

基于多项式设计法的小推力轨迹设计*

曾奎, 耿云海, 谢成清

(哈尔滨工业大学 卫星技术研究所, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:形状逼近法是小推力轨迹设计中的一种有效方法,然而现有的方法大都假定运动轨迹为某一特定的形状,而且没有考虑推力加速度的约束限制。针对小推力轨道交会问题,提出一种基于多项式的轨迹设计方法。结合极坐标系,建立基于多项式的三自由度轨迹运动模型,将轨迹设计问题转化为求解多项式的系数问题;根据运动模型推导轨迹的动力学特性,建立约束方程,并以消耗燃料最少作为性能指标,采用序列二次规划的方法对多项式的系数进行寻优计算。该方法不仅能求解多个形状设计参数不确定性问题,而且还能满足推力加速度的约束限制。仿真验证了该方法的正确性和可用性,该方法可为任务设计初步阶段的轨迹设计和燃料消耗预估提供一定的技术参考。

关键词:多项式设计;轨迹设计;序列二次规划;小推力;推力限制

中图分类号:V412.4+1 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2016)06-077-05

Low-thrust trajectory design of rendezvous based on polynomial function

ZENG Kui, GENG Yunhai, XIE Chengqing

(Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Shape-based approximation is an effective method for the low-thrust trajectory design. However, the vast majority of methods assume that the motion trajectory is a specific shape, and there is no constraint on the thrust acceleration. In this representation, according to the issue of low-thrust spacecraft rendezvous, a new method for transferring trajectory design was proposed. Based on the polar coordinates, the trajectory design was successfully turned into solving polynomial coefficients problem through three degrees of freedom motion model built by introduced polynomial function. Meanwhile, the dynamic characteristics of the trajectory as well as the constraint equations were deduced. Subsequently, the optimal polynomial coefficients were solved by the approach of sequential quadratic programming. This method can not only solve problems with a greater number of free parameters, but also meet the thrust acceleration constraints. The simulation has confirmed that this method is accuracy and availability. It can provide a certain technical reference for the trajectory design and fuel consumption estimation during the preliminary stage.

Key words: polynomial design; trajectory design; sequential quadratic programming; low-thrust; thrust constrained

随着空间活动的增加和任务复杂性的提升,小推力发动机具有体积小、比冲高、推力大小可控性强等优点,受到了工程技术人员越来越广泛的重视^[1]。由于小推力极大地增强了运动方程的非线性,求解非常困难。现有的小推力轨迹设计方法中最常见的方法是最优控制^[2-3],按照求解方式的不同一般可以分为间接法^[4]和直接法^[5]。然而直接法和间接法对初值均具有一定的敏感性,间接法虽然计算精度较高,但是计算精度对初始值有较强的依赖性,因此需要反复迭代来猜测初始协态变量,计算量大而且耗时。因此,寻找新

的小推力轨迹设计方法非常有意义。

形状逼近法是近些年新提出的一种新方法,由于该方法在初始轨迹设计方面效果良好,受到人们越来越广泛的关注。但是目前的方法大都假设运动轨迹成某一特定的曲线,在一定程度上逼近函数模型的选取极大地限制了逼近能力,而且对于推力约束问题常常捉襟见肘。Petroopoulos^[6-7]采用指数函数的方法建立了轨迹模型,但是该方法不能满足速度边界条件。Wall^[8]设计了六阶逆多项式(Inverse Polynomial, IP)的轨道交会算法,将半径表示为关于极角的逆

* 收稿日期:2015-06-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61473096)

作者简介:曾奎(1987—),男,湖北襄阳人,博士研究生,E-mail:zenghit@126.com;

耿云海(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:genygh@hit.edu.cn

多项式模型,但该方法不能满足发动机推力约束的限制。随后,尚海滨^[9]等对 6 阶逆多项式算法进行了进一步的深入研究,在前人的基础上推导了关键系数的取值范围。CHENG^[10]在 Wall 的基础上进行了改进,建立了三维轨迹运动模型,但是文中仍然没有考虑推力约束的限制。Abdelkhalik^[11]引入了傅里叶级数的逼近方法,但是文中并未给出傅里叶函数各项系数的存在条件。本文主要针对轨道交会任务中的小推力轨迹设计问题,提出了一种基于多项式的轨迹设计方法。

1 多项式设计法

一般情况下,空间任何一条曲线都可以用多项式函数的形式来表示。因此,如果根据轨道运动学方程和约束条件求出多项式的系数,便可以确定航天器的转移轨迹。

对于共面情况下的轨迹设计,在极坐标系下,航天器的位置仅与轨道半径 r 和极角 θ 有关,确定 r 和 θ 有两种方式,一种是将 r 表示为 θ 的函数,通过极角 θ 的变化来确定 r ;另一种是将 r 和 θ 表示为时间 t 的函数。本文采用第二种方式,将轨迹模型表示为如下形式:

$$\begin{cases} r = a_{r0} + a_{r1}t + a_{r2}t^2 + a_{r3}t^3 + \cdots + a_{rm}t^m \\ \theta = a_{\theta0} + a_{\theta1}t + a_{\theta2}t^2 + a_{\theta3}t^3 + \cdots + a_{\theta n}t^n \end{cases} \quad (1)$$

式中, $a_{r0}, a_{r1}, \cdots, a_{rm}$ 和 $a_{\theta0}, a_{\theta1}, \cdots, a_{\theta n}$ 为待确定系数,其中 m 和 n 为大于 3 的正整数,多项式设计法的关键就是根据任务参数和约束条件确定多项式的系数。

极坐标系下根据牛顿引力定理,航天器的运动方程为^[12]:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = T_a \sin\alpha \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = T_a \cos\alpha \end{cases} \quad (2)$$

其中, r 为航天器的位置矢量 \mathbf{r} 的模,即轨道半径, α 为发动机的推力方向角, T_a 为发动机的推力加速度大小, μ 为引力常数,具体几何关系如图 1 所示,图中 v 表示航天器的速度, γ 为飞行路径角。

考虑到本文研究的是小推力轨迹设计问题,切向推力可以最快地改变航天器的动能,并且便于发动机姿态机动,在工程上可实现性好,这里假设推力沿着速度线方向,即:

$$\alpha = \gamma + n\pi \quad (3)$$

其中,当推力方向与速度方向相同时 n 取 1,相反时 n 取 0。

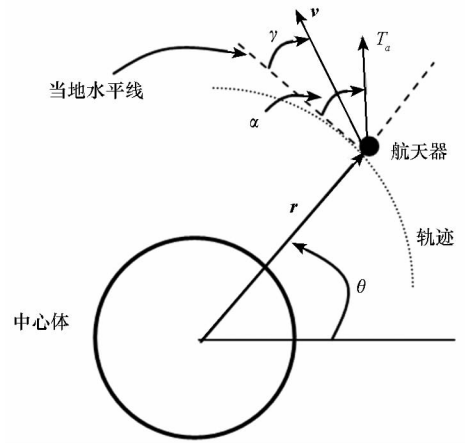


图 1 航天器轨迹

Fig. 1 Spacecraft trajectory

根据式(2)中的第二项可得:

$$T_a = \frac{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}{\cos\alpha} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)中的第一项可得:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} &= \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{\cos\alpha} \sin\alpha \\ &= (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \tan\alpha \\ &= (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \tan\gamma \end{aligned} \quad (5)$$

根据切向速度与径向速度的关系,可计算出推力方向角为:

$$\tan\alpha = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)可得轨迹的等式约束方程为:

$$\begin{aligned} f(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) &= r^2(\dot{\theta}\ddot{r} - r\ddot{\theta}) + \\ &\dot{\theta}(\mu - 2r\dot{r}^2) - (r\dot{\theta})^3 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

对于发动机推力大小有限制的情况,还需要考虑以下约束

$$\left(\frac{T_a}{T_{a,\max}} \right) \leq 1 \quad (8)$$

其中, $T_{a,\max}$ 表示发动机允许的最大推力加速度值。

2 多项式系数的确定

前面通过多项式法,将小推力轨迹设计问题转换成了求多项式的系数问题,将式(1)分别代入式(7)和式(8),可得仅与多项式系数相关的约束方程为:

$$f(a_{r0}, a_{r1}, \cdots, a_{rm}, a_{\theta0}, a_{\theta1}, \cdots, a_{\theta n}, t) = 0 \quad (9)$$

$$f(a_{r0}, a_{r1}, \cdots, a_{rm}, a_{\theta0}, a_{\theta1}, \cdots, a_{\theta n}, t) \leq 1 \quad (10)$$

为了准确地求解未知系数,至少需要 $(m+n+2)$ 个约束方程,这就需要对转移轨迹进行离散化,建立每一个离散点的约束方程。为了保证运动轨迹满足约束方程(9)和方程(10),多项式的系数可以分两部分求取。

2.1 可确定的多项式系数

对于给定的初始时刻状态 $(r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$ 和末端时刻的状态 $(r_f, \theta_f, \dot{r}_f, \dot{\theta}_f)$,则根据这两个状态可以确定8个未知数。

将初始时刻 t_0 的状态参数代入式(9),可得:

$$\begin{cases} a_{r0} = r_0, & a_{\theta 0} = \theta_0 \\ a_{r1} = \dot{r}_0, & a_{\theta 1} = \dot{\theta}_0 \end{cases} \quad (11)$$

将末端时刻 t_f 的状态参数代入式(9),可解出:

$$\begin{bmatrix} a_{r(m-1)} \\ a_{rm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f^{m-1} & t_f^m \\ (m-1)t_f^{m-1} & mt_f^m \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_f - (a_{r0} + a_{r1}t_f + \dots + a_{r(m-2)}t_f^{m-2}) \\ t_f \dot{r}_f - (a_{r1}t_f + \dots + (m-2)a_{r(m-2)}t_f^{m-2}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} a_{\theta(n-1)} \\ a_{\theta n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f^{n-1} & t_f^n \\ (n-1)t_f^{n-1} & nt_f^n \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_f - (a_{\theta 0} + a_{\theta 1}t_f + \dots + a_{\theta(n-2)}t_f^{n-2}) \\ t_f \dot{r}_f - (a_{\theta 1}t_f + \dots + (n-2)a_{\theta(n-2)}t_f^{n-2}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

需要说明的是,这里的 $\theta_f = \tilde{\theta} + N_{\text{rev}} \times 2\pi$,其中 $\tilde{\theta}$ 表示初始时刻和末端时刻航天器位置矢量之间的夹角, N_{rev} 代表轨迹中航天器转过的圈数,如图2所示。对于轨道设计任务中终端值 θ_f 无约束的情况, θ_f 可以作为一个优化参数,通过粒子群优化算法等优化算法寻求一个最优值。

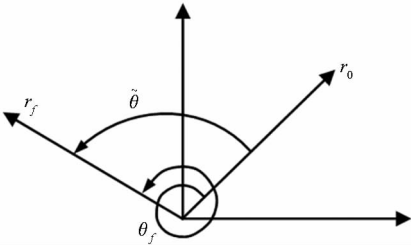


图2 极角示意图

Fig. 2 Definitions of angles

2.2 待优化系数的求解

2.2.1 优化算法

考虑到本文算法中含有等式和不等式约束方程,采用序列二次规划(Sequence Quadratic Program, SQP)方法对参数进行优化求解,SQP优

化算法是一种非常适合于求解带有等式和不等式约束问题的有效方法,具体算法流程可参考文献[13]。为了避免最优解的数值不稳定情况,采用基于Lagrange乘子法,对Lagrange函数取二次近似,将非线性约束优化问题转化为二次规划问题来获得最优解。本文选取的优化目标函数为消耗燃料最小,即:

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} |T_a| dt \quad (14)$$

2.2.2 求解步骤

对给定的轨道转移时间 t_f ,多项式的数目 m 和 n ,多项式系数的确定步骤如下:

步骤1:根据初始和末端时刻航天器的位置和速度矢量 $(r_0, \theta_0, r_f, \theta_f, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0, \dot{r}_f, \dot{\theta}_f)$,利用立方多项式法(参见2.3节)初步拟合一条参考转移轨迹;

步骤2:将轨道转移时间 $0 \sim t_f$ 离散成 N 个区间,利用步骤1中的参考轨迹计算每个节点处的状态参数 (r_i, θ_i) ,并通过这些状态参数解算出多项式系数的初始值;

步骤3:采用序列二次规划优化算法,根据步骤2中的初始值,求解满足式(9)和式(10)的一组多项式系数,得出优化后的转移轨迹。

2.3 多项式系数的初始值猜测

文献[11]提供了逆多项式方法和指数正弦函数法,但是所建立的函数模型都是将极角 θ 作为自变量,而本文中的多项式系数法采用的是将时间作为自变量,为了能快速计算出初始猜测值,这里有两种可供选用的方法:双曲正切函数法和立方多项式法。

双曲正切函数法的 r 和 θ 近似模型为:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{1}{2} \left[(a_r + b_r) + (b_r - a_r) \tanh\left(\frac{t-t_i}{\omega}\right) \right] \\ \theta(t) = \frac{1}{2} \left[(a_\theta + b_\theta) + (b_\theta - a_\theta) \tanh\left(\frac{t-t_i}{\omega}\right) \right] \end{cases} \quad (15)$$

其中: $a_r = r_0, b_r = r_f, a_\theta = \theta_i, b_\theta = \theta_f, t_i = \frac{t_f}{2}$; ω 表示测量宽度的函数,利用双曲正切函数法可以得到较好的近似值 r 。

立方多项式法的 r 和 θ 的近似模型为:

$$\begin{cases} r(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \\ \theta(t) = et^3 + ft^2 + gt + h \end{cases} \quad (16)$$

其中, a, b, c, d 和 e, f, g, h 为常数,可以通过边界条件直接确定。

2.4 多项式系数的存在条件

为了避免奇异和算法不收敛的现象产生,任务设计中轨道交会时间需要满足以下约束:

$$H_0 \cdot \frac{\theta_f}{2\pi} < T < H_f \cdot \frac{\theta_f}{2\pi} \quad (17)$$

式中 H_0 和 H_f 分别为初始和目标轨道的周期,这里假设 $H_0 < H_f$ 。

同时,为了保证最大推力加速度值在约束范围内,对于转移极角 θ_f ($\theta_f \geq \tilde{\theta}$) 还应满足:

$$\theta_f > \frac{|v_0 - v_f|}{T_{a,\max}} \cdot \sqrt{\frac{8\mu}{(a_0 + a_f)^3}} \quad (18)$$

其中, v_0 和 v_f 分别为离轨点和入轨点的速度大小, a_0 和 a_f 为初始轨道和目标轨道的半长轴。 θ_f 越大所需的最大推力加速度值越小。

3 数值仿真

边界条件和输入参数具体如表 1 所示。为了便于计算,计算过程中均采用无量纲的形式,选取参考长度为 DU ($1DU = Re$), Re 为地球半径,参考时间为 TU ($1TU = \sqrt{DU^3/\mu}$), 发动机的最大推力加速度限制为 0.195 m/s^2 。

表 1 输入参数和边界条件

Tab. 1 Input parameters and boundary conditions

边界条件和输入参数	
$r_0 = 1.05DU$	$\dot{\theta}_f = 0.5318 \text{ rad}/TU$
$\theta_0 = 0 \text{ rad}$	$N_{\text{rev}} = 1$
$r_f = 1.5234DU$	$m = 7$
$\theta_f = 9.831 \text{ rad}$	$n = 7$
$\dot{r}_0 = 0DU/TU$	离散点个数 = 25
$\dot{\theta}_0 = 1 \text{ rad}/TU$	$t_0 = 0$
$\dot{r}_f = 0DU/TU$	$t_f = 13.425TU$

仿真结果如图 3~5 所示,6 阶逆多项式算法(IP 方法)是形状逼近法中的一种典型算法,为了比较分析图中同时给出了 IP 方法的仿真结果。图 3 为航天器的转移轨迹,从图中可以看出航天器从离轨点出发开始一段时间沿着初始轨道运动,缓慢地加速,最后平滑的切入到目标轨道的交会点。从仿真得出的轨迹曲线起点处位置为: $r(t_0) = 1.05DU$, 速度为 $\dot{r}(t_0) = 0$; 末端位置为 $r(t_f) = 1.5234DU$, 速度为 $\dot{r}(t_f) = 0$, 满足初始边界条件约束,说明算法具有较好的计算精度,从而证明了该方法的正确性。

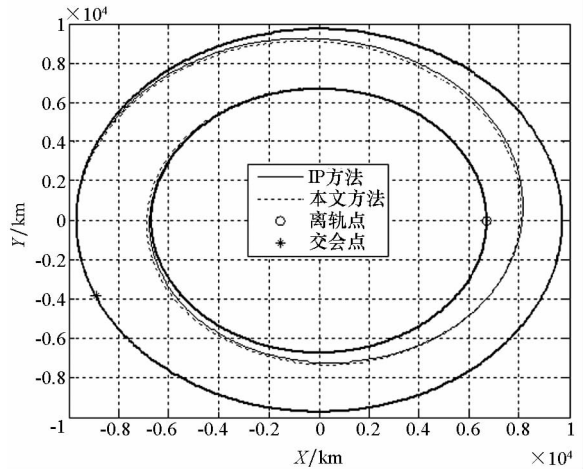


图 3 航天器转移轨迹

Fig. 3 Spacecraft trajectories

地心距变化曲线如图 4 所示,图中两条曲线的两端点处完全重合,说明两种方法均能满足端点处的边界约束条件,但是从变化趋势来看,本文方法的半径变化在中间段要比 IP 方法更为平缓一些,这也与图 5 中的推力加速度曲线变化相对应。由于 IP 方法在算法中没有考虑推力加速度值的约束,所以所需的最大推力加速度值超出了允许的约束范围,而本文方法一直保持在约束范围内,很好地满足了设计要求。

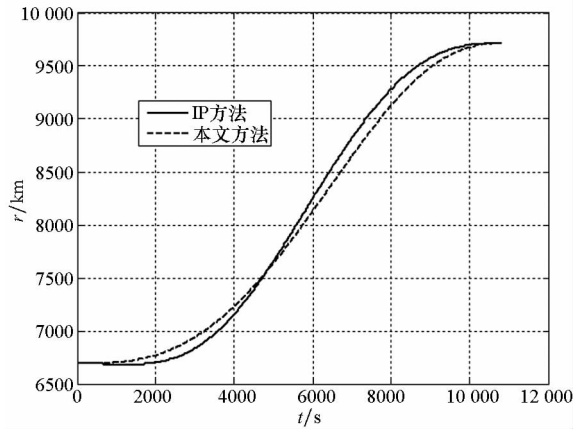


图 4 地心距的变化曲线

Fig. 4 Geocentric distance profile

为了更充分地分析本文方法的正确性,采用最优控制(高斯伪谱法)对算例进行了仿真,表 2 给出了三种不同算法的部分仿真结果,从表中数据可以看出,本文算法不仅保证了推力加速度最大值在约束范围内,而且燃料更接近于最优控制算法,由于 IP 算法只是从寻求解析解的角度给出的仿真结果,假设转移轨迹为 6 阶逆多项式的形式,在一定程度上限制了曲线的逼近能力,并没对转移轨迹进行择优求解,因此燃料消耗较多,相对于 IP 算法,本文方法的可用性更好。

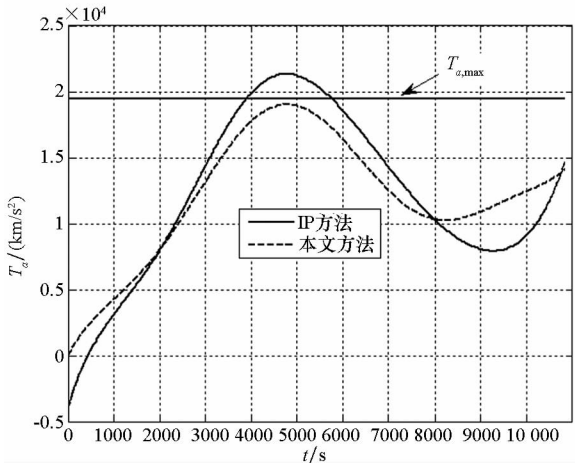


图5 加速度变化曲线

Fig. 5 Thrust acceleration profile

表2 不同的算法仿真结果对比

Tab. 2 Comparisons between different types of simulation results

设计方法	$T_{a,max}/$ (m/s^2)	$\max T_a/$ (m/s^2)	燃料消耗 $\Delta v/$ (m/s)
IP方法	—	0.213 7	0.167 5
本文方法	0.195 0	0.190 5	0.165 4
最优控制	0.195 0	0.195 0	0.165 2

4 结论

针对轨道交会任务中的小推力轨迹设计问题,提出了一种基于多项式的轨迹设计方法。该方法主要具有以下三个优点:①模型简单,通过多项式的方法有效地将轨迹设计问题简化成了求解多项式的系数问题;②准确性高,本文方法不仅保证了轨迹满足边界条件约束,还考虑了推力加速度的限制;③可用性好,该算法避免了建模时假定运动轨迹成某一特定形状曲线的限制,增强了形状曲线的逼近能力,所得结果与最优控制算法非常接近。本文方法可用于任务设计初步阶段的轨迹设计和燃料消耗预估,该方法为小推力航天器的任务设计提供了一种新方法。

参考文献 (References)

[1] 汤建国,张洪波. 小推力轨道机动动力学与控制[M]. 北京:科学出版社,2013:1-20.

TANG Jianguo, ZHANG Hongbo. Dynamics and control of low-thrust orbital maneuver [M]. Beijing: Science Press, 2013: 1-20. (in Chinese)

[2] 雍恩米,陈磊,唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述[J]. 宇航学报,2008,29(2):397-406.
YONG Enmi, CHEN Lei, TANG Guojin. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2): 397-406. (in Chinese)

[3] Hull D G. Conversion of optimal control problems into parameter optimization problems [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1997, 20(1): 57-60.

[4] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 193-207.

[5] Betts J T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method [J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2000, 120(1/2): 27-40.

[6] Petropoulos A E, Longuski J M. Shape-based algorithm for the automated design of low-thrust, gravity assist trajectories [J]. Journal of Spacecraft & Rockets, 2004, 41: 787-796.

[7] Petropoulos A E. Shape-based approach to automated, low-thrust, gravity-assist trajectory design [D]. USA: Purdue University, 2001.

[8] Wall B J, Conway B A. Shape-based approach to low-thrust rendezvous trajectory design [J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2009, 32(1): 95-101.

[9] 尚海滨,崔平远,乔栋. 基于形状的行星际小推力转移轨道初始设计方法[J]. 宇航学报,2010,31(6):1569-1574.
SHANG Haibin, CUI Pingyuan, QIAO Dong. A shape-based design approach to interplanetary low-thrust transfer trajectory [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(6): 1569-1574. (in Chinese)

[10] Cheng X, Shi X N, Cui N G. Modified shape-based method for three-dimensional trajectory design [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2012, 19(2): 1-4.

[11] Abdelkhalik O, Taheri E. Shape-based approximation of constrained low-thrust space trajectories using fourier series [J]. Journal of Spacecraft & Rockets, 2012, 49(3): 535-545.

[12] Miele A, Wang T, Williams P N. Computation of optimal Mars trajectories via combined chemical/electrical propulsion, part 1: baseline solutions for deep interplanetary space [J]. Acta Astronautica, 2004, 55(2): 95-107.

[13] 尚海兵,崔平远,栾恩杰. 地球-火星的燃料最省小推力转移轨道的设计与优化 [J]. 宇航学报,2006,27(6):1168-1171.
SHANG Haibin, CUI Pingyuan, LUAN Enjie. Design and optimization of Earth-Mars optimal-fuel low-thrust trajectory [J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(6): 1168-1171. (in Chinese)