

## 二维非线性正交各向异性材料的瞬态热传导反问题数值方法\*

陈闽慷<sup>1</sup>, 杜涛<sup>2</sup>, 苏雪<sup>3</sup>, 陈伟芳<sup>3</sup>

(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073;

2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076; 3. 浙江大学 航空航天学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:**针对正交各向异性材料的二维非线性热传导反问题,采用顺序函数法进行表面热流辨识问题的研究。在求解反问题时,采用有限体积法、牛顿-拉夫逊法并引入未来时间步的概念。在每个时间步内,将待辨识热流视为非线性方程组的未知量,通过一个迭代过程进行求解。算例的研究表明,热流辨识结果与真实热流相近,从而证明了本方法在辨识二维非线性热传导反问题时是准确、稳定、有效的。

**关键词:**二维;非线性瞬态热传导;热流辨识;顺序函数法

**中图分类号:**TN95 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)01-194-05

## A numerical method for two-dimensional nonlinear transient inverse heat conduction problems for orthotropic material

CHEN Minkang<sup>1</sup>, DU Tao<sup>2</sup>, SU Xue<sup>3</sup>, CHEN Weifang<sup>3</sup>

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Beijing Institute of Astronautics System Engineering, Beijing 100076, China;

3. School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** A sequential functional specification method was adopted to identify the surface heat flux in a two-dimensional inverse heat conduction problem for an orthotropic solid. The inverse problems were solved with the combination of the finite control volume method, the Newton-Raphson method, and the concept of future time step. The undetermined heat flux at each time step was denoted as one of the unknown variables in a set of nonlinear equations, which was solved by an iterative process. Results show that the estimated values agree well with the exact values in the examples, which proves that this method is an accurate, stable, and efficient one, thus it can be used to determine the surface heat flux in two-dimensional nonlinear inverse heat conduction problems.

**Key words:** two-dimensional; nonlinear transient heat conduction; heat flux identification; sequential functional specification method

热传导反问题是相对于热传导正问题而言。在传热过程中,如果研究对象的热源、热物性参数等未知,需要由物体内部某点或某些点的测量温度确定,这类问题就称为热传导反问题。热传导反问题在航空航天、机械制造、车辆工程、生物工程等领域有着广泛应用<sup>[1-2]</sup>。复合材料因其优良的物理特性,正在逐步替代传统材料,得到更多的运用<sup>[3]</sup>。绝大多数复合材料的热物性参数都随温度变化,这使得热传导方程变为非线性<sup>[4-5]</sup>。

求解热传导反问题有很多方法,如顺序函数法、共轭梯度法、Tikhonov 正则化法以及新兴的神经网络法和遗传算法等。钱炜祺<sup>[6]</sup>分别用顺序函数法和共轭梯度法研究了一维非线性热传导表面热流辨识。张丽慧<sup>[7]</sup>应用顺序函数法,求解了

二维非线性瞬态热传导反问题,建立了钢坯加热过程中边界热流的热模型,但热流只是时间的函数。薛齐文<sup>[8]</sup>采用了 Tikhonov 正则化法,建立了多参数非线性热传导反问题参数识别模型,实现了多参数的组合识别。Deng<sup>[9]</sup>采用改进的神经网络法求解了热传导正/反问题。Miao Cui<sup>[10]</sup>提出了无量纲化目标方程,对热流模型进行了参数化辨识,但局限于已知热流的函数形式。然而在实际应用中,热流随时间、空间不断变化,多维效应明显,加之材料热物性的非线性特征,加大了反问题研究的难度。总的来说,对多维非线性条件下热流随空间分布的热传导反问题研究并不多。

本文采用顺序函数法,对二维非线性非稳态条件下热传导反问题进行了研究,利用背壁面测

\* 收稿日期:2016-03-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51575487);国家973计划资助项目(2014CB340201)

作者简介:陈闽慷(1972—),男,福建福州人,研究员,博士研究生,E-mail:mousemike@tom.com;

陈伟芳(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:chenwfndt@163.com

量温度反演表面热流,仿真结果表明,所用方法有较高的准确性,在存在测量误差的情况下,算法稳定性良好。

## 1 二维瞬态导热问题

考虑正交各向异性材料的二维非线性瞬态导热问题,假设材料在一个矩形区域内( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ),  $k_x(T)$ 和 $k_y(T)$ 分别为材料沿 $x$ 轴和 $y$ 轴的热传导系数, $\rho$ 为材料密度, $C_p(T)$ 为材料的比热容。 $q(t,y)$ 为作用在 $x=0$ 边界的热流,其余三个边界 $x=a$ , $y=0$ , $y=b$ 均为绝热条件。热传导方程为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$x \in [0, a], y \in [0, b]$$

边界条件为:

$$\begin{cases} x=0: -k_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} = q(t,y) \\ x=a: -k_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ y=0: -k_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ y=b: -k_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

初始条件为:

$$t=0: T(x,y,0) = T_0 \quad (3)$$

求解热传导正问题时,采用交替方向隐式差分法(alternating direction implicit method)对方程进行离散,采用三对角矩阵算法(TriDiagonal Matrix Algorithm, TDMA)对方程组进行求解,得到材料内部节点温度 $T_{i,j}^k$ ,上标表示 $t=k\Delta t$ 时刻,下标表示 $x=i\Delta x$ , $y=j\Delta y$ 处坐标位置,其中 $k=1, 2, \dots, t\_total$ ;  $i=1, 2, \dots, M$ ;  $j=1, 2, \dots, N$ 。

## 2 反问题求解

### 2.1 顺序函数法

顺序函数法引入了灵敏度函数和未来时间步长的概念,灵敏度函数 $X(x,y,t) = \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial q(t,y)}$ 来表示温度场 $T(x,y,t)$ 对热流 $q(t,y)$ 的灵敏程度。当已知测量温度来辨识热流 $q(k,j)$ 时,需要已知 $k$ 时刻前的热流值 $q(1,j), q(2,j), \dots, q(k-1,j)$ 和后 $r$ 个时间步的温度值 $T(k,i,j), T(k+1,i,j), T(k+2,i,j), \dots, T(k+r-1,i,j)$ 。根据顺序函数法原理,假定 $k, k+1, \dots, k+r-1$ 时刻的热流线性变化为:

$$q(k+l,j) = q(k,j) + l[q(k,j) - q(k-1,j)] \quad (4)$$

其中 $l=1, 2, 3, \dots, r$ ;这里的 $r$ 就是未来时间步。

方程(1)~(3)两边在 $k$ 至 $k+r-1$ 时间步内均对热流 $q(t,y)$ 进行求导,得到灵敏度方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x(T) \frac{\partial X}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y(T) \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \rho C_p(T) \frac{\partial X}{\partial t} \quad (5)$$

$$x \in [0, a], y \in [0, b], t \in [k\Delta t, (k+r-1)\Delta t]$$

边界条件为:

$$\begin{cases} x=0: -k_x(T) \frac{\partial X}{\partial x} = l+1 \\ x=a: -k_x(T) \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \\ y=0: -k_y(T) \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \\ y=b: -k_y(T) \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$t \in [k\Delta t, (k+r-1)\Delta t]$$

初始条件为:

$$X(x,y,k-1) = 0, x \in [0, a], y \in [0, b] \quad (7)$$

这里需要指出的是,因为热流辨识过程首先求解了 $k$ 到 $k+r-1$ 时间步的热传导正问题, $k$ 到 $k+r-1$ 时间步内的温度场分布已知。然后在热传导方程两侧对热流 $q$ 求偏导。本文假设了材料的热传导系数和比热与温度的函数关系。将正问题中的温度场结果代入到灵敏度方程的热传导系数和比热的求解中。故灵敏度方程的热传导系数和比热可以视为常数,并没有对 $k(T)$ 求 $q$ 的偏导。这样做的优点是,避免了链式求导所带来的烦琐,简化了方程;方便了热流辨识程序的编写,也具有比较高的精度。

与正问题相同,灵敏度方程(5)~(7)采用基于有限体积法的交替方向隐式差分法对方程进行离散,利用TDMA法对离散方程进行求解。对反问题的求解则采用了引入未来时间步的牛顿-拉夫逊法。

### 2.2 牛顿-拉夫逊法

牛顿-拉夫逊法广泛应用于求解非线性方程<sup>[3]</sup>。假设 $k$ 时刻的初始热流为 $q^0(k,j)$ , $\bar{T}(M,j,k)$ 为实际测量温度, $T(x,j,k)$ 为由初始热流引起的温度,利用式(8)迭代得到新的热流:

$$q_{\lambda+1}(k,j) = q_{\lambda}(k,j) + \frac{\sum_{i=0}^{r-1} [\bar{T}(M,j,k+i) - T(M,j,k+i)] \cdot X(M,j,k+i)}{\sum_{i=0}^{r-1} [X(M,j,k+i)]^2}, \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

其中,  $X(x, j, k)$  由灵敏度方程求得,  $\lambda$  为迭代次数。

计算中发现在某些情况中, 迭代会发生热流辨识结果震荡发散的情况。为了避免这一问题的发生, 引入一个不超过 0.1 的较小松弛因子  $\gamma$ , 将修正量控制在一个较小的范围内, 可以抑制振荡发散的发生。

### 2.3 收敛准则

用牛顿 - 拉夫逊法不断迭代求解得到新的热流, 当达到一定的收敛准则时, 停止迭代, 将新得到的热流作为下一个时间步的初始值, 继续迭代求解, 直到历经所有时间步为止。收敛准则为:

$$|J - J^0| \leq \varepsilon |J| \quad (9)$$

其中,  $J = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{r-1} [\bar{T}(M, j, k + i) - T(M, j, k + i)]^2$ ,  $\varepsilon$  为很小的正数。

### 3 计算算法

由以上建立的求解反问题的计算步骤, 可以得到其求解算法:

步骤 1: 假设在  $k$  时间步之前的温度分布已知。

步骤 2: 由  $k - 1$  时刻的热流作为  $k$  时刻的初始热流。

步骤 3: 利用方程(1) ~ (3) 求解  $k$  到  $k + r - 1$  时间步热传导正问题。

步骤 4: 求解灵敏度方程(5) ~ (7) 得到  $k$  到  $k + r - 1$  时间步内的灵敏度分布。

步骤 5: 由方程(8) 得到新的热流。

步骤 6: 如果满足收敛准则, 令  $k = k + 1$ , 回到步骤 2 继续计算。如果不满足收敛准则, 将新热流作为初始热流, 回到步骤 3 继续计算。

### 4 算例与结果分析

通过数值仿真手段求解二维非线性反问题, 设定传热模型形状大小为  $L_x = 0.01 \text{ m}$ ,  $L_y = 0.1 \text{ m}$ , 假定热流的实际分布为:

$$q(t, y) = 10\,000 \cdot \left[ 1 + 4\sin\left(\frac{t}{t_{\text{total}}}\pi\right) \right] \cdot \left[ 1 + \sin\left(\frac{y}{L_y}\pi\right) \right] \quad (10)$$

热物性参数为:  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

$$C_p = 800 + T \text{ Jm}^{-3}\text{C}^{-1} \quad (11)$$

$$k_x = 60 - 0.05T \text{ Wm}^{-1}\text{C}^{-1} \quad (12)$$

$$k_y = 80 - 0.02T \text{ Wm}^{-1}\text{C}^{-1} \quad (13)$$

初始温度为  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , 总的加热时间为 20 s。内壁的温度变化历程为测量点位置与时间的函数  $Tcl(y, t)$ 。因为测量点只放置在内壁处, 所以不考虑沿  $x$  方向的变化。无测量噪声情况下的  $Tcl(y, t)$  分布如图 1 所示。

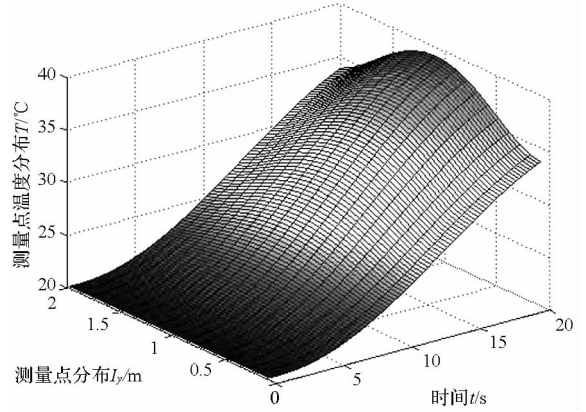


图 1 内壁面温度变化历程

Fig. 1 Progress of temperature inside wall

时间间隔  $\Delta t$  为 0.2 s, 顺序函数法中的未来时间步长  $r$  为 30。为了验证算法稳定性和抗噪声能力, 在温度准确计算值的基础上, 加上一定的测量误差, 从而得到温度的实际测量值<sup>[9]</sup>:

$$\bar{T}(M, j, k) = T(M, j, k) + \omega\sigma \quad (14)$$

其中  $\sigma$  为测量误差的标准差, 单位为  $^\circ\text{C}$ , 假设测量数据有 99% 的可信度, 则  $\omega$  是一组区间为  $[-2.576, 2.576]$  的正态分布随机数。

图 2 给出了本问题热流的真实值, 图 3 ~ 10 分别给出了测量误差  $\sigma$  为 0, 0.1, 0.2, 0.5 时热流辨识结果以及真实值的相对误差。

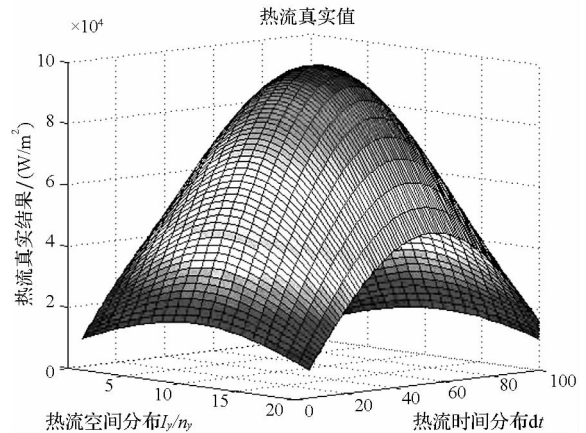


图 2 热流真实值

Fig. 2 True values of heating flux

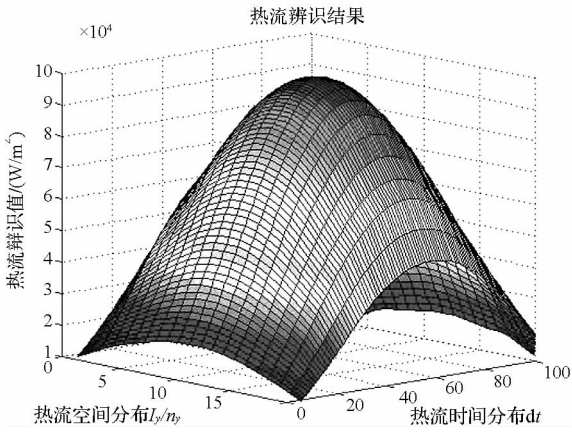


图 3 无测量噪声时的热流辨识结果

Fig. 3 Heat flux identification result without measurement noise

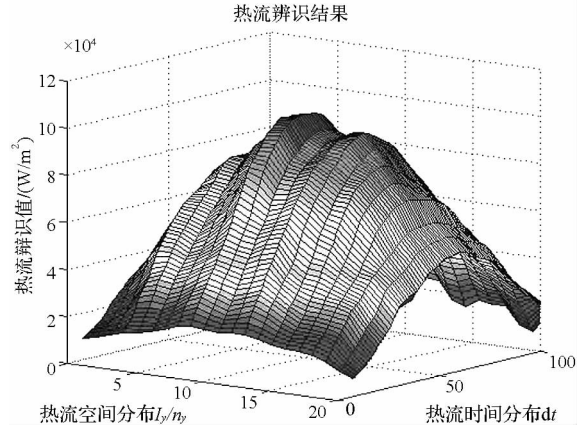


图 6 测量噪声 sigma = 0.5 时的热流辨识结果

Fig. 6 Heat flux identification result with measurement noise sigma = 0.5

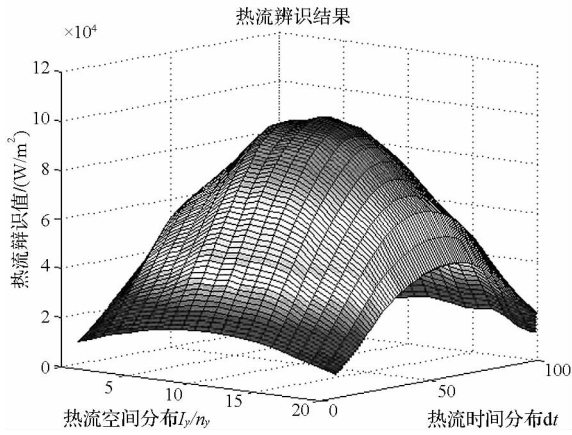


图 4 测量噪声 sigma = 0.1 时的热流辨识结果

Fig. 4 Heat flux identification result with measurement noise sigma = 0.1

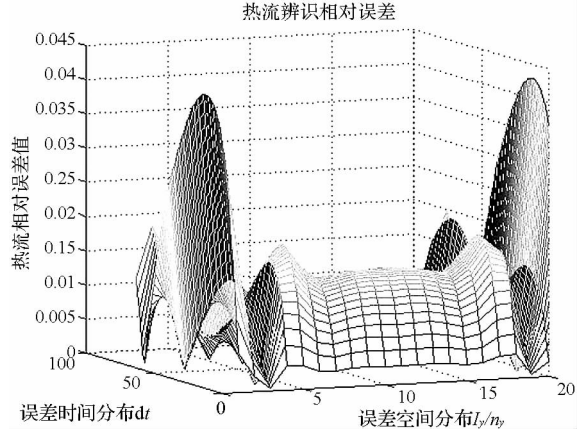


图 7 无测量噪声时,真实值与辨识值的相对误差

Fig. 7 Relative error between true heating flux and identification result without measurement noise

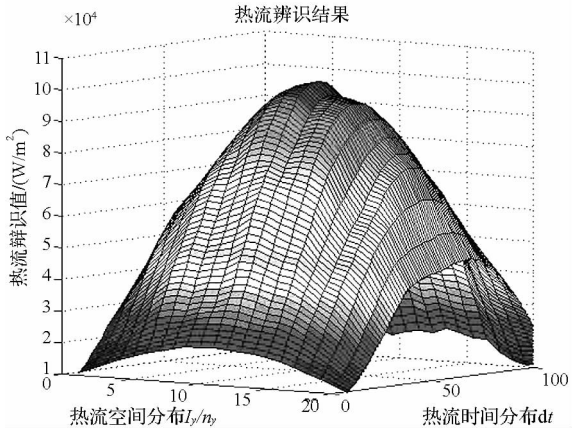


图 5 测量噪声 sigma = 0.2 时的热流辨识结果

Fig. 5 Heat flux identification result with measurement noise sigma = 0.2

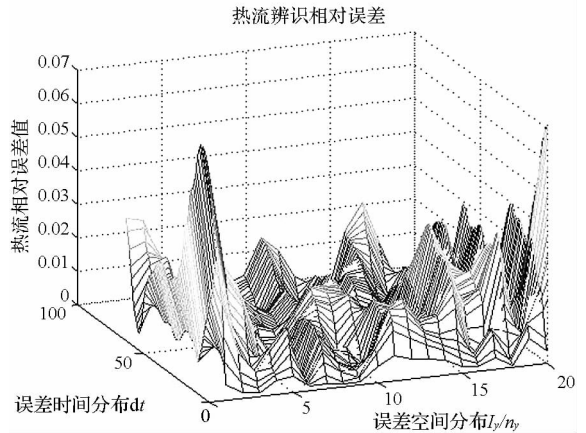


图 8 测量噪声 sigma = 0.1 时,真实值与辨识值的相对误差

Fig. 8 Relative error between true heating flux and identification result with measurement noise sigma = 0.1

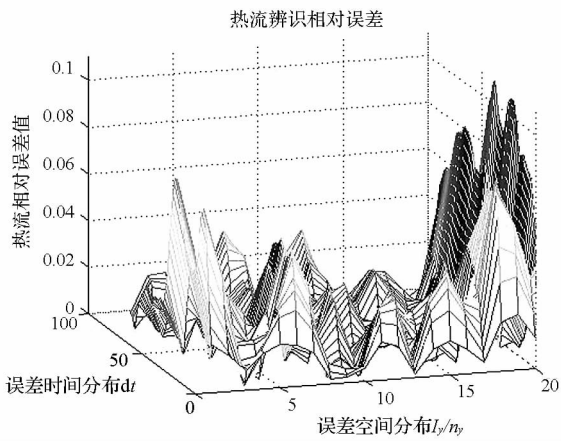


图 9 测量噪声  $\sigma = 0.2$  时, 真实值与辨识值的相对误差

Fig. 9 Relative error between true heating flux and identification result with measurement noise  $\sigma = 0.2$

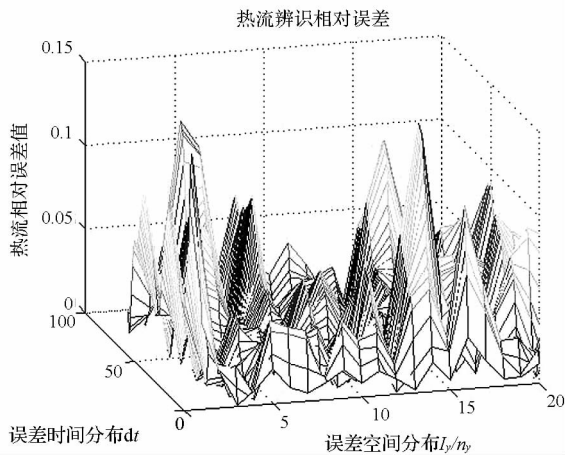


图 10 测量噪声  $\sigma = 0.5$  时, 真实值与辨识值的相对误差

Fig. 10 Relative error between true heating flux and identification result with measurement noise  $\sigma = 0.5$

辨识结果与真实结果趋势相同, 相差很小, 可见本文辨识算法的抗噪性很好。相对误差的最大值分别为 5%, 8%, 12%, 16%, 可见测量噪声的大小对辨识结果的影响随噪声标准差的增大而增大, 这是因为测量噪声的存在放大了反问题的不稳定性。在热防护设计过程中, 峰值热流的大小有着至关重要的作用, 为隔热材料的选择、防隔热层厚度设计提供重要依据。在测量误差  $\sigma$  为 0, 0.1, 0.2, 0.5 时, 峰值热流辨识结果的相对误差分别为 1.6%, 2%, 3%, 5%, 与热流真实值非常吻合。

## 5 结论

本文对考虑热传导系数、比热随温度变化的正交各向异性材料的二维非稳态非线性热传导反

问题进行了求解, 对外壁面上随空间和时间变化的热流参数进行辨识。通过对算法的改进, 解决了迭代过程中热流辨识结果发散的问题, 以及非线性热传导方程和相应灵敏度方程的离散求解问题。以上算例与结果表明, 在考虑一定测量噪声的情况下, 整体的热流辨识误差在 16% 以内, 峰值热流的辨识误差在 5% 以内, 本文所采用的热流辨识算法是准确、有效和稳定的。

## 参考文献 (References)

- [1] Beck J V, Blackwell B, Clair Jr C R S. Inverse heat conduction: Ill-posed problems[M]. New York: J. Wiley & Sons, 1985.
- [2] Alifanov O M. Inverse heat transfer problems[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Yang C Y. Estimation of boundary conditions in nonlinear inverse heat conduction problem[J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 2003, 17(3): 389 - 395.
- [4] Taler J, Duda P. Solving direct and inverse heat conduction problems[M]. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] Sawaf B, Ozisik M N, Jarny Y. An inverse analysis to estimate linearly temperature dependent thermal conductivity components and heat capacity of an orthotropic medium[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1995, 38(16): 3005 - 3010.
- [6] 钱炜祺, 周宇, 何开锋, 等. 非线性热传导逆问题的表面热流辨识方法[J]. 空气动力学学报, 2012, 30(2): 145 - 150.  
QIAN Weiqi, ZHOU Yu, HE Kaifeng, et al. Estimation of surface heat flux for nonlinear inverse heat conduction problem[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2012, 30(2): 145 - 150. (in Chinese)
- [7] 张丽慧, 王广军, 罗兆明, 等. 利用二维导热反问题预测钢坯温度分布[J]. 工程热物理学报, 2013, 11: 2136 - 2139.  
ZHANG Lihui, WANG Guangjun, LUO Zhaoming, et al. Predicting temperature distribution for steel using two-dimensional inverse heat conduction problem[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2013, 11: 2136 - 2139. (in Chinese)
- [8] 薛齐文, 魏伟. 非线性热传导反问题参数辨识[J]. 工程力学, 2010, 27(8): 5 - 9.  
XUE Qiwen, WEI Wei. Parameters identification of non-linear inverse heat conduction problem[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(8): 5 - 9. (in Chinese)
- [9] Deng S, Hwang Y. Applying neural networks to the solution of forward and inverse heat conduction problems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, 49(25/26): 4732 - 4750.
- [10] Cui M, Li N, Liu Y, et al. Robust inverse approach for two-dimensional transient nonlinear heat conduction problems[J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 2015, 29(2): 253 - 262.