

序列近似优化方法*

胡凡,武泽平,王东辉,张为华

(国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南长沙 410073)

摘要:随着工程优化中仿真模型精度和计算时间的不断提高,常规的智能优化方法难以在可接受的计算代价中得到最优解。序列近似优化方法通过将近似模型技术引入优化过程,并采用不断更新采样点的方法来指导寻优,在基于计算耗时模型的优化中得到了越来越广泛的应用。通过论述序列近似优化方法的若干关键技术及其发展现状,可有效指导其在工程优化中的应用,并给出了序列近似优化方法可能的改进方法及发展趋势。

关键词:序列近似优化;实验设计;近似模型;采样准则;工程优化

中图分类号:V421.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)01-092-10

Sequential approximate optimization method

HU Fan, WU Zeping, WANG Donghui, ZHANG Weihua

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: As more and more high precise time-consuming models are revealed into optimization procedure, general intelligence optimization algorithm cannot get a desirable result in feasible computing cost. The developing sequential approximate optimization approach is aimed to overcome this drawback by introducing the approximate model in the optimization procedure, which adds infill points sequentially to search the promising areas, has made it more and more practical technique for time-consuming engineering optimization. An overview of the sequential approximate optimization algorithm and its core techniques were given, which can expand the application of the algorithm. Finally, some relevant improved methods and new developmental trends concerning SAO(sequential approximate optimization) were presented.

Key words: sequential approximate optimization; design of experiment; approximate model; infill criteria; engineering optimization

随着高性能计算技术的不断提高以及数值计算理论的不完善,飞行器设计等学科分析模型高精度仿真计算为优化设计提供了有利分析工具。然而这类高精度仿真模型直接进行优化设计会带来很严重的问题:耗时模型分析与优化设计大量迭代,使计算代价几乎不可接受。针对此问题,序列近似优化(Sequential Approximate Optimization, SAO)将近似模型技术引入优化过程中,采用计算效率较高的近似模型替代复杂分析模型,并不断对近似模型进行更新,逐步提高近似模型的精度及其对最优解的预测能力。

序列近似优化方法的主要思想是:首先通过试验设计获取样本点,计算样本点的响应值并构造复杂分析模型的近似模型。得到近似模型后,根据当前近似模型,选择有潜力的点,重新调用高精度耗时分析模型计算其输出,并用来指导下一步搜索,使搜索过程逐步逼近全局最优解。

1 序列近似优化方法基本框架

20世纪80年代,Kleijnen首次提出了近似模型的概念^[1],称之为 meta-model 或 surrogate model,并将其应用于工程优化问题,代替优化设计中计算耗时的复杂学科分析模型,以期降低仿真计算成本,提高优化设计效率。之后,序列近似优化方法成为解决计算耗时模型优化的有效途径之一,其关键步骤有实验设计、近似建模和采样点更新等^[2-3]。算法基本流程如图1所示。

实验设计进行采样点的选择,不同设计变量尺度的统一,在采样点运行模型得到模型输出以及为近似建模提供训练样本^[4]。

近似建模阶段分为近似模型的构造(construction)和验证(validation),首先通过插值或拟合技术,根据训练样本对设计空间的输出进行预测;其次最小化验证样本点预测误差进行参

* 收稿日期:2015-09-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51105368)

作者简介:胡凡(1979—),男,吉林吉林人,博士,副研究员,E-mail:hufan_nudt@126.com

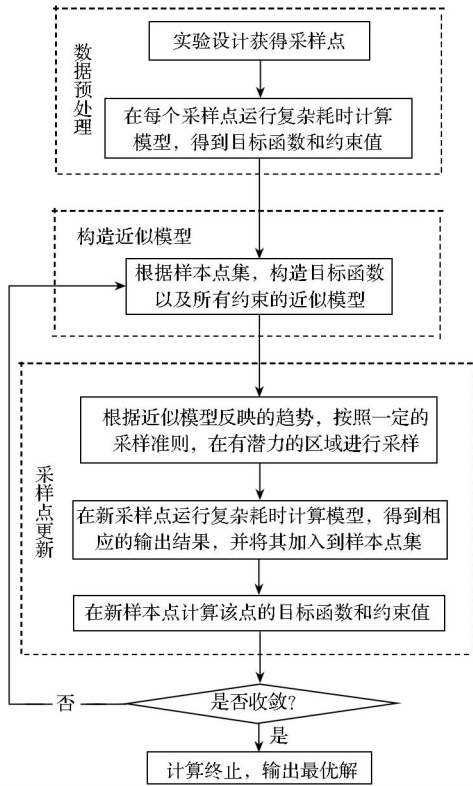


图 1 序列近似优化基本流程图

Fig. 1 Flow chart of sequential approximate optimization

数选优与模型验证。

采样点更新阶段的核心是构造用于下一轮采样的准则 (infill criteria)。该准则确定后可采用一种高效的内优化算法选择下一采样点。

2 实验设计方法

实验设计方法是经典数理统计领域的重要技术^[5-6],1989 年 Sacks 等^[7]将其引入计算机仿真分析模型的采样,指出了经典设计方法对安排计算机仿真采样的不足,提出了实验设计点的充满空间 (space filling) 特性对安排计算机仿真的重要性。

对于序列近似优化,实验设计是其前处理步骤,合理的实验设计手段可以有效选择采样点。目前充满空间的实验设计方法有拉丁超立方设计 (Latin Hypercube Sampling, LHS)^[7-8], Hammersley 序列^[9], 正交列设计 (Orthogonal Arrays, OA)^[10] 和均匀设计 (uniform design)^[11] 等。LHS 对于任意设计变量均能自由设计采样点个数,因此在计算机仿真实验中应用最为广泛^[3, 12]。

LHS 由 McKay 在 1979 年首次提出^[8],其设

计结果为一 $n \times m$ 矩阵,每一行代表输入变量组合,每一列代表变量的是采样值,任意一列均是 $1 \sim n$ 的排列,如图 2 所示。

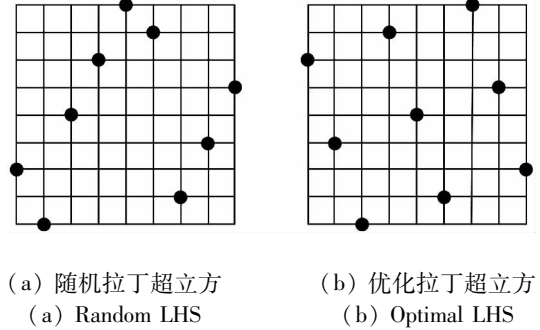


图 2 二维拉丁超立方设计示意图

Fig. 2 Illustration of 2-dimensional LHS

由于基本 LHS 随机排列使 LHS 的充满空间特性难以充分发挥,如图 2(a) 所示,因此大量学者对提升其充满空间性能进行了研究,提出优化的 LHS,如图 2(b) 所示,并构造了一系列表征 LHS 性能的指标^[4, 13]。Shewry^[14] 在 1987 年提出了极大熵准则:

$$\min -\ln |\mathbf{R}| \quad (1)$$

其中 \mathbf{R} 是实验设计采样点的相关系数矩阵,其定义如式(2)所示。

$$R_{i,j} = \exp\left(-\sum_{k=1}^m \theta_k |x_{ik} - x_{jk}|^t\right) \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 < t < 2 \quad (2)$$

其中, m 为设计变量个数, n 为采样点个数。

Johnson^[15] 等在 1990 年提出了极小距离极大化准则:

$$\max \left[\min_{1 \leq i < j \leq n} d(x_i, x_j) \right] \quad (3)$$

其中 $d(x_i, x_j)$ 为采样点 i 与采样点 j 之间的距离。

Morris^[16] 等在 1995 年以极大极小距离为基础提出了 ϕ_p 准则:

$$\min \phi_p = \left[\sum_{i=1}^s d_i^{-p} \right]^{1/p} \quad (4)$$

其中, p 为任意正整数, s 为所有样本点之间距离的总个数,即 C_n^2 。

Tang^[17-18] 在 1993 年提出了基于正交列 (OA-based) 的拉丁超立方设计准则,后来发展成为最小化最大列相关系数准则:

$$\min \left(\max_{1 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \right) \quad (5)$$

其中 ρ_{ij} 为 i 列和 j 列的相关系数。

Hickernell^[19] 在 1998 年提出了中心偏差 (center L_2 - discrepancy) 准则,如式(6) 所示。

$$CL_2 = \left(\frac{13}{12}\right)^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{1}{2} |x_{ij} - 0.5| - \frac{1}{2} |x_{ij} - 0.5|^2\right) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{1}{2} |x_{ij} - 0.5| + \frac{1}{2} |x_{kj} - 0.5| - \frac{1}{2} |x_{ij} - x_{kj}|\right) \quad (6)$$

根据以上建立的表征 LHS 充满空间特性的准则,大量学者通过将其与智能优化方法相结合,对以上指标进行优化,从不同角度得到了优化拉丁超立方设计^[20-29]。

除充满空间特性外,低相关性是较优 LHS 应具备的特征。针对 LHS 的低相关性(正交性),若干特定采样点与设计变量个数可以直接推导得到正交 LHS 设计^[12, 30-34]。Ye^[34] 在 1998 年通过随机排列演化的方法得出 $2m$ 因子 $2^{m+1} + 1$ 或 2^{m+1} (m 为任意正整数)水平的正交拉丁方直接构造方法;2007 年^[35] Cioppa 在此基础上,设计出了 $1 + m + C_m^2$ 因子 $2^{m+1} + 1$ 或 2^{m+1} 水平的正交 LHS;2009 年孙法省^[12, 31] 构造出了可以容纳更多设计因子的正交拉丁超立方设计(2^m 因子 $2^{m+1} + 1$ 或 2^{m+1} 水平)。也有学者对正交 LHS 可直接构造的特性与充满空间特性相结合,在直接正交设计的基础上对其充满空间特性进行改进^[17, 30, 32-33, 36-38]。

3 近似建模方法

近似建模方法的核心是多变量函数逼近^[39-43],典型的近似建模方法有多项式响应面方法^[44-47]、径向基函数方法^[39, 41, 48-49]、Kriging 方法^[50]、支持向量回归方法^[1, 51-54]等。

3.1 多项式响应面

多项式响应面在 1951 年首次被 Box 等提出^[46],是工程设计领域中最早使用的近似模型^[44-45, 47],其形式最简单。工程设计中应用最广泛的是二阶响应面^[55],其模型如(7)所示。

$$\hat{y} = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j + \sum_{j=1}^m \beta_{jj} x_j^2 + \sum_i \sum_j \beta_{ij} x_i x_j \quad (7)$$

其中 $\beta = [\beta_0, \beta_j, \beta_{ij}]$ 为待定系数,当采样点个数大于 $(1 + m + C_m^2)$ 时,可以用最小二乘方法对系数 β 进行估计,计算方法由式(8)给出, $\hat{\beta}$ 为 β 的最小方差无偏估计。

$$\hat{\beta} = [X^T X]^{-1} X^T Y \quad (8)$$

根据 $\hat{\beta}$ 可得整个空间光滑的输出响应。多项式

的光滑性使响应面方法称为处理有误差数据的有效方法。当响应面构造完成后,各变量对输出的影响可以很容易由各系数得出,因此对于高维问题,响应面方法可有效剔除不敏感变量,降低优化难度,对于带误差的模型优化仍然可以迅速收敛^[56]。

响应面在工程优化应用中的不足在于,若模型输出的非线性较强,为了得到较好的近似效果,不得不增加模型的次数,从而导致基函数数目迅速增加,要求更多的训练样本,增加计算成本^[42]。另外,高次多项式由于模型过刚,容易出现过拟合现象(即龙格现象)。因此在实际使用过程中,通常用的响应面模型为低阶的线性或二次响应面。对于非线性较强的模型,学者们研究了 Kriging 模型,基本径向基(Radial Basis Function, RBF)模型和支持向量回归(Support Vector Regression, SVR)模型可以有效解决,下文将对其进行介绍。

3.2 Kriging 方法

Kriging 模型的思想最初是由南非地质学家 Krige 在 1951 年研究矿产储量分布时提出的一种基于最优线性无偏估计(Best Linear Unbiased Estimation, BLUE)近似方法^[50]。其后 Matheron^[57]和 Goldberger^[58]对其数学理论进行了进一步完善。1989 年 Sacks^[59]等将其用于确定性的计算机仿真输入输出关系预测,标志着 Kriging 近似模型理论的形成。

Kriging 模型的核心问题是确定协方差矩阵的系数与权值,系数通常采用极大似然估计法确定,权值通过最小化估计值的误差方差确定^[55]。模型数学表达式如式(9)所示。

$$s(x) = g(x) + z(x) \quad (9)$$

其中: $g(x)$ 为全局近似函数,称为回归项,一般采用零次,一次或二次多项式; $z(x)$ 为随机误差项,其统计特性如式(10)所示。

$$\begin{cases} E[z(x)] = 0 \\ \text{Var}[z(x)] = \sigma^2 \\ E[z(x^i), z(x)] = \sigma^2 R(c, x, x^i) \end{cases} \quad (10)$$

其中, $R(c, x, x^i)$ 是以 c 为参数的相关函数,可以表示为式(11)所示的形式。

$$\begin{cases} R(x^i - x^j) = \prod_{k=1}^n R_k(d_k, c_k) \\ d = x^i - x^j \\ d_k = x_k^i - x_k^j \\ c_k > 0, (k \in [1, n]) \end{cases} \quad (11)$$

较为常用的相关函数模型有指数模型、线性模型和高斯模型等,在相关函数的形式确定了

情况下,任意点 x 处的输出 $f(x)$ 的预测值 $s(x)$ 通过式(12)确定。

$$s(x) = g(x) + \mathbf{r}^T(x)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y} - \beta\mathbf{G}) \quad (12)$$

在上述各项确定后,由于任意一个 c 都能生成一个插值模型,所以 Kriging 模型的关键就是确定模型参数 c ,若将 c 各项取相同值,则模型为各项同性,否则为各向异性,在使用过程中,常常通过极大似然估计参数 c 的取值进行估计。

引入了相关函数的作用后,Kriging 模型具有局部估计的特点,这使其在解决非线性程度较高的问题时容易取得比较理想的拟合效果,大大提升了模型对强非线性模型的预测能力。

3.3 径向基函数方法

1971年 Hardy^[60]首次提出 RBF 插值方法,并将其用于多变量插值。径向基函数方法假设模型输出为基函数的线性组合,通过插值条件下,求解线性方程组得到基函数系数^[61]。基函数以 Euclidean 距离为自变量,很好地将高维空间映射到了一维距离,解决了多变量函数逼近转化为与维度无关的径向函数问题^[39]。

径向基函数方法本质上采用一元函数来对多元函数进行描述,在多变量插值中发挥着重要作用^[8]。径向基插值可以表示为:

$$s(x) = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(r_k) \quad (13)$$

其中: N 为采样点个数; w_k 为每个样本点的权系数; $\varphi_k(r_k)$ 为基函数。其中 r_k 表示某点 x 距中心点 x_k 的距离(通常为欧氏距离),即:

$$r_k = \|x - x_k\| \quad (14)$$

将 x_k 的响应值 y_k 代入式(13),得方程组:

$$s(x_k) = y_k = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(r_{ik}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

其中, $\varphi_k(r_{ik})$ 为基函数,常用的基函数形式有 Gauss 函数和逆多二次函数。

由于基本径向基函数采用插值方法进行逼近,使其在处理确定性问题的近似模型方面有重大优势,在任意样本点处预测误差为零(即近似模型精确经过样本点)。RBF 在一定程度上综合了 Kriging 方法非线性泛化能力强和多项式相应面方法构造简单的优势^[43],成了应用广泛的非线性近似模型之一^[42]。由于径向基函数模型输出非线性基函数的线性组合,因此不可避免地削弱了其低阶近似能力。针对此问题,Fang 提出了基于线性回归修正的 RBF 模型,增加了 RBF 对线

性模型的近似能力^[62]。

径向基函数精确插值的特点,使其处理带有随即噪声的数据时,会造成近似模型严重失真^[63],难以对随即噪声进行过滤。正则化项(即在求解径向基函数权值的系数矩阵加上一对角矩阵)的引入是径向基函数方法能够处理带有随机噪声的数据,其物理意义在考虑模型对样本点的逼近程度的同时增加了模型的光滑性。此方法同样适用于 Kriging 模型对带噪声数据的处理过程。在经典径向基函数的基础上,有学者提出的扩展径向基函数(E-RBF)方法^[64]、各向异性径向基函数^[65]可以有效扩展其适用范围与近似能力。

3.4 支持向量回归

支持向量回归来自于统计学习领域的支持向量机^[53](Support Vector Machine, SVM)。支持向量机是 AT & T Bell 实验室的 Vapnik 在 1995 年提出的一种新的统计学习方法^[66]。

然而,在近似建模领域,更倾向于认为支持向量回归是 Kriging 模型和径向基模型的一种推广^[51-52, 67-68]。SVR 在近似模型中最重要的贡献是引入了不敏感度损失带(ε -不敏感损失带),认为处于 ε -不敏感损失带内的点预测误差为零,如图3所示,很好地处理了带有随机噪声的训练样本的过滤问题,并通过边界支持向量的选择,保证了样本的稀疏性。

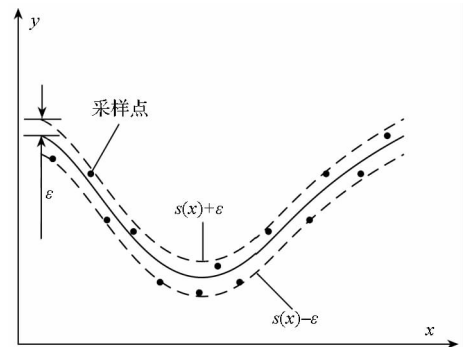


图3 ε -不敏感带示意图

Fig. 3 Illustration of ε -loss margin

同 Kriging 方法和径向基函数方法一样,支持向量回归的基本数学模型也是核函数的线性组合与一个常数偏置项的叠加^[2]。与上述方法的不同之处在于求解方法,Kriging 方法通过最优线性无偏估计的方式进行求解,径向基函数通过插值条件来求解,二支持向量回归通过最优间隔超平面转化为二次规划方法来求解。在支持向量回归模型中, ε 的选取、边界支持向量的识别以及核宽度的确定是支持向量回归的核心技术难点^[69]。

进化算法的不断发展对支持向量参数的选择起到了明显的促进作用^[70]。

4 加点准则

序列近似优化中,当近似模型构造完成后,即可进行基于近似模型的优化分析。由于初始样本点不能保证近似模型对最优解预测的正确性,因此在优化过程中需要通过加入新的采样点(infill points)对其进行进一步的验证^[2, 71],同时可以有效指导下一步的优化。

加点准则的核心是构造一个用于选择下一样本点的优化问题。根据这一思想,逐步发展形成了开发准则(exploitation)^[72-73]、探索准则(exploration)和平衡准则(balance)。

4.1 开发准则

开发准则与经典优化中的局部搜索类似,其目的是基于当前的近似模型,在最有潜力的区域进行加点后更精确的近似模型指导后续优化过程,而不关心全局的近似模型精度。开发准则的应用能使算法迅速收敛到局部极值,对单峰问题,有很好的计算效率,其局限性在于难以跳出局部极值进行全局搜索^[2]。常用的开发准则有潜在最优点准则(最优化代理模型)^[74-75]和信赖域准则^[72]。

潜在最优点准则通过最优化当前近似模型,得到近似模型的最优解,并将其作为新的样本点,运行高精度复杂分析模型后,将其结果加入到近似模型的训练样本中,构造新的近似模型,进行下一轮迭代,直到收敛条件满足^[74],其加点问题为:

$$\min s(x) \quad (16)$$

其中 $s(x)$ 为近似模型的输出。

Alexandrov 在 1998 年提出信赖域准则,并证明了该方法能从任意初始点收敛到局部极值的特性^[72]。信赖域方法从任意初始点开始搜索,在该点的 δ 邻域(即信赖域)内搜索近似模型的最优值,并将该最优值作为下一个样本点更新近似模型。同时根据信赖域更新准则,对信赖域进行缩放和移动,使算法逐步向最优解搜索,直到算法收敛。其加点问题构造方法如式(17)所示。

$$\begin{cases} \min s(x) \\ \text{s. t. } x \in \|\tilde{x}_{\text{opt}} - \delta\| \end{cases} \quad (17)$$

其中 \tilde{x}_{opt} 为当前最优样本点。

4.2 探索准则

探索准则旨在对未采样(采样点稀疏)区域进行采样,以期提升近似模型全局近似能力。此

时加点本质上是进行充满空间采样。最简单直接的方法是采样各种拟随机序列^[76-77]进行采样,无法避免在采样点密集区域重复采样计算^[2],导致计算资源的浪费。

为了保证良好的充满空间性能,进行优化拉丁超立方设计的各准则用于添加新采样点是探索未采样区域的有效手段之一。例如:极大化极小距离、极大化熵、极大化中心 L_2 偏差和极大近似模型曲率准则^[78]、极小样本密度^[79-80]等准则。Kim 等^[81]将实验设计方法应用于序列采样探索,不断获取可行解,扩大可行解区域,有效提高了全局寻优能力。针对近似模型和近似误差,可采用最大化预测方差作为新样本点^[82]。

4.3 平衡准则

开发准则注重局部寻优能力,探索准则注重全局近似,一种好的优化算法应同时具备以上两种能力。平衡准则根据问题特点,对局部和全局寻优能力进行折中,寻求一种既具备全局探索能力,又可以适时地进行局部寻优的加点准则^[83],是一种更有效、更实用的加点准则。

Jones^[83]提出的期望提升(Expected Improvement, EI)准则是目前使用最广泛的平衡准则之一。EI 准则首先构造一个提高概率(probability of improvement)函数,并基于此函数,再进一步通过积分得到期望提高(expected improvement)值。在设计空间内搜索期望提高最大的点作为下一个采样点。由于 EI 准则分两步进行采样,因此也称两阶段加点准则。除两阶段准则外,一阶段准则根据近似模型的预测方差,构造一个条件似然函数,将此条件似然函数最大化作为新的样本点产生准则,该准则跳出局部最优的能力在一定程度上强于二阶段准则。

一阶段和两阶段准则均依赖于近似模型的预测方差,Wang^[84-85]等提出了一种不依赖于近似模型预测误差的采样点准则,该准则将极小距离极大化准则与潜在最优点准则结合,在潜在最优搜索的基础上加入极小距离约束,并在优化过程中自适应调整约束范围使算法收敛于全局最优。Parr 等^[86]提出了多目标准则,将全局探索指标和局部寻优指标结合,构造了多目标优化问题,同时增加全局和局部优化能力。

另一方面,由于智能优化具有很好的全局探索能力,将智能算法的搜索机制用于序列近似优化已经成为近年来研究的热点^[87-91],此类方法对中等复杂度计算模型有很好的效果,但对于高复

杂度模型的优化,计算代价仍然是不可承受的。

5 内优化算法

序列近似优化的内优化是对加点准则构造的优化问题求解。在此阶段,目标和约束变量均采用具有解析表达式的近似模型,计算速度快,此时大量迭代计算也几乎不消耗计算资源。因此主流智能优化方法(遗传算法、粒子群算法、差分进化算法、和声搜索算法^[92-95]等)均可得到较好的效果。

遗传算法(Genetic Algorithm, GA)通过模拟自然界生物进化过程中优胜劣汰的模式,通过一定遗传、变异和选择等操作步骤的迭代搜索全局最优解。1975年Holland首次提出GA的概念,并对遗传算法的基本理论进行了详细的阐释,对遗传算法的发展产生了深远影响。遗传算法是发展较早的智能优化方法,相应的数学理论最为完善,证明了最优个体保存遗传算法具有以概率1收敛于全局最优的性能。

编码方式、选择算子、交叉算子和变异算子的设计是遗传算法的核心,常用的编码方式有二进制编码、实数编码和顺序编码;选择算子设计的基本思想是个体的复制概率与其适应值正相关;交叉是利用选择算子得到的父代产生相应的子代;变异算子引入的目的是为了避免陷入局部极值和保持种群多样性。

粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)是由Kennedy和Eberhart于1995年提出的一种启发式全局优化技术。通过对鸟类觅食过程中,随机而又有秩序的飞行行为进行抽象,采用不同粒子之间相互协作搜索的方式进行全局寻优。在PSO中,每个粒子相当于鸟群中的一个个体,通过对个体极值与群体极值的追踪以及个体极值、群体极值更新的迭代操作,最终使所有粒子都向全局最优点聚集。

最初由Kennedy和Eberhart提出的方法称为基本粒子群算法,经过引入了惯性权重形成了标准粒子群算法^[96],以及后续学者对其的改进形成了大量的改进粒子群算法,改进工作都集中于对惯性权重 w ,自身学习因子 c_1 与全局学习因子 c_2 这三个参数的自适应调整,主要改进方法如下:①经验参数 $w = 0.8$, $c_1 = c_2 = 2$ ^[96];②参数随机化^[97];③线性调整参数^[97];④非线性调整参数^[98];⑤参数自适应调整^[99]。

差分进化算法(Differential Evolution, DE)于1995年由Storn和Price提出^[100],是一种新颖的

通过引入独特的差分变异模式进行迭代搜索的进化算法。该方法因具有简单、易实现、高效、鲁棒性强、参数设置少等各方面的优点,已被广泛和成功地应用于全局优化、运筹管理、工程设计等领域^[101]。除种群大小这一共同参数外,DE算法具有两个主要的控制参数^[100]:变异缩放因子 F 和交叉概率 P_{CR} 。因此,对DE算法的研究也主要集中于参数设置与自适应调整。

参数自适应调整的方法主要分为以下几类:①参数随机化;②参数自学习;③参数进化。参数随机化方法通过按照一定随机数生成规则,在每代进化前对 F 和 P_{CR} 进行随机化设置以增加算法的全局探索能力,代表性的方法有DERSF^[102], DERL^[103]和NSDE等;参数自学习方法通过对进化过程中参数与进化能力的关系,学习得到下一代的参数,代表性的方法有SADE^[104], SaNSDE和JADE^[105]等;参数进化方法通过将参数编码到进化个体中,随着种群的进化,更有利于进化参数设置随着个体的保留被保留下来,代表性的方法有SPDE, SDE和jDE等。

和声搜索(Harmony Search, HS)算法是2001年韩国学者Geem^[106]等提出的一种新颖的智能优化算法。算法模拟了音乐创作中乐师们凭借自己的记忆,通过反复调整乐队中各乐器的音调,最终达到一个美妙的和声状态的过程。HS算法将乐器声调的和声类比于优化问题的解向量,评价即是各对应的目标函数值。

在基本和声搜索算法中,每个和声代表问题的一个解(即一个 n 维实数向量),搜索过程中用到的关键参数有和声记忆库大小(Harmony Memory Size, HMS)、记忆库保留概率(Harmony Memory Consideration Rate, HMCR)、记忆库扰动概率(Pitch Adjusting Rate, PAR)、扰动距离(distance BandWidth, BW)以及最大适应度评估次数等。合理设置上述参数对算法的搜索精度和效率均有重要的影响。算法首先随机产生HMS初始解并将其存储在和声记忆库中,然后根据保留记忆库、扰动记忆库和重置变量三种规则产生备选和声,若备选和声劣于和声记忆库中的最劣和声,则用备选和声替换记忆库中的最劣解,更新和声记忆库;否则,重新按照上述方法产生备选和声。在基本和声搜索算法的基础上,针对各参数的自适应调整策略提出的改进版本有:IHS算法^[107]、GHS算法、SGHS算法^[108]、NGHS算法^[95]、IGHS算法^[93]、OHS算法^[92, 94]等。

6 结论

序列近似优化方法是针对复杂耗时模型优化设计的有效手段,能显著降低复杂模型调用次数,在可接受的计算代价下给出近似最优解,在工程优化中已经得到了广泛的重视与应用^[79, 85, 109-111],另外由于近似模型可以对整个设计空间的输入输出关系进行预测,尤其是对于最优解附近可以进行高精度的预测(各阶导数也可以进行高精度逼近),因此可以有效扩展到可靠性、鲁棒性设计等领域^[112-113]。同时,对设计结果的灵敏度分析等,也能根据最终的近似模型进行快速分析。

目前序列近似优化方法仍然存在明显的局限,比如对离散问题的研究较少,对 20 维以上的高维连续优化问题也难以获得满意的结果等,因此还有很大的改进与发展空间。本文在此列出若干(但不限于)可能的改进途径及发展趋势。

1) 实验设计方法:目前的实验设计方法(包括经典的析因设计、中心复合设计和正交设计以及拉丁超立方设计等)考察的均是高维矩形域内相应变量与输入变量之间的关系,但在实际工程应用中,给定的矩形域往往存在很大的不可行空间,即相应的输入不会得到输出,对于此类情况,若再采用已有方法进行设计,会造成大量设计点的浪费,而优化拉丁超立方设计构造的计算量与设计点个数呈指数增长趋势,因此对非矩形域的实验设计直接构造的研究对于多约束(尤其是可行域远小于不可行域)问题可以大量减少计算量。

2) 近似模型:目前广泛采用的 RBF, SVR 和 Kriging 方法均将高维函数逼近转化为以径向距离为自变量的一维函数逼近。此种方法对于低维问题,可以得到很好的效果,但由于高维空间中以距离来衡量,样本点会特别稀疏,少量的样本点无法对模型输出进行合理的预测。因此,高维高精度近似模型的研究对拓宽序列近似优化方法在高维问题优化中的应用有重要意义。此外,为了解决高维问题的优化,也可将数据降维技术引入序列近似优化,以扩展该方法的应用。

3) 采样点更新阶段:采样点更新策略是序列近似优化最核心的技术。目前对于单点更新方法已经有较好的理论研究也得到了一定的应用。为了适应分布式计算的发展以及进一步提高优化设计效率,并行加点准则是必须解决的问题,同时,在并行加点过程中,如何把握探索准则与开发准

则的平衡是并行加点准则的关键,然而目前对此研究相当缺乏。

4) 序列近似优化的应用研究:序列近似优化方法可以利用极少的模型调用搜索到模型最优解。但在工程问题的应用中,存在诸多制约因素。例如:近似模型构造过程中,基函数均是光滑函数,而现实问题中往往存在目标函数或者约束函数不光滑甚至不连续的情况,对于此类问题,目前尚无有效办法。另外,目前的序列近似优化方法仅对连续变量优化有很好的效果,以及少量整数变量优化的研究^[114-115],而实际工程应用中,设计变量形式较多,这也造成了序列近似优化方法的应用局限。

可以预期,随着研究的进一步深入,序列近似优化方法将会成为一种更通用更高效的工程优化方法,能够有效解决复杂、耗时模型的优化设计。

参考文献 (References)

- [1] Thode H C. Statistical tools for simulation practitioners[J]. *Technometrics*, 1988, 30(4): 1157-1161.
- [2] Forrester A I J, Keane A J. Recent advances in surrogate-based optimization [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2009, 45(1/2/3): 50-79.
- [3] Queipo N V, Haftka R T, Shyy W, et al. Surrogate-based analysis and optimization [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2005, 41(1): 1-28.
- [4] Simpson T W, Lin D K J, Chen W. Sampling strategies for computer experiments design and analysis [J]. *International Journal of Reliability and Applications*, 2001, 2(3): 209-240.
- [5] 赵选民. 试验设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [6] ZHAO Xuanmin. Methodologies of experiment design [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [7] Audze P, Eglais V. New approach for planning out of experiments [J]. *Problems of Dynamics and Strengths*, 1977, 35: 104-107.
- [8] Sacks J, Welch W J, Mitchell T J, et al. Design and analysis of computer experiments [J]. *Statistical Science*, 1989, 4(4): 409-435.
- [9] Mckay M D, Beckman R J, Conover W J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code [J]. *Technometrics*, 1979, 2(21): 239-245.
- [10] Kalagnanam J R, Diwekar U M. An efficient sampling technique for off-line quality control [J]. *Technometrics*, 1997, 3(39): 308-319.
- [11] Owen A B. Orthogonal arrays for computer experiment, integration and visualization [J]. *Statistica Sinica*, 1992(2): 439-452.
- [12] Fang K T, Lin D K J, Winker P, et al. Uniform design: theory and application [J]. *Technometrics*, 2000, 42(3): 237-248.
- [13] 孙法省. 模型未知下试验设计的构造[D]. 天津:南开大学, 2010.
- [14] SUN Fasheng. Construction of experimental designs under

- model uncertainty [D]. Tianjing: Nankai University, 2010. (in Chinese)
- [13] Sacks J, Welch W J, Mitchell T J, et al. Design and analysis of computer experiments [J]. *Asta Advances in Statistical Analysis*, 1989, 94(4): 307–309.
- [14] Shewry M C, Wynn H P. Maximum entropy sampling [J]. *Journal of Applied Statistics*, 1987, 14(2): 165–170.
- [15] Johnson M E, Moore L E, Ylvisaker D. Minimax and maximin distance design [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 1990, 26(2): 131–148.
- [16] Morris M D, Mitchell T J. Exploratory designs for computational experiments [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 1995, 43(3): 381–402.
- [17] Tang B X. A theorem for selecting oa-based Latin hypercubes using a distance criterion [J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1994, 23(7): 2047–2058.
- [18] Tang B. Orthogonal array-based Latin hypercubes [J]. *Journal of American Statistical Association*, 1993, 88(424): 1392–1397.
- [19] Hickernell F J. A generalized discrepancy and quadrature error bound [J]. *Mathematics of Computation*, 1998, 67(221): 299–322.
- [20] Park J S. Optimal Latin-hypercube designs for computer experiments [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 1994, 39(1): 95–111.
- [21] Ye K Q, Li W, Sudjianto A. Algorithmic construction of optimal symmetric latin hypercube designs [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2000, 90(1): 145–159.
- [22] Fang K T, Ma C X, Winker P. Centered L_2 - discrepancy of random sampling and Latin hypercube design and construction of uniform designs [J]. *Mathematics of Computation*, 2002, 71(237): 275–296.
- [23] Jin R C, Chen W, Sudjianto A. An efficient algorithm for constructing optimal design of computer experiments [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2005, 134(1): 268–287.
- [24] Liefvendahl M, Stocki R. A study on algorithms for optimization of Latin hypercubes [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2006, 136(9): 3231–3247.
- [25] van Dam E, Husslage B, den Hertog D. Maximin Latin hypercube designs in two dimensions [J]. *Operations Research*, 2007, 55(1): 158–169.
- [26] Grosso A, Jamali A, Locatelli M. Finding maximin Latin hypercube designs by iterated local search heuristics [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 197(2): 541–547.
- [27] Viana F A C, Venter G, Balabanov V. An algorithm for fast optimal Latin hypercube design of experiments [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 82(2): 135–156.
- [28] Zhu H, Liu L, Long T, et al. A novel algorithm of maximin Latin hypercube design using successive local enumeration [J]. *Engineering Optimization*, 2011, 44(5): 551–564.
- [29] Pholdee N, Bureerat S. An efficient optimum Latin hypercube sampling technique based on sequencing optimisation using simulated annealing [J]. *International Journal of Systems Science*, 2015, 46(10): 1780–1789.
- [30] Ai M Y, He Y Z, Liu S M. Some new classes of orthogonal Latin hypercube designs [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2012, 142(10): 2809–2818.
- [31] Sun F S, Liu M Q, Lin D K J. Construction of orthogonal Latin hypercube designs [J]. *Biometrika*, 2009, 140(4): 971–974.
- [32] Georgiou S D. Orthogonal Latin hypercube designs from generalized orthogonal designs [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2009, 139(4): 1530–1540.
- [33] Prescott P. Orthogonal-column Latin hypercube designs with small samples [J]. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2009, 53(4): 1191–1200.
- [34] Ye K Q. Orthogonal column Latin hypercubes and their application in computer experiments [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1998, 93(444): 1430–1439.
- [35] Cioppa T M, Lucas T W. Efficient nearly orthogonal and space-filling Latin hypercubes [J]. *Technometrics*, 2007, 49(1): 45–55.
- [36] Nguyen N, Lin D K J. A note on near-orthogonal Latin hypercubes with good space-filling properties [J]. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 2012, 6(3): 492–500.
- [37] Moon H, Dean A, Santner T. Algorithms for generating maximin Latin hypercube and orthogonal designs [J]. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 2011, 5(1): 81–98.
- [38] Georgiou S D. Orthogonal designs for computer experiments [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2011, 141(4): 1519–1525.
- [39] Buhmann M D. Radial basis functions [J]. *Acta Numerica*, 2000, 9(228): 1–38.
- [40] Haykin S. *Neural networks: a comprehensive foundation* [M]. USA: Macmillan College Publishing Company, 1994: 236–384.
- [41] Park J, Sandberg I W. Approximation and radial-basis-function networks [J]. *Neural Computation*, 1993, 5(2): 305–316.
- [42] Jin R, Chen W, Simpson T W. Comparative studies of metamodeling techniques under multiple modeling criteria [J]. *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 23(1): 1–13.
- [43] Wang G G, Shan S. Review of metamodeling techniques in support of engineering design optimization [J]. *ASME Transactions, Journal of Mechanical design*, 2007, 129: 370–380.
- [44] Unal R, Lepsch R A, Englund W, et al. Approximation model building and multidisciplinary design optimization using response surface methods [C] // Proceedings of 6th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, AIAA 96–4044, 1996.
- [45] Venter G, Haftka R T, Starnes J H, Jr. Construction of response surfaces for design optimization applications [C] // Proceedings of 6th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, AIAA 96–4040, 1996.
- [46] Box G E P, Wilson K B. On the experimental attainment of optimal conditions [J]. *Journal of Royal Statistical Society*, 1951, 13(1): 1–45.
- [47] Chen W, Allen J K, Mavris D, et al. A concept exploration method for determining robust top-level specifications [J]. *Engineering Optimization*, 1996, 26(2): 137–158.
- [48] Schwenker F, Kestler H A, Palm G. Three learning phases for radial-basis-function networks [J]. *Neural Networks*, 2001, 14(4/5): 439–458.
- [49] Park J, Sandberg I W. Universal approximation using radial-

- basis-function networks [J]. *Neural Computation*, 1991, 3(2): 246–257.
- [50] Kleijnen J P C. Kriging metamodeling in simulation: a review[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 192(3): 707–716.
- [51] Scholkopf B, Sung K K, Burges C J C, et al. Comparing support vector machines with Gaussian kernels to radial basis function classifiers [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 45(11): 2758–2765.
- [52] Evgeniou T, Pontil M, Poggio T. Regularization networks and support vector machines [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2000, 13(1): 1–50.
- [53] Basak D, Pal S, Patranabis D C. Support vector regression[J]. *Neural Information Processing*, 2007, 11(10): 203–224.
- [54] Suykens J A K, De Brabanter J, Lukas L, et al. Weighted least squares support vector machines: robustness and sparse approximation[J]. *Neurocomputing*, 2002, 48(1/2/3/4): 85–105.
- [55] 赫显姆. 多学科设计优化中智能算法与近似模型研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2011.
Hesham G M I. Research on intelligent algorithms and approximation models to multidisciplinary design optimization[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2011. (in Chinese)
- [56] Giunta A A, Dudley J M, Narducci R, et al. Noisy aerodynamic response and smooth approximation in HSC design [R]. *Noisy Aerodynamic Response and Smooth Approximations in HSC Design*, 1994.
- [57] Mahteron G. Principles of geostatistics [J]. *Economic geology*, 1963(58): 1246.
- [58] Goldberger A S. Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1962, 57(298): 369–375.
- [59] Sacks J, Welch W J, Wynn H P, et al. Design and analysis of computer experiments [J]. *Statistical Science*, 1989, 4(4): 433–435.
- [60] Hardy L R. Multi-quadratic equations of topography and other irregular surfaces [J]. *Journal of Geophysical Research*, 1971, 76(8): 1905–1915.
- [61] 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
WU Zongmin. Models, methods and theories for scattered data fitting[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)
- [62] Fang H, Horstemeyer M F. Global response approximation with radial basis functions [J]. *Engineering Optimization*, 2006, 38(4): 407–424.
- [63] Orr M J L. Regularization in the selection of radial basis function centers [J]. *Neural Computation*, 1995, 7(3): 606–623.
- [64] Mullur A A, Messac A. Extended radial basis functions: more flexible and effective metamodeling[J]. *AIAA Journal*, 2005, 43(6): 1305–1306.
- [65] Billings S A, Wei H, Balikhin M A. Generalized multiscale radial basis function networks[J]. *Neural Networks*, 2007, 20(10): 1081–1094.
- [66] Vapnik V. The nature of statistical learning theory[M]. New York, USA: Springer, 1995.
- [67] An W S, Sun Y G. An equivalence between SILF-SVR and ordinary kriging [J]. *Neural Processing Letters*, 2006, 23(2): 133–141.
- [68] Girosi F. An equivalence between sparse approximation and support vector machines [J]. *Neural Computation*, 1997, 10(6): 1455–1480.
- [69] Suykens J A K, Vandewalle J. Least squares support vector machine classifiers [J]. *Neural Processing Letters*, 1999, 9(3): 293–300.
- [70] 孙德山. 支持向量机分类与回归方法研究[D]. 长沙:中南大学, 2004.
SUN Deshan. The researches on support vector machine classification and regression methods [D]. Changsha: Central South University, 2004. (in Chinese)
- [71] 武泽平. 序列近似优化方法及其应用研究[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2013.
WU Zeping. Study on sequential approximate optimization and its application [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2013. (in Chinese)
- [72] Alexandrov N, Dennis J E, Lewis R M, et al. A trust region framework for managing the use of approximation models in optimization [J]. *Structural optimization*, 1998, 15(1): 16–23.
- [73] Haftka R T. Combining global and local approximations[J]. *AIAA Journal*, 1991, 29(9): 1523–1525.
- [74] Hastie T, Tibshirani R, Friedman J. The elements of statistical learning[M]. New York, USA: Springer, 2001.
- [75] Turner C J, Campbell M I, Crawford R H, et al. Generic sequential sampling for metamodel approximations[R]. USA: Chicago Illinois, 2003.
- [76] Bratley P, Fox B L. Algorithm 659: implementing sobol's quasi random sequence generator [J]. *ACM Transaction on mathematics and Software*, 1988, 14(1): 88–100.
- [77] 朱平. 拟蒙特卡罗(洛)方法的若干研究与应用[D]. 杭州:浙江大学, 2010.
ZHU Ping. The studies and applications on quasi Monte Carlo methods [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2010. (in Chinese)
- [78] Wei X, Wu Y Z, Chen L P. A new sequential optimal sampling method for radial basis functions [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(19): 9635–9646.
- [79] Kitayama S, Onuki R, Yamazaki K. Warpage reduction with variable pressure profile in plastic injection molding via sequential approximate optimization [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2014, 72(5): 827–838.
- [80] Kitayama S, Arakawa M, Yamazaki K. Sequential approximate optimization using radial basis function network for engineering optimization [J]. *Optimization and Engineering*, 2011, 12(4): 535–557.
- [81] Kim D W, Lee J. An improvement of Kriging based sequential approximate optimization method via extended use of design of experiments [J]. *Engineering Optimization*, 2010, 42(12): 1133–1149.
- [82] Kleijnen J P C, van Beers W, van Nieuwenhuysse I. Constrained optimization in expensive simulation: novel approach [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 202(1): 164–174.
- [83] Jones D R. A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces [J]. *Journal of Global Optimization*, 2001, 21(4): 345–383.

- [84] Wang D H, Hu F, Ma Z Y, et al. A CAD/CAE integrated framework for structural design optimization using sequential approximation optimization [J]. *Advances in Engineering Software*, 2014, 76: 56–68.
- [85] Wang D H, Wu Z P, Fei Y, et al. Structural design employing a sequential approximation optimization approach[J]. *Computers & Structures*, 2014, 134: 75–87.
- [86] Parr J M, Keane A J, Forrester A I J, et al. Infill sampling criteria for surrogate-based optimization with constraint handling [J]. *Engineering Optimization*, 2012, 44 (10): 1147–1166.
- [87] Sun C L, Jin Y C, Zeng J C, et al. A two-layer surrogate-assisted particle swarm optimization algorithm [J]. *Soft Computing*, 2015, 19(6): 1461–1475.
- [88] Liu B, Zhang Q F, Gielen G G E. A Gaussian process surrogate model assisted evolutionary algorithm for medium scale expensive optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(2): 180–192.
- [89] Viana FA C, Haftka R T, Watson L T. Efficient global optimization algorithm assisted by multiple surrogate techniques [J]. *Journal of Global Optimization*, 2013, 56(2): 669–689.
- [90] Mitra K. Evolutionary surrogate optimization of an industrial sintering process[J]. *Materials and Manufacturing Processes*, 2013, 28(7): 768–775.
- [91] Luo C T, Zhang S L, Wang C, et al. A metamodel-assisted evolutionary algorithm for expensive optimization[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 236(5): 759–764.
- [92] Xiang W L, An M Q, Li Y Z, et al. An improved global-best harmony search algorithm for faster optimization[J]. *Expert Systems with Applications*, 2014, 41(13): 5788–5803.
- [93] Valian E, Tavakoli S, Mohanna S. An intelligent global harmony search approach to continuous optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 232: 670–684.
- [94] Banerjee A, Mukherjee V, Ghoshal S P. An opposition-based harmony search algorithm for engineering optimization problems[J]. *Ain Shams Engineering Journal*, 2014, 5(1): 85–101.
- [95] Hasan B H F, Abu Doush I, Al Maghayreh E, et al. Hybridizing harmony search algorithm with different mutation operators for continuous problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 232: 1166–1182.
- [96] Shi Y H, Eberhart R C. A modified particle swarm optimizer[C]//*Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, 1998: 69–73.
- [97] Eberhart R C, Shi Y H. Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms [C]//*Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*, 2001.
- [98] Chatterjee A, Siarry P. Nonlinear inertia weight variation for dynamic adaption in particle swarm optimization [J]. *Computer and Operations Research*, 2006, 33(3): 859–871.
- [99] Nickabadi A, Ebadzadeh M M, Safabakhsh R. A novel particle swarm optimization algorithm with adaptive inertia weight [J]. *Applied Soft Computing*, 2011, 11(4): 3658–3670.
- [100] Storn R, Price K. Differential evolution: a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. *Journal of Global Optimization*, 1997, 11(4): 341–359.
- [101] 杨振宇, 唐珂. 差分进化算法参数控制与适应策略综述[J]. *智能系统学报*, 2011, 6(5): 415–423.
YANG Zhenyu, TANG Ke. An overview of parameter control and adaptation strategies in differential evolution algorithm[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2011, 6(5): 415–423. (in Chinese)
- [102] Das S, Konar A, Chakraborty U K. Two improved differential evolution schemes for faster global search[C]//*Proceedings of the 7th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*, 2005: 991–998.
- [103] Kaelo P, Ali M M. A numerical study of some modified differential evolution algorithms [J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 169(3): 1176–1184.
- [104] Qin A K, Huang V L, Suganthan P N. Differential evolution algorithm with strategy adaptation for global numerical optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(2): 398–417.
- [105] Zhang J Q, Sanderson A C. JADE: adaptive differential evolution with optimal external archive [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(5): 945–958.
- [106] Geem Z W, Kim J H, Loganathan G V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search [J]. *Simulation*, 2001, 76(2): 60–68.
- [107] Mahdavi M, Fesanghary M, Damangir E. An improved harmony search algorithm for solving optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 188(2): 1567–1579.
- [108] Pan Q K, Suganthan P N, Tasgetiren M F, et al. A self-adaptive global best harmony search algorithm for continuous optimization problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216(3): 830–848.
- [109] Okada M, Kitayama S, Kawamoto K, et al. Determination of back-pressure profile for forward extrusion using sequential approximate optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 51(1): 225–237.
- [110] Dalle D J, Torrez S M, Driscoll J F, et al. Minimum-fuel ascent of a hypersonic vehicle using surrogate optimization[J]. *Journal of Aircraft*, 2014, 51(6): 1973–1986.
- [111] Arias-Montano A, Coello C C A, Mezura-Montes E. Multi-objective airfoil shape optimization using a multiple-surrogate approach[C]//*Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 2012.
- [112] Chen Z Z, Peng S P, Li X K, et al. An important boundary sampling method for reliability-based design optimization using kriging model [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 52(1): 55–70.
- [113] Kitayama S, Yamazaki K. Sequential approximate robust design optimization using radial basis function network[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2014, 10(3): 313–328.
- [114] Müller J, Shoemaker C A, Piché R. SO-MI: a surrogate model algorithm for computationally expensive nonlinear mixed-integer black-box global optimization problems [J]. *Computers & Operations Research*, 2013, 40(5): 1383–1400.
- [115] Kitayama S, Arakawa M, Yamazaki K. Sequential approximate optimization for discrete design variable problems using radial basis function network[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 219(8): 4143–4156.