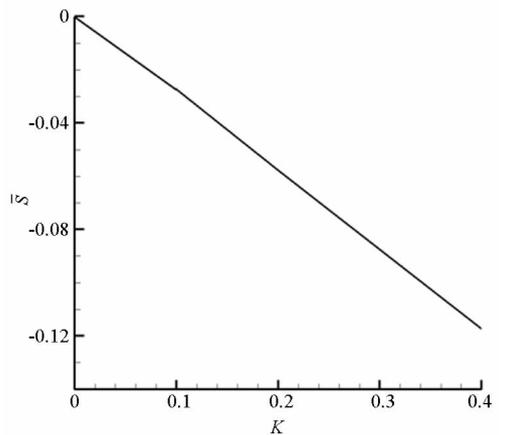


图9 升阻力 $C_{df} \sim C_{lf}$ 相图随剪切度 K 的变化
Fig. 9 Variation of $C_{df} \sim C_{lf}$ phase diagram with shear rate K



(a) 振幅随 K 的变化
(a) Variation of amplitude with K



(b) 平衡位置随 K 的变化
(b) Variation of equilibrium position with K

图10 圆柱的振幅和平衡位置随剪切度 K 的变化
Fig. 10 Variation of amplitude and equilibrium position with shear rate K

4 结论

本文将指数极坐标系建立在运动的圆柱上,

推导了运动坐标中剪切来流条件下, 涡生振荡的涡量-流函数守恒方程及其初始和边界条件, 圆柱表面的水动力表达式以及圆柱振荡方程。以推导得到的真实的水动力代入圆柱的运动方程, 代替以往研究假设的正弦振荡, 实现真正的流固耦合。对涡生振荡的发展过程及其终态随剪切度 K 的变化进行了数值研究。结果表明, 剪切来流给流场加入了背景涡, 改变了圆柱的边界层结构。由于圆柱的上涡与背景涡方向相同而下涡与背景涡方向相反, 因此圆柱的上涡增强而下涡减弱, 流场的对称性被破坏。随着剪切度 K 的增大, 背景涡的强度增大, 因此涡街的倾斜程度增大, 压力曲线的漂移量增大, 由此导致升力的绝对值增大, 圆柱的振幅增大且平衡位置向圆柱下侧的漂移也增大。

参考文献 (References)

- [1] Feng C C. The measurement of vortex-induced effects in flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders [D]. Canada: University of British Columbia, 1968.
- [2] Griffin O M, Koopmann G H. The vortex-excited lift and reaction forces on resonantly vibrating cylinders[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, 54(3): 435-448.
- [3] Griffin O M. Vortex-excited cross-flow vibrations of a single cylindrical tube [J]. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 1980, 102(2): 158-166.
- [4] Griffin O M, Ramberg S E. Some recent studies of vortex shedding with application to marine tubulars and risers[J]. *ASME Journal of Energy Research and Technology*, 1982, 104: 2-13.
- [5] Brika D, Laneville A. Vortex-induced vibration of a long flexible circular cylinder [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, 250: 481-508.
- [6] Hover F S, Miller S N, Triantafyllou M S. Vortex-induced vibration of marine cables; experiments using force feedback[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1997, 11(3): 307-326.
- [7] Williamson C H K, Govardhan R. Vortex-induced vibrations[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2004, 36: 413-455.
- [8] Morse T L, Williamson C H K. Prediction of vortex-induced vibration response by employing controlled motion[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, 634: 5-39.
- [9] Franzini G R, Fujiarra A L C, Meneghini J R, et al. Experimental investigation of vortex-induced vibration on rigid, smooth and inclined cylinders [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2009, 25(4): 742-750.
- [10] Lam K, Zou L. Three-dimensional numerical simulation of cross-flow around four cylinders in an in-line square configuration [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, 26(3): 482-502.
- [11] Korkischko I, Meneghini J R. Experimental investigation of flow-induced vibrations at low mass-damping [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, 11: 973-982.
- [12] Zhang H, Fan B C, Chen Z H, et al. Numerical study of the suppression mechanism of vortex-induced vibration by symmetric Lorentz force [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2014, 48: 62-80.
- [13] Lei C, Cheng L, Kavanagh K. A finite difference solution of the shear flow over a circular cylinder [J]. *Ocean Engineering*, 2000, 27(3): 271-290.
- [14] Wu T, Chen C F. Laminar boundary-layer separation over a circular cylinder in uniform shear flow [J]. *Acta Mechanica*, 2000, 144: 71-82.
- [15] Mittal S, Kumar B. Flow past a rotating cylinder [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 476: 303-334.