

方差全局灵敏度求解的空间分割结合无迹变换方法*

员婉莹,吕震宙,赵录峰

(西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

摘要:为有效计算基于方差的全局灵敏度指标尤其是非线性程度较高的响应函数的,将积分空间的可加性以及无迹变换结合起来,利用函数在子空间内非线性程度会降低以及无迹变换方法在概率空间内对低非线性函数性质具有强捕捉能力的特点,提出计算基于方差的全局灵敏度指标的高效方法。该方法只需产生一组无迹变换样本就可以近似求得各阶灵敏度指标,并且该近似解随空间分割个数的增加而收敛于真值。通过非线性程度较高的验证算例及工程算例验证了所提方法在处理非线性功能函数上的高效性和准确性。

关键词:全局灵敏度;空间分割;无迹变换;高度非线性

中图分类号:TB114.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)01-166-08

An efficient method for variance-based global sensitivity analysis by combination of space-partition and unscented transformation

YUN Wanying, LYU Zhenzhou, ZHAO Lufeng

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In order to efficiently and accurately estimate the variance-based global sensitivity indices, especially for highly nonlinear response functions, a new method was proposed by combining the additive property of integration region and the UT (unscented transformation). Because the nonlinearity of response function is reduced in the local sub-space, in which the UT can explore the probability space very efficiently, the proposed method can estimate the variance-based sensitivity indices effectively. Moreover, the proposed method can estimate all the indices by using the same set of UT samples, and the approximate solution converges to the actual value with the increased number of divided sub-space. The results of the nonlinear test example and the engineering example illustrate the efficiency and accuracy of the proposed method.

Key words: global sensitivity; space-partition; unscented transformation; high nonlinearity

灵敏度分析主要研究的是:模型的输出不确定性是如何分配到输入不确定性的^[1]。通常,灵敏度被分为局部灵敏度和全局灵敏度。前者主要研究的是输入变量固定在确定值时对输出响应不确定性的影响程度,而后者研究的是输入变量在其整个取值域的不确定性对输出响应不确定性的影响程度。很明显,全局灵敏度更具有实际应用的潜能,并且已经应用到了很多领域,如:风险分析^[1-2]、结构安全^[3]和环境工程^[4]等。目前,全局灵敏度的度量模型主要分为三类:非参模型(相关系数模型)^[5]、基于方差的模型^[6-8]、矩独立模型^[9-11]。在众多模型中,基于方差的模型(又称 Sobol 指标)应用最为广泛,它由 Sobol 和 Saltelli 等提出,满足“全局性、可量化性、模型独立性”。在基于方差的全局灵敏度指标的求解中,最关键的是精确地求解无条件条件和条件方差,即

二阶中心矩。目前,求矩的方法很难精确地求解非线性程度很高的功能函数的矩,如三点估计法^[12]、标准无迹变换(Unscented Transformation, UT)^[13]以及高阶 UT^[14]。尽管蒙特卡洛数值模拟法(Monte Carlo Simulation, MCS)和稀疏网格法(Sparse Grid numerical Integration, SGI)^[15]可以计算非线性程度很高的功能函数的二阶中心距,但是需要的成本很高,因此本文提出空间分割(Space-Partition, SP)和 UT 结合的思想,利用子空间内函数的非线性程度的降低以及 UT 对低非线性程度函数性质捕捉能力强的特点,高效精确地计算功能函数的二阶中心距。

文献[16]中提出了空间划分的思想来求解基于方差的全局灵敏度指标,该方法的优越性是利用一组随机样本来求解所有输入变量的各阶灵敏度指标。本文在该方法的基础上建立了高效的

* 收稿日期:2015-06-02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51475370);高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20116102110003)

作者简介:员婉莹(1992—),女,陕西渭南人,博士研究生,wanying_yun@163.com;

吕震宙(通信作者),女,教授,博士,博士生导师,zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

灵敏度分析方法,所建立的方法只需利用一组子空间划分即可求得所有输入变量的各阶灵敏度指标。与文献[16]方法相比,本文方法并没有采用随机抽样的思想,因而其结果不存在随机性,并且所建立的方法随子空间数的增加而收敛于真值。

1 无迹变换

UT方法首先根据概率分布的一些特征,如均值、协方差等来确定地产生一组 Sigma 点以及相应的权值。其次,将 Sigma 点代入到非线性函数中,得到变换的样本点,这些变换后的 Sigma 点可以用来估计非线性函数的均值和协方差,文献[17]给出了 UT 的具体过程。低阶 UT 在仅匹配先验状态的均值和协方差的情况下,对非线性函数 $Y = g(X)$ 的均值和协方差的估计

参考文献[19]给出了标准 UT 的 Sigma 点和相应权值的产生方式:

$$s_0 = \bar{X} \quad (1)$$

$$s_l = \bar{X} + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W_0} P_{XX}} \right)_l W_l = \frac{1-W_0}{2n} \quad (l=1, \dots, n) \quad (2)$$

$$s_{l+n} = \bar{X} - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W_0} P_{XX}} \right)_l W_{l+n} = \frac{1-W_0}{2n} \quad (l=1, \dots, n) \quad (3)$$

其中, \bar{X} 表示输入变量的均值向量, $\sqrt{\cdot}$ 表示矩阵的平方根分解, $(\cdot)_l$ 表示矩阵的第 l 行或第 l 列, 权值 W_0 与输入变量的均值有关,它控制着其他 Sigma 点的位置,通常情况下,选择 $W_0 = 0$ [13,20]。

2 方差全局灵敏度指标计算的 SP-UT 方法

2.1 基于方差的全局灵敏度指标及其近似计算

设 $Y = g(X)$, $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ 为 n 维随机变量, X_i 对 Y 方差贡献的一阶指标可定义为 [7,21]:

$$S_i = \frac{V_{X_i}[E_{X_{-i}}(Y|X_i)]}{V(Y)} \quad (4)$$

其中: $V(Y)$ 为模型输出的总方差,由全方差公式 $E_{X_i}[V_{X_{-i}}(Y|X_i)] + V_{X_i}[E_{X_{-i}}(Y|X_i)] = V(Y)$ 得 $V_{X_i}[E_{X_{-i}}(Y|X_i)] = V(Y) - E_{X_i}[V_{X_{-i}}(Y|X_i)]$; $E_{X_i}[V_{X_{-i}}(Y|X_i)]$ 衡量 X_i 在其整个分布域取值时

模型输出响应量的剩余方差的平均值,因此 $V_{X_i}[E_{X_{-i}}(Y|X_i)]$ 衡量的是 X_i 在其整个分布域取值时输出响应量方差的平均减小量, X_{-i} 表示除去 X_i 变量的其他输入变量组成的向量。 S_i 越大,表示 X_i 对输出方差的影响越大,即该变量越重要。对于一组输出变量 $X_R = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}\}$ ($X_{i_r} \in \{X_1, \dots, X_n\}, r \in (1, 2, \dots, n)$) 其 r 阶方差贡献指标 S_R 有类似定义:

$$S_R = \frac{V_R[E_{-R}(Y|X_R)]}{V(Y)} \quad (5)$$

一阶方差贡献总指标以及 r 阶方差贡献总指标定义如下:

$$S_{Tn} = \frac{V(Y) - V_{X_{-i}}[E_{X_i}(Y|X_{-i})]}{V(Y)} \quad (6)$$

$$S_{TR} = \frac{V(Y) - V_{-R}[E_R(Y|X_{-R})]}{V(Y)} \quad (7)$$

基于方差的全局灵敏度的意义和性质已经被很多学者进行了深入的研究。但是,如何高效准确地计算它们,仍是一个比较有挑战性的问题。文献[16]为利用一组随机样本来求解各个变量的一阶方差贡献指标,推导了如式(8)所示计算条件方差期望的公式:

$$\begin{aligned} E_{X_i}[V_{X_{-i}}(Y|X_i)] &\approx \sum_{j_i=1}^{N_i} P_{j_i} V(Y)(X_i \in A_{j_i}) \\ &= \sum_{j_i=1}^{N_i} P_{j_i} V(Y)(X_i \in [a_{j_i-1}, a_{j_i}]) \end{aligned} \quad (8)$$

式中, N_i 为 X_i 被划分的区间数, $P_{j_i} = \int_{a_{j_i-1}}^{a_{j_i}} dF_{X_i}(x) = F_{X_i}(a_{j_i}) - F_{X_i}(a_{j_i-1})$ ($F_{X_i}(\cdot)$ 为 X_i 的累积分布函数) 表示 X_i 落入 $A_{j_i} = [a_{j_i-1}, a_{j_i}]$ 区间的概率。当 A_{j_i} 区间无限小,上述近似等号变为等号 [16]。由式(8)得,方差贡献的一阶指标可以有如下所示的近似计算公式:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{V(Y) - E_{X_i}[V_{X_{-i}}(Y|X_i)]}{V(Y)} \\ &\approx 1 - \frac{\sum_{j_i=1}^{N_i} P_{j_i} [V(Y)(X_i \in A_{j_i})]}{V(Y)} \end{aligned} \quad (9)$$

文献[16]采用的是一组随机样本中 $X_i \in A_{j_i}$ 所对应的输出响应样本来计算 $V(Y)(X_i \in A_{j_i})$ ($j_i = 1, \dots, N_i$), 本文在式(9)的基础上提出了新的算法,具体的思路及实现过程见下。

2.2 S_i 近似求解的 SP-UT 方法

从 S_i 的近似计算公式中可以看出,只要计算

出 $V(Y)$ 和 $V(Y)(X_i \in A_{j_i})$ 即可。UT 方法可以非常高效地采用 $2n + 1$ 次函数调用就求得非线性程度不高于三阶的问题的均值和方差,其效率远高于蒙特卡洛方法。但如果所研究问题的非线性程度较高,则 UT 方法的精度水平将大大下降。为解决该问题,本文将采用局部化输出响应函数并结合 UT 的方法,其基本思路就是将求解 $V(Y)$ 及 $V(Y)(X_i \in A_{j_i})(j_i = 1, \dots, N_i)$ 的积分全域分割为有限子空间,通常,子空间内局部函数的非线性程度会大大低于全域函数的非线性程度,这将使在局部区域中采用 UT 方法可以得到高精度的解,并且求解 $V(Y)$ 的局部化子空间可以重复利用来求解所有变量的一阶及高阶方差灵敏度因子,其实现过程将分为两步,第一步是 $V(Y)$ 的求解,第二步是重复利用 $V(Y)$ 求解过程中产生的子空间中的 UT 样本点,求得各个变量的各阶方差灵敏度因子。

2.2.1 输出响应均值和方差的计算

SP-UT 方法首先是将每一维输入空间 $X_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 等概率地划分为 N_i 个互不重叠且充满整个取值区域的子空间 $A_{j_i} = [a_{j_i-1}, a_{j_i}](j_i = 1, 2, \dots, N_i)$,在此划分下输出响应 Y 的均值 $E(Y)$ 和方差 $V(Y)$ 的计算策略如下所述:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= E(g(\mathbf{X})) = \int \dots \int g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &= \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} \int_{a_{j_1-1}}^{a_{j_1}} \dots \int_{a_{j_n-1}}^{a_{j_n}} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{10}$$

在子积分空间 $A_{j_1, j_2, \dots, j_n} = A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_n} = \bigcap_{k=1}^n x_{j_k} \in [a_{j_k-1}, a_{j_k}](j_k \in (1, \dots, N_k), k = 1, 2, \dots, n)$ 中, \mathbf{X} 的联合密度函数变为:

$$f_{\mathbf{X}(j_1, j_2, \dots, j_n)}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\int_{a_{j_1-1}}^{a_{j_1}} \dots \int_{a_{j_n-1}}^{a_{j_n}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}} & \mathbf{x} \in A_{j_1, j_2, \dots, j_n} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{11}$$

因此,式(10)可等价表示为:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int \dots \int g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &= \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} P_{j_1, j_2, \dots, j_n} \int_{a_{j_1-1}}^{a_{j_1}} \dots \int_{a_{j_n-1}}^{a_{j_n}} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}(j_1, j_2, \dots, j_n)}^*(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{12}$$

式中, $P_{j_1, \dots, j_n} = \int_{a_{j_1-1}}^{a_{j_1}} \dots \int_{a_{j_n-1}}^{a_{j_n}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{x} \in$

A_{j_1, j_2, \dots, j_n} 的概率。在减缩的子空间 A_{j_1, j_2, \dots, j_n} 内应用 UT 方法则可得:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int \dots \int g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &\approx \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} P_{j_1, j_2, \dots, j_n} \left[\sum_{l=1}^{2n+1} W_l g(\mathbf{s}_l) \right]
 \end{aligned} \tag{13}$$

式中, $W_l(l = 1, \dots, 2n + 1)$ 以及 $\mathbf{s}_l(l = 1, \dots, 2n + 1)$ 是由减缩空间 A_{j_1, j_2, \dots, j_n} 内的概率密度函数 $f_{\mathbf{X}(j_1, j_2, \dots, j_n)}^*(\mathbf{x})$ 产生的 \mathbf{X} 的第 l 个权值及相应的 n 维 Sigma 点。

输出响应的方差计算公式可类似地有如下表达:

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= \int \dots \int \{g(\mathbf{x}) - E[g(\mathbf{x})]\}^2 f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &\approx \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} P_{j_1, j_2, \dots, j_n} \left\{ \sum_{l=1}^{2n+1} W_l [g(\mathbf{s}_l) - E(Y)]^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{14}$$

2.2.2 输出响应条件方差 $V(Y)(X_i \in A_{j_i})$ 及 S_i 的计算

同样,利用 SP-UT 方法计算 $V(Y)(X_i \in A_{j_i})$ 的数学表达式为:

$$\begin{aligned}
 V(Y)(X_i \in A_{j_i}) &= \int \dots \int [g(\mathbf{x}) - E(Y)(X_i \in A_{j_i})]^2 f_{\mathbf{X}}^{(X_i \in A_{j_i})}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &\approx \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_{i-1}=1}^{N_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{N_{i+1}} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} P_{j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n} \times \\
 &\quad \left\{ \sum_{l=1}^{2n+1} W_l [g(\mathbf{s}_l) - E(Y)(X_i \in A_{j_i})]^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{15}$$

式中, $P_{j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n} = \int_{a_{j_1-1}}^{a_{j_1}} \dots \int_{a_{j_{i-1}-1}}^{a_{j_{i-1}}} \int_{a_{j_{i+1}-1}}^{a_{j_{i+1}}} \dots \int_{a_{j_n-1}}^{a_{j_n}} f_{\mathbf{X}}^{(X_i \in A_{j_i})}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}$ 。 $f_{\mathbf{X}}^{(X_i \in A_{j_i})}(\mathbf{x})$ 表示 X_i 属于 A_{j_i} 子区间而其他变量处于原始积分域的联合概率密度函数,即:

$$f_{\mathbf{X}}^{(X_i \in A_{j_i})}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\int \dots \int_{a_{j_i-1}}^{a_{j_i}} \dots \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}} & X_i \in A_{j_i} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{16}$$

而 W_l 和 \mathbf{s}_l 则是由密度函数,即

$$f_{\mathbf{X}(j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n)}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{f_{\mathbf{X}}^{(X_i \in A_{j_i})}(\mathbf{x})}{P_{j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n}} & \mathbf{x} \in (A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_{i-1}} \cap A_{j_i} \cap A_{j_{i+1}} \cap \dots \cap A_{j_n}) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{17}$$

产生的 \mathbf{X} 的第 l 个权值及相应的 n 维 Sigma 点。 $E(Y)(X_i \in A_{j_i})$ 采用 SP-UT 估算的表达式如下:

$$E(Y)(X_i \in A_{j_i}) = \int \dots \int g(\mathbf{x}) f_X^{(X_i \in A_{j_i})}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_{i-1}=1}^{N_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{N_{i+1}} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} P_{j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n} \cdot \left[\sum_{l=1}^{2n+1} W_l g(\mathbf{s}_l) \right] \quad (18)$$

通过观察计算 S_i 的近似计算公式(9) 及近似求解 $V(Y)$ 和 $V(Y)(X_i \in A_{j_i})$ 的式(14) 和式(15) 可见, 可以重复利用计算 $V(Y)$ 的子空间上的 Sigma 点及相应的权值来求得所有输入变量 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的一阶方差贡献指标 S_i , 具体过程是取计算 $V(Y)$ 的第 i 维的子区间的划分作为式(15) 的子区间, 则有下式:

$$S_i \approx 1 - \frac{1}{V(Y)} \sum_{j_i=1}^{N_i} [F_{X_i}(a_{j_i}) - F_{X_i}(a_{j_i} - 1)] \times \left(\sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_{i-1}=1}^{N_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{N_{i+1}} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} P_{j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{2n+1} W_l [g(\mathbf{s}_l) - E(Y)(X_i \in A_{j_i})]^2 \right\} \right) \quad (19)$$

对于高阶指标, 仍然可以利用计算 $V(Y)$ 的子空间上的 Sigma 点及相应的权值组合来计算, 以二阶方差指标为例进行推导, 首先对 $E_{X_i, X_j}[V(Y | X_i, X_j)]$ 进行等价变换:

$$\begin{aligned} & E_{X_i, X_j}[V(Y | X_i, X_j)] \\ &= \int \int V(Y | X_i = x_i, X_j = x_j) f_{X_i, X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j \\ &= \sum_{k_i=1}^{N_i} \sum_{k_j=1}^{N_j} \int_{a_{k_i-1}}^{a_{k_i}} \int_{a_{k_j-1}}^{a_{k_j}} V(Y | X_i = x_i, X_j = x_j) \cdot \frac{f_{X_i, X_j}(x_i, x_j)}{\int_{a_{k_i-1}}^{a_{k_i}} \int_{a_{k_j-1}}^{a_{k_j}} f_{X_i, X_j}(t_i, t_j) dt_i dt_j} \times \\ & \quad \left[\int_{a_{k_i-1}}^{a_{k_i}} \int_{a_{k_j-1}}^{a_{k_j}} f_{X_i, X_j}(t_i, t_j) dt_i dt_j \right] dx_i dx_j \\ &= \sum_{k_i=1}^{N_i} \sum_{k_j=1}^{N_j} P_{k_i, k_j} \int_{a_{k_i-1}}^{a_{k_i}} \int_{a_{k_j-1}}^{a_{k_j}} V(Y | X_i = x_i, X_j = x_j) \times \\ & \quad \left[\frac{f_{X_i, X_j}(x_i, x_j)}{\int_{a_{k_i-1}}^{a_{k_i}} \int_{a_{k_j-1}}^{a_{k_j}} f_{X_i, X_j}(t_i, t_j) dt_i dt_j} \right] dx_i dx_j \\ &= \sum_{k_i=1}^{N_i} \sum_{k_j=1}^{N_j} P_{k_i, k_j} \{ E_{X_i, X_j}[V(Y | X_i, X_j) | X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j}] \} \\ &= \sum_{k_i=1}^{N_i} \sum_{k_j=1}^{N_j} P_{k_i, k_j} \{ V(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j}) - \\ & \quad V_{X_i, X_j}[E(Y | X_i, X_j) | X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j}] \} \quad (20) \end{aligned}$$

其中 $P_{k_i, k_j} = \int_{a_{k_i-1}}^{a_{k_i}} \int_{a_{k_j-1}}^{a_{k_j}} f_{X_i, X_j}(t_i, t_j) dt_i dt_j$ 。如果 A_{k_i} 及 A_{k_j} 同时趋于 0, 那么 $V_{X_i, X_j}[E(Y | X_i, X_j) | X_i \in A_{k_i},$

$X_j \in A_{k_j}]$ 也趋于 0。因此, 在 A_{k_i} 和 A_{k_j} 无限小的情况下, 二阶(共同影响) 方差指标有如下近似表达:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{V(Y) - E_{X_i, X_j}[V_{X_{i-j}}(Y | X_i, X_j)]}{V(Y)} \\ &= 1 - \frac{E_{X_i, X_j}[V_{X_{i-j}}(Y | X_i, X_j)]}{V(Y)} \\ &\approx 1 - \frac{\sum_{k_i=1}^{N_i} \sum_{k_j=1}^{N_j} P_{k_i, k_j} [V(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j})]}{V(Y)} \quad (21) \end{aligned}$$

利用 SP-UT 方法, $V(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j})$ 可以通过下式计算:

$$\begin{aligned} & V(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j}) \\ &\approx \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_{i-1}=1}^{N_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=1}^{N_{i+1}} \dots \sum_{k_{j-1}=1}^{N_{j-1}} \sum_{k_{j+1}=1}^{N_{j+1}} \dots \\ & \quad \sum_{k_n=1}^{N_n} P_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n} \times \\ & \quad \left\{ \sum_{l=1}^{2n+1} W_l [g(\mathbf{s}_l) - E(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j})]^2 \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

同理, $E(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j})$ 可计算如下:

$$\begin{aligned} & E(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j}) \\ &\approx \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_{i-1}=1}^{N_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=1}^{N_{i+1}} \dots \sum_{k_{j-1}=1}^{N_{j-1}} \sum_{k_{j+1}=1}^{N_{j+1}} \dots \\ & \quad \sum_{k_n=1}^{N_n} P_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n} \left[\sum_{l=1}^{2n+1} W_l g(\mathbf{s}_l) \right] \quad (23) \end{aligned}$$

重复利用计算 $V(Y)$ 的子空间上的 Sigma 点及相应的权值来近似计算二阶方差指标的公式如下:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 1 - \frac{1}{V(Y)} \left[\sum_{k_i=1}^{N_i} \sum_{k_j=1}^{N_j} [F_{X_i, X_j}(a_{k_i}, a_{k_j}) - F_{X_i, X_j}(a_{k_i-1}, a_{k_j}) - \right. \\ & \quad F_{X_i, X_j}(a_{k_i}, a_{k_j-1}) + F_{X_i, X_j}(a_{k_i-1}, a_{k_j-1})] \times \\ & \quad \left(\sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_{i-1}=1}^{N_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=1}^{N_{i+1}} \dots \sum_{k_{j-1}=1}^{N_{j-1}} \sum_{k_{j+1}=1}^{N_{j+1}} \dots \right. \\ & \quad \left. \sum_{k_n=1}^{N_n} P_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n} \times \right. \\ & \quad \left. \left\{ \sum_{l=1}^{2n+1} W_l [g(\mathbf{s}_l) - E(Y)(X_i \in A_{k_i}, X_j \in A_{k_j})]^2 \right\} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

与文献[16] 中的计算方法相比, 本文所提方法计算简单, 易于编程实现且无须寻找最优划分, 并且保证了每个划分子空间内都存在样本点; 另外, 本文方法保证了该近似方法最初的假设条件——随空间分割数目的增加, 计算结果收敛于真值。

2.2.3 SP-UT 算法计算量的讨论

该方法的计算量为： $(\prod_{i=1}^n N_i) \times 2 \times n$ ，其中 N_i

表示第 i 维变量空间的划分量， $\prod_{i=1}^n N_i$ 表示整个积分空间被划分的超立方体的数目。在每个超立方体内应用 UT，需产生 $2n + 1$ 个 Sigma 点，由于选择的是标准 UT，即 $W_0 = 0$ ，因此舍去第一个 Sigma 点，即在每个超立方体中仅需要调用模型 $2n$ 次。

表 1 基于方差的全局灵敏度指标计算结果(算例 1)

Tab. 1 Results of variance-based global sensitivity indices for Ishigami function

方法	S_1	S_2	S_3	S_{12}	S_{23}	S_{13}	N_{call}
SP-UT	0.380 7	0.234 2	6.66E-16	0.614 9	0.234 2	0.630 0	3072
MCS	0.401 8	0.290 6	4.76E-4	0.685 9	0.288 9	0.711 9	5000
	(0.037 1)	(0.043 0)	(0.005 6)	(0.085 7)	(0.076 5)	(0.103 5)	
	0.400 5	0.290 0	0.002 0	0.688 6	0.290 1	0.713 8	10 000
	(0.026 8)	(0.029 7)	(0.042 4)	(0.006 1)	(0.054 8)	(0.066 8)	
理论值 ^[22]	0.400 7	0.288 2	0	0.688 9	0.288 2	0.711 8	

注： N_{call} 表示调用输出响应函数的次数，(·)表示单层 MCS 重复 100 次计算值的标准差。

在该算例中将积分空间分割成 512 个子空间，在每个子空间中产生 $2n + 1$ 即 7 个 Sigma 点，又因选择标准 UT，即 $W_0 = 0$ ，则可以舍去第一个 Sigma 点，计算量为： $512 \times 6 = 3072$ 。总贡献指标 S_{Ti} 可以通过 $1 - S_{-i}$ 计算得到，即 $S_{T1} = 1 - S_{23}$ ， $S_{T2} = 1 - S_{13}$ ， $S_{T3} = 1 - S_{12}$ 。从表 1 中可以看出 SP-UT 方法在排序上与理论排序是一致的，并且计算结果也比较接近理论值，计算量也是比较少的。表 1 中单层 MCS 的计算结果可以看出，其重复 100 次计算结果的标准差是比较大的，而 SP-UT 方法计算出来的值是确定性的。除此之外，图 1 给出了计算结果随空间分割数目增加而变化的图线，从图中可以看出当积分空间划分得很小时，数值计算结果收敛于其真实值。图 2 给出了在 3000 样本情况下，文献[16]方法的计算结果随区间划分数目增加的变化图，从图 2 可以看出其方法在随机抽取的 3000 个样本下，不同的划分数计算出来的值是不同的，这使得很难抉择究竟如何划分子区间才能使得计算值更接近真实值，并且其计算结果也不随空间分割数的增加而收敛于真值，从而更说明了本文所提方法先产生子空间后产生 UT 样本点的计算策略的合理性。文献[16]采用的是随机抽样，图 3 给出了 S_1 在 1000 个样本、等概率产生 10 个子区间的情况下计算值随计算次数的变化图，由图可以看出，在一个确定划分

3 算例分析

3.1 算例 1

Ishigami 函数^[22]，其数学表达式为：

$$g = \sin(x_1) + a\sin(x_2^2) + bx_3^4\sin(x_1) \quad (25)$$

变量 $X_i (i = 1, 2, 3)$ 相互独立且都服从 $(-\pi, \pi)$ 的均匀分布，令 $a = 5, b = 0.1$ 。采用 $8 \times 8 \times 8$ 的方式来等概率分割积分空间，基于方差的全局灵敏度指标的计算结果如表 1 所示。

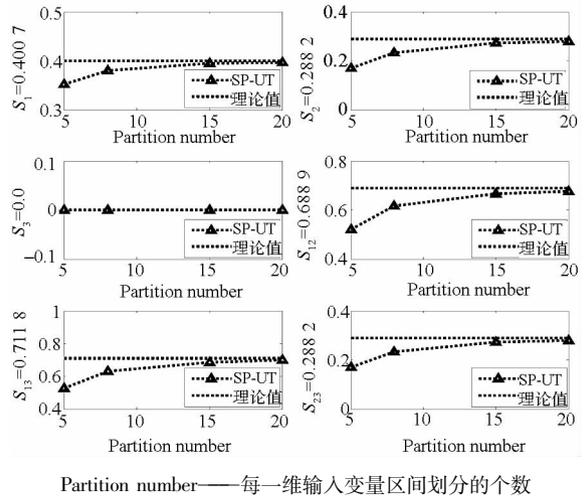


图 1 Ishigami 函数计算结果随空间分割数目变化图

Fig. 1 Changed results with the increased number of subspace for Ishigami function calculated by SP-UT

的情况下，其计算值也是不稳定的。

3.2 算例 2

Sobol's G 函数^[23]，由于其强的非单调性和强的非线性性，在灵敏度分析中广泛被作为验证算例。因此，本文也选择其作为验证算例来验证本文所提出的方法。其数学表达式如下：

$$Y = G(X_1, \dots, X_n; a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n g_i \quad (26)$$

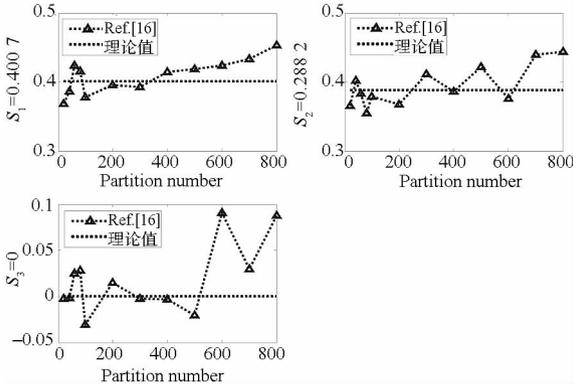


图 2 文献[16]的计算方法计算 Ishigami 函数一阶方差贡献指标随空间分割数目变化图

Fig. 2 Changed results of the first order indices with the increased number of subspace for the Ishigami function calculated by the method proposed in Ref. [16]

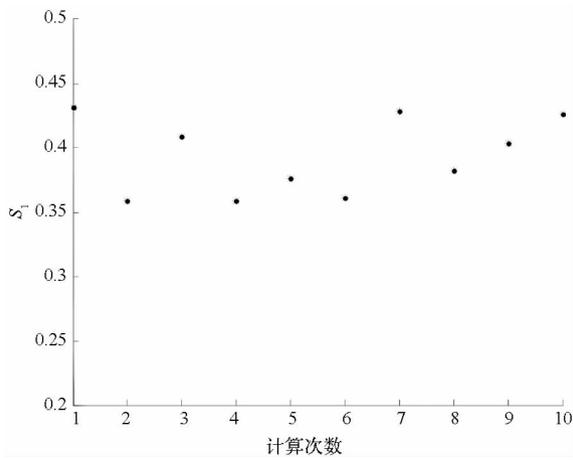


图 3 文献[16]的计算方法计算 Ishigami 函数 S_1 值随计算次数的变化图

Fig. 3 Changed results of S_1 with the changed calculation order for the Ishigami function calculated by the method proposed in Ref. [16]

$$g_i = \frac{|4X_i - 2| + a_i}{1 + a_i} \quad (27)$$

其中, $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示 n 个相互独立且服从 $(0, 1)$ 均匀分布的随机变量。 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是决定哪个输入变量比较重要的常数。在该算例中, 选择 $n = 3, a_1 = 0, a_2 = 1$ 和 $a_3 = 2$ 。表 2 是该验证算例的各阶方差灵敏度指标的理论值。图 4 是利用 SP-UT 方法计算的结果的收敛图。

表 2 基于方差的全球灵敏度指标的理论值^[6] (算例 2)

Tab. 2 Analytical values of the variance-based global sensitivity indices for Sobol's G function^[6]

S_1	S_2	S_3	S_{12}	S_{13}	S_{23}
0.669 4	0.167 4	0.074 4	0.892 6	0.768 6	0.247 9

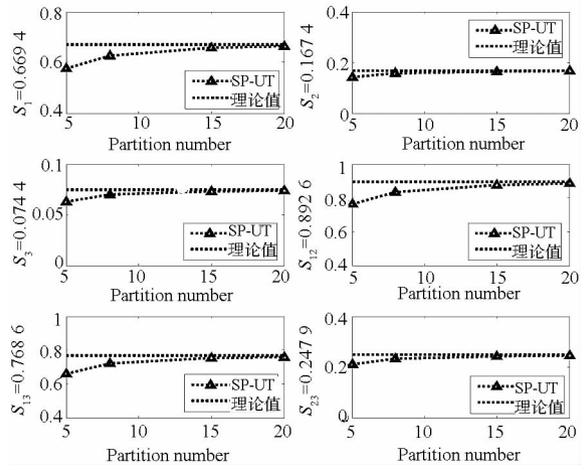


图 4 Sobol's G 函数计算结果随空间分割数目变化图
Fig. 4 Changed results with the increased number of subspace for Sobol's G function calculated by SP-UT

图 5 给出了文献[16]的方法在随机产生 3000 个样本点的情况下一阶方差指标值随划分空间数目增加的变化图。算例 2 再一次验证了所提方法在近似计算基于方差的全局灵敏度指标上的精确性和高效性, 尤其对于形式以及性质较为复杂的响应函数。

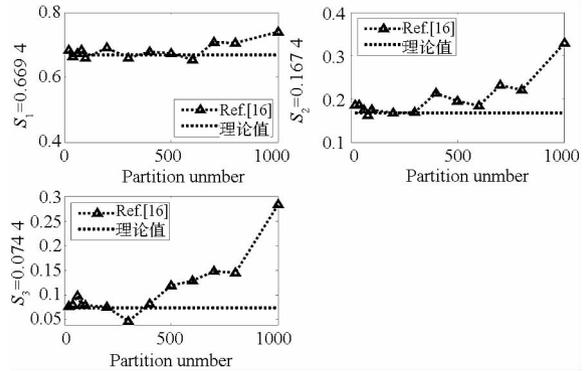


图 5 文献[16]的计算方法计算 Sobol's G 函数一阶方差贡献指标随空间分割数目变化图
Fig. 5 Changed results of the first order indices with the increased number of subspace for the Sobol's G function calculated by the method proposed in Ref. [16]

3.3 算例 3

一钢筋混凝土梁^[24], 其极限状态函数为:

$$G(A_s, F_Y, F_c) = A_s \cdot F_Y \cdot d - 0.59 \frac{(A_s \cdot F_Y)^2}{F_c \cdot b} - Q \quad (28)$$

式中, A_s, F_Y, F_c, Q, d, b 分别为加强截面、钢的屈服强度、混凝土抗压强度、总弯矩、梁的高度和宽度。 Q, d 和 b 为已知常量分别为: 2052 kN · cm, 19 cm 和 12 cm。 A_s, F_Y 和 F_c 的统计特性如表 3 所示。

表 3 钢筋混凝土梁输入随机变量的分布参数

Tab.3 Distribution parameters of inputs for the reinforced concrete beam

输入变量	均值	变异系数	分布类型
$F_Y/(kN/cm^2)$	44	0.105	正态
A_s/cm^2	4.08	0.02	正态
$F_c/(kN/cm^2)$	3.12	0.14	正态

在该工程算例中,采用 SP-UT 方法来计算基于方差的全局灵敏度指标,并用大量样本下 MCS 方法的解作为参照解,计算结果如表 4 所示。

采用 $5 \times 5 \times 5$ 的积分空间分割策略来计算基于方差的全局灵敏度指标,从计算结果中,单层 MCS 用 5000 次模型调用量计算的结果中 S_{A_s} ,

$S_{F_c}, S_{A_s F_c}$ 是不收敛的,其余计算值的标准差和均值非常接近即收敛很慢,而 10 000 次的模型调用量的计算中, S_{A_s} 和 S_{F_c} 的计算仍不收敛。然而, SP-UT 方法的计算结果与采用大量样本的 MCS 方法计算出来的结果非常接近,而所需的样本量要比 MCS 小得多,并且 SP-UT 方法计算出来的值是确定的值,从而,可以得出本文所提方法具有高效性。为了进一步说明所提方法随着空间分割数的增多而能收敛到真值,画出了计算结果随空间分割数目变化的图,如图 6 所示。图 7 给出了在随机抽取 1000 个样本的情况下,利用文献 [16] 方法计算的结果随划分空间数目增加的变化图。从图 6 和图 7 可以看出,本文方法的收敛性优于文献 [16] 方法的。

表 4 钢筋混凝土梁结构基于方差的全局灵敏度指标计算结果

Tab.4 Results of variance-based global sensitivity indices for the reinforced concrete beam

方法	S_{F_Y}	S_{A_s}	S_{F_c}	$S_{F_Y A_s}$	$S_{F_Y F_c}$	$S_{A_s F_c}$	N_{call}
SP-UT	0.788 9	0.028 5	0.073 8	0.824 8	0.867 5	0.106 7	750
MCS	0.877 6 (0.052 4)	0.034 6 (0.149 0)	0.092 2 (0.146 3)	0.926 6 (0.284 2)	0.982 7 (0.290 3)	0.123 8 (0.170 3)	5000
	0.877 3 (0.031 6)	0.031 9 (0.097 3)	0.084 7 (0.097 7)	0.904 5 (0.185 4)	0.966 9 (0.189 9)	0.116 2 (0.109 4)	10 000
	0.877 6 (0.000 5)	0.031 6 (0.001 6)	0.086 9 (0.001 5)	0.909 3 (0.003 0)	0.968 3 (0.003 0)	0.118 6 (0.001 8)	5×10^7

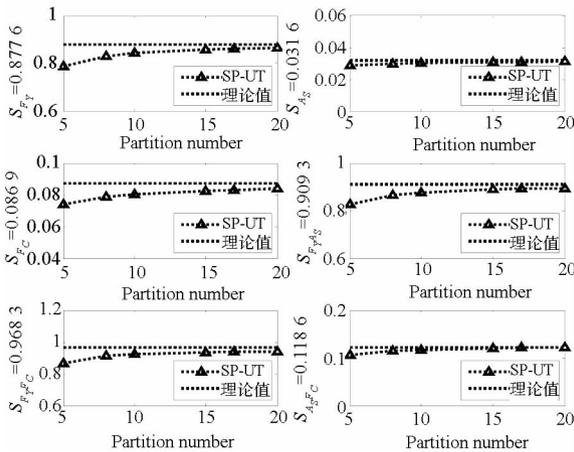


图 6 钢筋混凝土梁结构计算结果随空间分割数目变化图

Fig. 6 Changed results with the increased number of subspace for the reinforced concrete beam calculated by SP-UT

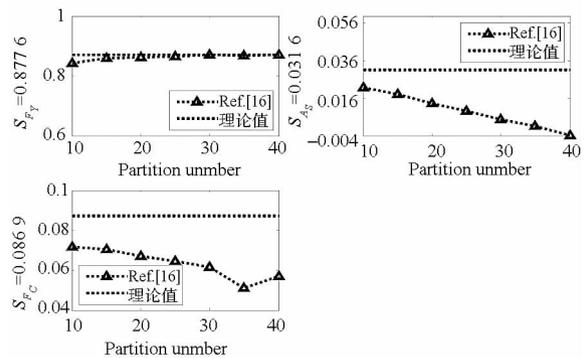


图 7 文献 [16] 的计算方法计算钢筋混凝土梁结构一阶方差贡献指标随空间分割数目变化图

Fig. 7 Changed results of the first order indices with the increased number of subspace for the reinforced concrete beam calculated by the method proposed in Ref. [16]

4 结论

将积分空间分割与 UT 结合,提出了高效计算基于方差的全局灵敏度指标的方法,该方法忽

略了子空间内输出响应的条件期望的方差项,可以重复利用已经产生的 UT 特征点,即利用一组特征点就可以计算所有阶的方差指标,大大提高了 UT 特征点的利用率,并且该计算方法的计算值不存在随机性且满足该近似计算方法最初的假

设条件,即随空间分割个数的增加估计值收敛到真值。验证算例以及工程算例的计算结果也说明了所提方法在处理非线性问题上的优越性。但是,该方法的计算量会随输入维数呈指数增长。因此,本文所提方法目前对低维非线性程度较高的问题有很大的优势,但是对高维问题的适用性较差于低维问题。

参考文献 (References)

- [1] Saltelli A. Sensitivity analysis for importance assessment [J]. *Risk Analysis*, 2002, 22(3): 579–590.
- [2] Wei P F, Lu Z Z, Song J W. Moment-independent sensitivity analysis using copula [J]. *Risk Analysis*, 2014, 34(2): 210–222.
- [3] 张磊刚, 吕震宙, 陈军. 基于失效概率的矩独立重要性测度的高效算法 [J]. *航空学报*, 2014, 38(8): 2199–2206.
ZHANG Leigang, LYU Zhenzhou, CHEN Jun. An efficient method of failure probability-based moment-independent importance measure [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 38(8): 2199–2206. (in Chinese)
- [4] Zhan Y, Zhang M H. Application of a combined sensitivity analysis approach on a pesticide environmental risk indicator [J]. *Environment Modelling & Software*, 2013, 49: 129–140.
- [5] Saltelli A, Marivoet J. Non-parametric statistics in sensitivity analysis for model output: a comparison of selected techniques [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 1900, 28(2): 229–253.
- [6] Saltelli A, Annoni P, Azzini I, et al. Variance based sensitivity analysis of model output: design and estimator for the total sensitivity index [J]. *Computation Physics Communication*, 2010, 181(2): 259–270.
- [7] 郝文锐, 吕震宙, 魏鹏飞. 多项式输出中相关变量的重要性测度分析 [J]. *力学学报*, 2012, 44(1): 167–173.
HAO Wenrui, LYU Zhenzhou, WEI Pengfei. Importance measure of correlated variables in polynomial output [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(1): 167–173. (in Chinese)
- [8] Wei P, Lu Z, Song J. A new variance-based global sensitivity analysis technique [J]. *Computation Physics Communication*, 2013, 184(11): 2540–2551.
- [9] Park C K, Ahn K I. A new approach for measuring uncertainty importance and distributional sensitivity in probabilistic safety assessment [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 1994, 46(3): 253–261.
- [10] Borgonovo E. A new uncertainty importance measure [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(6): 771–784.
- [11] Zhou C, Lu Z, Zhang L, et al. Moment independent sensitivity analysis with correlations [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, 38(19/20): 4885–4896.
- [12] Seo H S, Kwak B M. Efficient statistical tolerance analysis for general distribution using three-point information [J]. *International Journal of Production Research*, 2002, 40(4): 931–944.
- [13] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(3): 401–422.
- [14] 张勇刚, 黄玉龙, 武哲民, 等. 一种高阶无迹卡尔曼滤波方法 [J]. *自动化学报*, 2014, 40(5): 838–848.
ZHANG Yonggang, HUANG Yulong, WU Zheming, et al. A high order unscented Kalman filtering method [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(5): 838–848. (in Chinese)
- [15] Gerstner T, Griebel M. Numerical integration using sparse grids [J]. *Number Algorithms*, 1998, 18(3/4): 209–232.
- [16] Zhai Q, Yang J, Zhao Y. Space-partition method for the variance-based sensitivity analysis: optimal partition scheme and comparative study [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, 131: 66–82.
- [17] Sanseverino C M R, Ramirez-Marquez J E. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in system reliability assessment via unscented transformation [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, 132: 176–185.
- [18] McNamee J, Stenger F. Construction of fully symmetric numerical integration formulas [J]. *Numerische Mathematik*, 1967, 10: 327–344.
- [19] Richter J H. Reliability estimation using unscented transformation [C]//*Proceedings of the IEEE Dependable Control of Discrete System*, 2011: 102–107.
- [20] Steiner G, Zangl H, Watenig D. Generic statistical circuit design based on the unscented transformation and its application to capacitive sensor instrumentation [C]//*Proceedings of IEEE Industrial Technology*, 2005: 108–113.
- [21] Homma T, Saltelli A. Importance measures in global sensitivity analysis of model output [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 1996, 52(1): 1–17.
- [22] Ishigami T, Homma T. An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models [C]//*Proceedings of First IEEE International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis*, 1990: 398–403.
- [23] Archer G E B, Saltelli A, Sobol I M. Sensitivity measures ANOVA—like techniques and the use of bootstrap [J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1997, 58(2): 99–120.
- [24] Nowak A S, Collins K R. *Reliability of structures* [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 2000.